应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Schauder不动点定理在脉冲微分方程解的存在性中的一个应用*

董玉君　　邹尔新

（解放军农牧大学数学教研室 长春 130062）

（林宗池推荐，1994年10月24日收到）

摘　　要

本文用Schauder不动点定理证明了一类用上下解方法难以解决的脉冲微分方程边值问题解的存在性，改进了现有的一些结果．

关键词　Schauder不动点定理　边值问题　解的存在性

一、引　　言

在本文中，我们将讨论下述的带有一个脉冲点的二阶脉冲微分方程两点边值问题

$$x''+h(t,x,x')x=f(t,x,x'),\qquad t\in(a,b),\ t\neq t_1 \tag{1.1}$$

$$x(t_1^+)=I(x(t_1^-)),\ x'(t_1^+)=N(x'(t_1^-)) \tag{1.2}$$

$$x(a)=A,\ x(b)=B \tag{1.3}$$

这里$t_1\in(a,b)$是某一固定的点；$h(t,x,y)=h_i(t,x,y)$，$f(t,x,y)=f_i(t,x,y)$ 当 $t\in(t_{i-1},t_i)$时，$h_i,f_i:[t_{i-1},t_i]\times R^2\to R$ 是连续函数，$i=1,2$（这里及随后设$t_0=a,t_2=b$）；存在某一正数M使得 $|f(t,x,y)|\leqslant M$；$I,N:R\to R$ 是单调不减的连续函数满足 $I(R)=R,N(R)=R$；A,B是固定的数．我们得到了下面两个定理

定理1　假设存在某自然数和某正数$\delta(\delta<1/2)$使得

$$\frac{(n+\delta)^2}{4(t_i-t_{i-1})^2}\pi^2\leqslant h(t,x,y)\leqslant\frac{(n+1-\delta)^2}{4(t_i-t_{i-1})^2}\pi^2 \tag{1.4}$$

当$t\in(t_{i-1},t_i)$，$x,y\in R$，$i=1,2$；$I(x)$和$N(y)$至少有一个是严格单调上升的．则问题(1.1)～(1.3)有一个解．

定理2　假设$\partial h/\partial y\equiv0$，此时记$h=h(t,x)$；存在定义在$[t_{i-1},t_i]$上的函数$\alpha_i(t)$使得当$t\in(t_{i-1},t_i)$，$i=1,2$时，

$$h(t,x)\leqslant\alpha_i(t)\leqslant\frac{\pi^2}{4(t_i-t_{i-1})^2},\ \alpha_i(t)\not\equiv\frac{\pi^2}{4(t_i-t_{i-1})^2} \tag{1.5}$$

则问题

---

* 1993年7月19日第一次收到．

(1.1)～(1.3)有一个解。

定理1推广了[6,Theorem]，而且脉冲问题

$$x''=-\frac{25}{16}\pi^2x+\frac{25}{16}\pi^2,\qquad t\in(0,1),t\neq\frac{3}{10}$$

$$x\left(\frac{3}{10}+\right)=x\left(\frac{3}{10}-\right),\ x'\left(\frac{3}{10}+\right)=\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{8}\cdot x'\left(\frac{3}{10}-\right)$$

$$x(0)=x(1)=0$$

无解这一事实告诉我们，一般地，当$t_1\neq(a+b)/2$时，$h(t,x,y)$所满足的条件不能换成[6, Theorem]中的条件．定理2推广了[4,定理4.1]关于解的存在性部分的结果，所用方法也与之类似．

微分方程的脉冲问题来源于生物数学和医学数学模型，具有广泛的应用，已经渐渐地引起了人们的关注．先前的工作（如[1～5]）所使用的主要手段是上下解方法．而在本文的主要结果定理1中，上下解方法很难使用．我们将通过一系列引理之后用Schauder不动点定理证明定理1．

二、定理1的证明

记$\Omega=\{x:[a,b]\to R\mid$对$t\neq t_1,x(t)$二次连续可微，并且$x'(t_1^-)$，$x'(t_1^+)$存在，$x(t_1)=x(t_1^-),x'(t_1)=x'(t_1^-)\}$．称$x(t)\in\Omega$是(1.1)～(1.3)的解，如果$x(t)$满足关系式(1.1)～(1.3)．

引理1 假设$p(t),f(t)$在$[a,b]$上连续，$|f(t)|\leqslant M$当$t\in[a,b]$，并且存在正数$\delta(0<\delta<1/2)$满足

$$\left.\begin{array}{ll} & \dfrac{(n+\delta)^2}{(b-a)^2}\pi^2\leqslant p(t)\leqslant\dfrac{(n+1-\delta)^2}{(b-a)^2}\pi^2 \\ \text{或者} & 0<p(t)\leqslant\pi^2(1-\delta)^2/(b-a)^2\qquad \text{当}t\in[a,b]\end{array}\right\}\tag{2.1}$$

则边值问题

$$\left.\begin{array}{ll} u''+p(t)u=f(t), & t\in(a,b)\\ u(a)=A,\ u(b)=B & \end{array}\right\}\tag{2.2}$$

有唯一解$u(t)$，并且存在不依赖于$p(t)$和$f(t)$的正数D使得

$$|u(t)|^2+|u'(t)|^2\leqslant D^2\qquad\text{当}t\in[a,b]$$

证明 这一引理可由[6,Theorem3]和Sturm比较定理得到．

引理2 假设$p(t)$在$[a,b]\backslash\{t_1\}$上连续，$p(t_1^+)$，$p(t_1^-)$存在；并且当用$p(t)$代替$h(t,x,y)$时(1.4)成立．则边值问题

$$\left.\begin{array}{ll} u''+p(t)u=0, & t\in(a,t_1)\\ u(a)=0,\ u(t_1)=1 & \end{array}\right\}\tag{2.3}$$

及

$$\left.\begin{array}{ll} u''+p(t)u=0, & t\in(t_1,b)\\ u(t_1)=1,\ u(b)=0 & \end{array}\right\}\tag{2.4}$$

有唯一解．记它们分别为$u_1(t)$及$u_2(t)$，则有

$$\bar{u}_1'(t_1) \leqslant u_1'(t_1) \leqslant \underline{u}_1'(t_1), \quad \bar{u}_2'(t_1) \geqslant u_2'(t_1) \geqslant \underline{u}_2'(t_1) \tag{2.5}$$

其中$\bar{u}_1(t)$及$\underline{u}_1(t)$分别是边值问题

$$\left.\begin{aligned} &u''+\pi^2 u(n+1-\delta)^2/4(t_1-a)^2=0, \qquad t\in(a,t_1) \\ &u(a)=0, \ u(t_1)=1 \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

及

$$\left.\begin{aligned} &u''+\pi^2 u(n+\delta)^2/4(t_1-a)^2=0, \qquad t\in(a,t_1) \\ &u(a)=0, \ u(t_1)=1 \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

的解，而$\bar{u}_2(t)$及$\underline{u}_2(t)$分别是边值问题

$$\left.\begin{aligned} &u''+\pi^2 u(n+1-\delta)^2/4(b-t_1)^2=0, \qquad t\in(t_1,b) \\ &u(t_1)=1, \ u(b)=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

及

$$\left.\begin{aligned} &u''+\pi^2 u(n+\delta)^2/4(b-t_1)^2=0 \qquad t\in(t_1,b) \\ &u(t_1)=1, \ u(b)=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

的解。

证明 易见$\pi^2(n+\delta)^2/4(t_1-a)^2$和$p(t)$，$\pi^2(n+1-\delta)^2/4(t_1-a)^2$都满足(2.1)。因此，引理 2 可由引理 1 及Sturm比较定理证得。

考虑线性边值问题

$$u''+p(t)u=f(t), \qquad t\in(a,b), \ t\neq t_1 \tag{2.10}$$

$$u(t_1^+)=I(u(t_1^-)), \ u'(t_1^+)=N(u'(t_1^-)) \tag{2.11}$$

$$u(a)=0, \ u(b)=0 \tag{2.12}$$

引理3 假设除了$t=t_1$外，$p(t)$和$f(t)$在$[a,b]$上连续，它们的左右极限在$t=t_1$点处存在，并且$|f(t)|\leqslant M$，$p(t)$满足(1.4)。则(2.10)～(2.12)有唯一解满足

$$|u(t)|+|u'(t)|\leqslant D \qquad 当t\in[a,b] \tag{2.13}$$

这里D是不依赖于$p(t)$和$f(t)$的正数。

证明 由引理1及$p(t)$满足(1.4)可知，边值问题

$$\begin{cases} u''+p(t)u=f(t), & t\in(a,t_1) \\ u(a)=u(t_1)=0 \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} u''+p(t)u=f(t), & t\in(t_1,b) \\ u(t_1)=u(b)=0 \end{cases}$$

均有唯一解。记它们分别为$v_1(t)$和$v_2(t)$，由引理1，存在$D_1>0$使得当$t\in[t_{i-1},t_i]$，$i=1,2$时

$$(v_i(t))^2+(v_i'(t))^2\leqslant D_1^2$$

令

$$\begin{aligned} u(t,c)&=cu_1(t)+v_1(t) & 当t\in[a,t_1] \\ &=I(c)u_2(t)+v_2(t) & 当t\in(t_1,b] \end{aligned}$$

$$\varDelta(c)=u'(t_1^+,c)-N(u'(t_1,c))$$

我们能够证明，存在c^*使得$\varDelta(c^*)=0$。于是$u(t,c^*)$是(2.10)～(2.12)的解。

现在我们来证明唯一性。

假设 $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 都是(2.10)～(2.12)的解，记 $w(t)=w_1(t)-w_2(t)$，那么 $w(t)$ 满足

$$w''+p(t)w=0,\ t\in(a,b),\ t\neq t_1$$
$$w(t_1^+)=I_1(w(t_1)),\ w'(t_1^+)=N_1(w'(t_1))$$
$$w(a)=w(b)=0$$

这里，$I_1(x)=I(x+w_2(t_1))-I(w_2(t_1))$，$N_1(y)=N(y+w_2'(t_1))-N(w_2'(t_1))$

由 $N(y)$ 的单调性及引理1和引理2，我们可得 $w(t)\equiv 0$。

现在我们来证明主要结果。

作变换 $x(t)=[A(b-t)+B(t-a)]\ (b-a)+y(t)$，则读者会发现定理1只须在条件 $A=B=0$ 之下来证明。

定理1的证明 记 $E=\{x:[a,b]\to R\,|\,x(t)$ 当 $t\neq t_1$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，$x'(t_1^+)$，$x'(t_1^-)$ 存在，并且 $x(t_1)=x(t_1^-)$，$x'(t_1)=x'(t_1^-)\}$，对任意 $x\in E$，定义

$$\|x\|=\max\{\sup_{t\in[a,b]}|x(t)|,\ \sup_{t\in[a,b]}|x'(t)|\}$$

则 $(E,\|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间，$x_n(t)$ 按模 $\|\cdot\|$ 收敛等价于 $x_n(t)$ 及 $x_n'(t)$ 分别在 $[a,b]$ 上一致收敛。

对任意 $x\in E$，由引理 3，边值问题

$$y''+h(t,x,x')y=f(t,x,x'),\qquad t\in(a,b),\ t\neq t_1 \tag{2.14}$$
$$y(t_1^+)=I(y(t_1)),\ y'(t_1)=N(y'(t_1)) \tag{2.15}$$
$$y(a)=y(b)=0 \tag{2.16}$$

有唯一解 $y(t)\in E$ 满足

$$|y(t)|+|y'(t)|\leqslant D\qquad 当\ t\in[a,b]$$

这里 D 是不依赖于 $h(t,x,x')$，$f(t,x,x')$ 的正数，于是我们有

$$\|y\|\leqslant D \tag{2.17}$$

令 $S=\{x\in E\,|\,\|x\|\leqslant D\}$，则 S 是一个 $(E,\|\cdot\|)$ 的闭有界凸子集。定义 $T:x\to Tx=y$，由(2.17)可知 $T(S)\subset S$。由 T 的定义，我们只须证明 T 在 S 上有不动点。由 Schauder 不动点定理[8,p.131]，这只须证明 T 在 S 上是连续的，并且 $T(S)$ 是相对紧的。

由 Ascoli-Arzela 定理[7,p.4]，我们可以证明 $T(S)$ 是相对紧的，由此及引理3可得 T 是连续的。定理证明结束。

在稿件修改过程中林宗池先生提出了宝贵的建议，作者对此深表感谢。同时作者也要对农牧大学基础部主任王国元教授的大力支持表示感谢。

参 考 文 献

[1] Hu Shou-chun and V. Laksmikantham, PBVP for second order impulsive differential systems, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 13(1) (1989), 75—85.

[2] Erbe, L. H. and Liu Xin-zhi, Existence results for boundary value problems of second order impulsive differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 149 (1990), 56—69.

[3] 董玉君、周钦德，二阶脉冲微分方程边值问题，吉林大学自然科学学报，(2)(1991)，13—20.

[4] 董玉君、周钦德，脉冲微分方程边值问题，吉林大学自然科学学报，(3)(1991)，1—8.

[5] 董玉君、孙万凯，一类二阶脉冲微分方程周期边值问题，《数学科学学术研讨会论文集》，吉林大学出版社，长春 (1992), 199—202.

[6] Lazar, A. C. and D. E. Leach, On a nonlinear two-point boundary value problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 26 (1969), 20—27.

[7] Hartman, Philip, *Ordinary Differential Equations*, Second Edition, Boston; Basel, Stuttgart, Birkhauser (1982).

[8] Cronin, Jane, Fixed points and topological degree in nonlinear analysis, *Mathematical Surveys*, No.11, American Mathematical Society, Providence (1964).

An Application of Schauder's Fixed Point Theorem to the Existence of Solutions of Impulsively Differential Equations

Dong Yu-jun Zou Er-xin

(*Department of Mathematics, University of Agriculture and Animal Sciences of PLA*, *Changchun*, 130062)

Abstract

In this paper the existence of solutions of a boundary value problem for impulsively differential equations that is difficult to solve by the upper and lower solution method will be proved by means of Schauder's fixed point theorem, which improves some existing results.

Key words Schauder's fixed point theorem, boundary value problem, existence of solutions