

# 自由剪切流大尺度结构的二次稳定性\*

赵 耕 夫

(天津大学数学系, 300072)

(周恒推荐, 1994年6月3日收到)

## 摘 要

本文用二次稳定性理论研究自由剪切湍流中周期性基本流空间增长扰动的稳定性。数值结果表明三维亚谐波扰动对横向波数有很强的选择性, 二维亚谐波的空间增长率最大。与之相反, 基本模式的三维扰动在很大的波数范围内存在不稳定性, 证明  $\beta=0$  时存在“转移”不稳定性; 当KH波的幅值  $A \geq 0.06$  时出现分叉现象。

**关键词** 二次稳定性 大尺度结构 分叉

## 一、引 言

中等雷诺数以上的自由剪切流几乎都是湍流状态。实验已经证明自由剪切湍流中的大尺度相干结构和小尺度结构同时存在。这种大尺度结构实际上是一种不稳定波, 而小尺度结构对大尺度结构的发展所起的作用不大。两者的分离使得我们可以用流动稳定性理论研究自由剪切湍流大尺度结构的演化特性。一般认为自由剪切层的流向大尺度结构是其二次不稳定性发展的结果。Hall等人最近实验证明参数共振是亚谐波扰动迅速增长的内在机制<sup>[1]</sup>。二次稳定性理论已成功地解释了边界层的转捩问题<sup>[2]</sup>, 必定也可以用来研究自由剪切层的相干结构。Pierrehumbert等利用Floquet理论分析自由剪切层无粘性周期性基本流二维及三维扰动的二次稳定性<sup>[3]</sup>。Metcalf和Orszag则按二次稳定性概念, 用数值积分Navier-Stokes方程的方法研究自由剪切湍流的稳定性<sup>[4]</sup>。然而, 数值模拟难以确定初始扰动的最不稳定性模式, 因为开始积分的初始扰动总是任意的。Pierrehumbert把Stuart涡排作为周期性基本流, 但它只是理想流体Euler方程的定常解, 与实际情况相差较大, 并不具有普遍性。同时, 我们也注意到关于自由剪切层的二次稳定性理论研究至今只限于时间增长模式。实际上只有空间增长模式才能确切描述扰动的演化特性。本文把研究边界层过渡问题的二次稳定性理论用于湍流自由剪切层。我们直接从Navier-Stokes方程出发, 研究自由剪切流中周期性基本流对空间增长扰动的稳定性, 探讨大尺度结构和小尺度结构的关系。

\* 国家自然科学基金资助课题

## 二、基本方程

根据二次稳定性理论, 三维流场表示为

$$V(x, y, z, t) = V_2(x, y, t) + V_3(x, y, z, t) \quad (2.1)$$

其中,  $V_2 = (u_2, v_2, 0)$  为二维基本流,  $V_3 = (u_3, v_3, w_3)$  为三维小扰动, 和  $V_2$  相比,  $V_3$  是无限小量. 把 (2.1) 式代入无量纲的 Navier Stokes 方程, 分别使  $V_3$  的零次项和线性项的系数为零, 则得  $V_2, V_3$  所满足的方程.

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + (V_2 \cdot \nabla) V_2 = -\nabla p_2 + \frac{1}{R} \nabla^2 V_2 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} + (V_2 \cdot \nabla) V_3 + (V_3 \cdot \nabla) V_2 = -\nabla p_3 + \frac{1}{R} \nabla^2 V_3 \quad (2.3)$$

其中  $R = U\delta/\nu$  为雷诺数,  $\delta(x)$  为当地涡量厚度,  $U$  为最大速度.

二维基本流应当包含平均流和各阶 KH 波因此要求解非线性方程 (2.2). 但是, 对自由剪切层而言还没有很有效的方法求其二维平衡态解. Thorpe 的实验发现二次失稳的扰动增长到有限幅值的速度要比二维 KH 波快得多. 文献 [1] 证明对参数共振而言, 基本 KH 波以外的各阶波对能量传输的贡献只有 0.01~0.001, 成全可以忽略. 为此, 我们忽略了 KH 波的幅值随时间和空间坐标的变化, 而采用保形理论和局部平行假设. 设二维基本流为

$$V_2 = \bar{u} + AV_1 \quad (2.4)$$

$V_1 = (u_1, v_1)$  为基本 KH 波, 其幅值  $A$  为局部常数. 用流函数表示

$$u_1 = \partial \Psi / \partial y, \quad v_1 = -\partial \Psi / \partial x$$

$$\Psi(x, y, t) = \phi(y) \exp\{i(\alpha_r x - \omega t)\} + c.c. \quad (2.5)$$

按以上假定, 在以 KH 波的相速度  $c_r$  运动的生标系中  $\Psi$  为纯周期函数, 可表示为

$$\Psi(x', y) = \phi(y) \exp\{i\alpha_r x'\} + c.c., \quad x' = x - c_r t \quad (2.6)$$

$\alpha_r$  为 KH 波的流向波数,  $c.c.$  表示共轭,  $\phi(y)$  为 Orr-Sommerfeld 方程的特征函数. 我们取平均流为

$$\bar{u} = 0.5\{1 + \text{th}(y)\} \quad (2.7)$$

这一速度剖面已经考虑了小尺度结构对平均流的修正, 基本符合自由剪切湍流的真实速度分布.

根据以上分析, 在动坐标系中对这样的基本流, 方程 (2.3) 的各系数只是  $x'$  的周期函数, 与时间  $t$  和坐标  $z$  无关, 完全可以用 Floquet 理论分析其稳定性. 设其解为如下形式

$$V_3 = \exp[\sigma t] \cdot \exp[\gamma x'] \cdot \exp[i\beta z] \sum_{-N}^N V_m(y) \exp[im\hat{\alpha}x'] \quad (2.8)$$

其中  $\hat{\alpha} = \alpha_r/2$ ,  $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ ,  $\gamma = \gamma_r + i\gamma_i$ .  $\sigma_r$ ,  $\gamma_r$  分别为三维扰动随时间和空间的增长率. 这样形式的解代入方程 (2.3) 则形成二维 KH 波和三维扰动的参数共振. 当  $m$  为奇数时, 三维波的流向波长是 KH 波的二倍, 称为亚谐共振, 或主参数共振. 当  $m$  为偶数时, 三维波和二维 KH 波有相同的流向波长, 称做基本共振模式. 本文只考虑  $N=1$ , 且  $\gamma$  为实数的空间增长扰动. 在这种情况下三维扰动和二维 KH 波有相同的相速度, 且具有最大的空间增长率. 对

亚谐波扰动, (2.8) 式变为

$$V_3 = \exp[\sigma_r t] \cdot \exp[\gamma_r x'] \cdot \exp[i\beta z] \{V_1 \exp[i\hat{\alpha} x'] + V_1^* \exp[-i\hat{\alpha} x']\} \quad (2.9)$$

对方程 (2.3) 取旋度以消去  $p_3$ , 并利用连续方程消去  $w_3$ , 然后把 (2.4)、(2.6)、(2.9) 式代入所得到的方程, 可得如下两个相关联的常微分方程.

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{R} (D^2 - F^2) - \sigma \right] F^2 u + \frac{4\hat{\gamma}^2 \gamma^2}{R} u - 2\hat{\alpha} \gamma i \left[ \frac{1}{R} (D^2 - 2F^2) \right. \\ & \quad \left. - \sigma \right] u - \gamma (F^2 + 2\hat{\alpha}^2) (\bar{u} - c_r) u - i\hat{\alpha} (F^2 - 2\gamma^2) \\ & \quad \cdot (\bar{u} - c_r) u - \gamma \left[ \frac{1}{R} (D^2 - F^2 - 2\hat{\alpha}^2) - \sigma \right] Dv \\ & \quad - i\hat{\alpha} \left[ \frac{1}{R} (D^2 - F^2 + 2\gamma^2) - \sigma \right] Dv + (\gamma^2 - \hat{\alpha}^2) (\bar{u} - c_r) Dv \\ & \quad + 2i\hat{\alpha} \gamma (\bar{u} - c_r) Dv - \beta^2 \bar{u}' v - A \{ 2i\hat{\alpha} H^2 \phi D u^* \\ & \quad + (-\gamma H^2 + i\hat{\alpha} E^2) \phi' u^* + 2\hat{\alpha} (i\gamma - \hat{\alpha}) \phi D^2 v^* \\ & \quad - (\gamma^2 + \hat{\alpha}^2) \phi' D v^* + \beta^2 \phi'' v^* \} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{R} (D^2 - F^2) - \sigma \right] (D^2 - F^2) v - \frac{4\hat{\alpha}^2 \gamma^2}{R} v \\ & \quad + 4i\hat{\alpha} \gamma \left[ \frac{1}{R} (D^2 - F^2) - 0.5\sigma \right] v - \gamma [(\bar{u} - c_r) (D^2 - F^2 - 2\hat{\alpha}^2) \\ & \quad - \bar{u}'' ] v - i\hat{\alpha} [(\bar{u} - c_r) (D^2 - F^2 + 2\gamma^2) - \bar{u}'' ] v \\ & \quad + A \{ 4\hat{\alpha}^2 \phi D^2 u^* + 4\hat{\alpha} (i\gamma + \hat{\alpha}) \phi' D u^* \\ & \quad + 4\hat{\alpha} [\hat{\alpha} F^2 \phi + i\gamma (\phi'' - 2\hat{\alpha}^2 \phi)] u^* + 2i\hat{\alpha} \phi D^3 v^* \\ & \quad - (\gamma - 3\hat{\alpha}) \phi' D^2 v^* - 2\hat{\alpha} [2\hat{\alpha} \gamma \phi - i(D^2 - F^2) \phi] D v^* \\ & \quad + \gamma [(D^2 - Q^2) \phi' + i\hat{\alpha} (D^2 - P^2) \phi'] v^* \} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中

$$\begin{aligned} D &= d/dy, \quad F^2 = \hat{\gamma}^2 + \beta^2 - \gamma^2, \quad E^2 = \hat{\alpha}^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad H^2 = \hat{\alpha}^2 - \beta^2 + \gamma^2 \\ P^2 &= 3\hat{\alpha}^2 + 3\beta^2 - \gamma^2, \quad Q^2 = 5\hat{\alpha}^2 - \beta^2 + \gamma^2 \end{aligned}$$

其边界条件为

$$u = v = Dv = 0, \quad \text{当 } y = \pm \infty \text{ 时} \quad (2.12)$$

齐次方程 (2.10)、(2.11) 和齐次边界条件 (2.12) 构成一特征值问题. 四个常数中的两个可由数值方法程确定, 另外两个必须给定. 时间模式取  $\gamma_r = 0$ , 空间模式取  $\sigma_r = \gamma_r \omega / \alpha_r$ , 而  $\sigma_r$ ,  $\gamma_r$  则分别由方程确定.

设基本共振模式的解为如下形式

$$V_3 = \exp[\sigma_r t] \cdot \exp[\gamma_r x'] \exp[i\beta z] \{V_0 + V_2 \exp[i\alpha x'] + V_2^* \exp[-i\alpha x']\} \quad (2.13)$$

其中,  $\alpha = 2\hat{\alpha}$ .  $V_0$ ,  $V_2$  所满足的方程为

$$\left[ \frac{1}{R} (D^2 - F^2) - \sigma \right] F^2 u_2 + \frac{4\alpha^2 \gamma^2}{R} u_2$$

$$\begin{aligned}
& -2i\alpha\gamma\left[\frac{1}{R}(D^2-2F^2)-\sigma\right]u_2-\gamma(F^2+2\alpha^2)(\bar{u}-c_r)u_2 \\
& -i\alpha(F^2-2\gamma^2)(\bar{u}-c_r)u_2-\gamma\left[\frac{1}{R}(D^2-F^2-2\alpha^2)-\sigma\right]Dv_2 \\
& -i\alpha\left[\frac{1}{R}(D^2-F^2+2\gamma^2)-\sigma\right]Dv_2+(\gamma^2-\alpha^2)(\bar{u}-c_r)Dv_2 \\
& +2i\alpha\gamma(\bar{u}-c_r)Dv_2-\beta^2\bar{u}'v_2-A\{(\gamma+i\alpha)F_0^2\phi'u_0 \\
& -(\alpha^2\gamma+i\alpha F_0^2)\phi Du_0+\beta^2\phi''v_0-\gamma(\gamma+i\alpha)\phi'Dv_0 \\
& -\alpha(\alpha-i\gamma)\phi D^2v_0\}=0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{R}(D^2+F^2)-\sigma\right](D^2-F^2)v_2-\frac{4\alpha^2\gamma^2}{R}v_2+4\alpha\gamma i\left[\frac{1}{R}(D^2-F^2)-0.5\sigma\right]v_2 \\
& -\gamma[(\bar{u}-c_r)(D^2-F^2-2\alpha^2)-\bar{u}'' ]v_2 \\
& -i\alpha[(\bar{u}-c_r)(D^2-F^2+2\gamma^2)-\bar{u}'' ]v_2+A\{2i\alpha\gamma(D^2-\alpha^2)\phi \\
& -\alpha^2(D^2-F^2)\phi\}u_0+2i\alpha\gamma\phi'Du_0+\alpha^2\phi D^2u_0+[\gamma(D^2+\beta^2 \\
& -\alpha^2-\gamma^2)\phi'+i\alpha(D^2-E^2)\phi']v_0-[2\alpha^2\gamma\phi-i\alpha(D^2-F^2)\phi]Dv_0 \\
& -(\gamma-i\alpha)\phi'D^2v_0+i\alpha\phi D^3v_0\}=0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{R}(D^2-F_0^2)-\gamma(\bar{u}-c_r)-\sigma\right]F_0^2u_0-\gamma\left[\frac{1}{R}(D^2-F_0^2)-\gamma(\bar{u}-c_r)-\sigma\right]Dv_0 \\
& -\beta^2\bar{u}'v_0-2A\{(\gamma F^2-2\alpha\gamma^2i)\phi^*u_2+(\alpha^2\gamma+i\alpha F_0^2)\phi^*Du_2 \\
& -\gamma(\gamma+i\alpha)\phi^*Dv_2-i\alpha\gamma\phi^*D^2v_2+\beta^2\phi^{*''}v_2\}=0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{R}(D^2-F_0^2)-\gamma(\bar{u}-c_r)-\sigma\right](D^2+F_0^2)v_0+\gamma\bar{u}''v_0 \\
& +2A\{[\alpha^2(D^2+F_0^2)\phi^*-2i\alpha\gamma\phi^{*''}]u_2-2i\alpha(\gamma+i\alpha)\phi^*Du_2 \\
& +\alpha^2\phi^*D^2u_2+[\gamma(D^2+F_0^2)\phi^{*'}+2\alpha iF_0^2\phi^{*'}]v_2 \\
& -i\alpha(D^2-F_0^2)\phi^*Dv_2-(\gamma+2\alpha i)\phi^{*''}D^2v_2-i\alpha\phi^*D^3v_2\}=0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

边界条件为

$$u=v=Dv=u_0=v_0=Dv_0=0, \text{ 当 } y=\pm\infty \text{ 时} \tag{2.18}$$

其中  $F^2$ ,  $E^2$  和 (2.13) 式相同,  $F_0^2=\beta^2-\gamma^2$ .

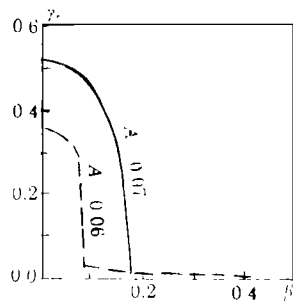
在给定  $R$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\bar{u}$  及解得二维 KH 波之后, 可用数值方法确定二次失稳扰动的空间增长率  $\gamma_r$  及扰动速度分量  $u$ ,  $v$ , 而横向速度  $w$  可通过连续方程获得.

### 三、数值结果

为求解 KH 波所满足的 Orr-Sommerfeld 方程和以上特征值问题, 我们采用变换  $\eta=y/\sqrt{y^2+y_0^2}$  把  $y=\pm\infty$  变为  $\eta=\pm 1$ , 其中  $y_0$  为可选择的常数. 在  $\eta$  空间可用 Chebyshev 多项式的配置点方法求解特征值问题. 在实际计算时我们把方程变为相关联的实数方程, 取  $y_0=3.0$ , 配置点数  $L=49$ . 取最不稳定 KH 波为周期性基本流, 其圆频率  $\omega=0.210$ .

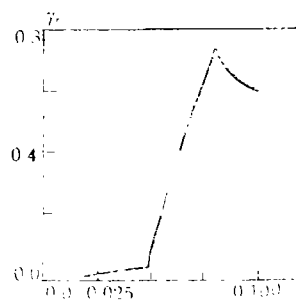
图 1 给出了  $R=800$  时不同 KH 波幅值的三维亚谐波的空间增长率和横向波数的函数关系曲线. 如图所示亚谐波在一个不大的波数带内发生参数共振, 且  $\beta=0$  时其增长率最大. 这表

明亚谐波扰动对波数的强烈选择性和大尺度结构的确定性，即涡的合并和撕裂过程有明显的二维特征。三维亚谐波扰动的空间增长率随横向波数的增大而迅速减小，当横向波数大于某一值时将不再有增长的三维亚谐波扰动。扰动在向下游传播的过程中有量纲波数 $\beta^*$ 保持不变，但涡



$R=800, \omega=0.210$

图1 三维亚谐波扰动的增长率和横向波数的关系



$R=800, \omega=0.210$

图2 三维亚谐波扰动的最大增长率随KH波幅值的变化

量厚度却不断增大，使得无量纲波数 $\beta=\beta^*\delta$ 随之增大，于是三维亚谐波扰动的增长率沿流向不断减小，以至最终消失。这即是所谓“短波截断”不稳定性。

实验和理论研究都已证明，不稳定波的频率和波数的比近似地等于相速度，因此我们可以近似地用KH波的相速度代替群速度把时间增长率转换成空间增长率。图3所示为理论计算的三维亚谐波空间增长率和通过简单关系 $\gamma'=\sigma_r/c_r$ 转换值的比较。当 $\beta=0$ 时两者几乎相等。这表明二次失稳模式和初始KH波一样近似地以KH波的相速度向下游传播。图2所示为二维亚谐波的空间增长率随初始KH波幅值的变化。当 $A=0.08$ 时达到最大值 $\gamma_r=0.747$ 。文献[3]得到的平行流极限值 $\sigma_r=0.367$ ，转换成空间增长率 $\gamma'=0.734$ 。两者几乎相同，而[3]的结果和Miksad的实验值相吻合。

二次失稳扰动的空间增长率随雷诺数的变化关系如图4所示。显然 $R>400$ 之后二次失稳亚谐波扰动的空间增长率基本和雷诺数无关，即在大于某一临界雷诺数之后，二次失稳模式和

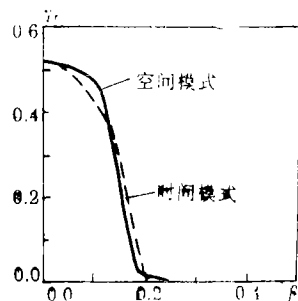


图3 理论计算的增长率和时间模式转换值的比较

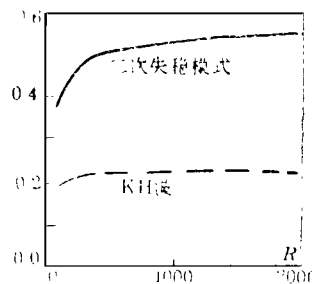


图4 三维亚谐波扰动和二维KH波的增长率随雷诺数变化的雷

初始KH波一样属于无粘不稳定性。

自发现自由剪切层的流向大尺度结构以来已有不少学者用实验和数值模拟研究流向条纹结构的产生和发展。Bernal和Roshko<sup>[6]</sup>实验证明初始的流向条纹确实是由于流动的二次不稳定性产生的。超过临界雷诺数之后，流向条纹将逐渐放大。条纹的横向尺度和流向尺度

的平均比值为0.67。Huang和Ho<sup>[6]</sup>的实验测得流向涡的频率和二维基本波频率相同。因此应当用(2.13)式所表示的基本共振模式来描述流向涡的演化。图5为基本共振模式三维扰动的增长率和横向波数的函数关系。当 $\beta=0$ 时 $\gamma_r=0$ ，然后 $\gamma_r$ 随 $\beta$ 的增大迅速增长， $\beta \approx 0.72$ 时 $\gamma_r$ 达到最大值。与亚谐共振不同，基本共振模式的三维扰动在很大的波数范围内存在不稳定性。最不稳定的三维波的横向波长与二维流向波长的比 $\lambda_x/\lambda_z \approx 0.6$ ，和Bernal的实验结果相近。文献[3]发现基本共振模式存在所谓的“转移”不稳定性。它是指当 $\beta \approx 0$ 时涡排受到无限小的扰动可能由一个稳定解变为另一个稳定解。本文也同样发现这种“转移”不稳定性。但是 $A < 0.06$ 时不存在这种现象。应当指出文献[4]的数值模拟未发现这种现象。

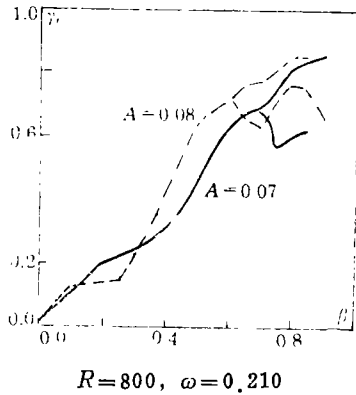


图5 三维基本模式的增长率随横向波数的变化

是 $A < 0.06$ 时不存在这种现象。应当指出文献[4]的数值模拟未发现这种现象。

如图5所示三维波的空间增长率达到最大值之后其增长率曲线出现了分叉现象。一般讲分叉出现在初始KH波幅值 $A \geq 0.06$ 之后。这一分支显示出三维波在更大波数范围的不稳定性。这一现象表明，除了大尺度流向涡之外还存在广泛的不稳定小尺度结构，即在向下游传播的过程中各种尺度的涡都可能演化成小尺度结构。因此基本共振模式是大尺度结构向小尺度结构过渡的内在机制。

#### 四、结 论

本文按准平行流的二次稳定性理论研究自由剪切层周期性基本流的不稳定性，发现三维亚谐扰动对横向波数有很强的选择性，且二维亚谐波的空间增长率最大，表明二维亚谐波占主导地位。基本共振模式的三维扰动在很大的波数范围内存在不稳定性。最不稳定的波的波长与实验吻合。同时我们还发现基本模式的分叉现象。不稳定波的另一分支显示出更大范围的不稳定性。它说明同时存在很多具有不同尺度的不稳定涡，这正是湍流多尺度的特征。这是一种从三维大尺度结构到复杂的湍流小尺度结构的一种可能的过渡机制。数值结果也表明，大于一定雷诺数之后二次失稳扰动和KH波一样都属于无粘不稳定性。

#### 参 考 文 献

- [1] Hall, M.R., R.W. Wiksad and E.G. Powers, Subharmonic growth by parametric resonance, *J. Fluid Mech.*, 236 (1992), 385—413.
- [2] Wang, D.Y. and G.F. Zhao, On secondary instability with respect to three dimensional subharmonic disturbances in boundary layer, *Acta, Mechanica Sinica*, 8(3) (1992), 231—236.
- [3] Pierrehumbert, R.T. and S.E. Windnall, The two and three dimensional instabilities of a spatially periodic shear layer, *J. Fluid Mech.*, 114 (1982), 59—88.
- [4] Metcalfe, R.W., S. A. Orszag, M. E. Brachet, S. Menon and J. J. Riley, Secondary instability of a temporally growing mixing layer, *J. Fluid Mech.*, 184 (1987), 207—243.

- [ 5 ] Bernal, L.P. and A.J. Roshko, Streamwise vortex structure in plane mixing layers, *J. Fluid Mech.*, 170 (1986), 499—525.
- [ 6 ] Huang, L.S. and C.M. Ho, Small-scale transition in a plane mixing layer, *J. Fluid Mech.*, 210 (1990), 475—500.

## Secondary Instability of Large Scale Structure in Free Turbulent Shear Layer

Zhao Geng-fu

(*Tianjin University, Tianjin, 300072*)

### Abstract

The secondary instability theory is used to study the behavior of spatially growing disturbance in free turbulent shear layer. The numerical results indicate that secondary instability of subharmonic mode shows a strong choice of spanwise wavenumber and the maximum growth rate occurs in two dimensional case. In contrast to that secondary instabilities of the fundamental mode occur in a wide scope of spanwise wavenumber. We have found so called 'translative instability' at  $\beta=0$  and bifurcation phenomenon for an amplitude of the KH wave larger than 0.06.

**Key words** secondary instability, large scale structure, bifurcation