应用数学和力学，第16卷 第4期（1995年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类非牛顿流体流动问题的变分原理和广义变分原理

沈 敏 孙其仁

（上海大学；上海市应用数学和力学研究所 200072）

（戴世强推荐，1994年7月8日收到）

摘 要

本文将钱伟长教授[1]的不可压缩粘性流的最大功率消耗原理推广到一类特殊的非牛顿流体——广义牛顿流体的流动问题，并采用识别的拉氏乘子法来解除变分约束条件，导出其广义变分原理。

关键词 非牛顿流体 变分原理 拉氏乘子

一、引 言

随着有限元法在流体力学中的广泛应用，人们开始重视流体力学中的变分原理的研究。早期的工作主要有文献[2～6]，但这些研究工作都是关于非粘性流体的流动问题，且重点放在物体外场的流动，其出发点是 Bernoulli 方程。钱伟长教授首先从 Navier-Stokes方程出发，建立了粘性流体的流动问题的变分原理，即最大功率消耗原理及其广义变分原理[1]。本文在文献[1]工作的基础上，将其中关于不可压缩粘性流体流动问题的最 功率消耗原理推广到一类特殊的非牛顿流体——广义牛顿流体流动问题的情形，并采用识别的拉氏乘子法解除诸变分的约束条件，导出其广义变分原理。

二、广义牛顿流体流动问题的基本方程

对于广义牛顿流体的流动问题，如果我们取 Euler 坐标$x_i(i=1,\ 2,\ 3)$，则各点的流速为$u_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$，压力为$p(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$.设流体中各点的应力为σ_{ij}，则有[7]

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+2\eta(I_2)\varepsilon_{ij} \tag{2.1}$$

其中：

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2 \tag{2.3}$$

$$u_{i,j}=\partial u_i/\partial x_j \tag{2.4}$$

$$I_2=\sqrt{2\varepsilon_{ij}\cdot\varepsilon_{ij}} \tag{2.5}$$

这里ε_{ij}称为流体的应变率张量，I_2为应变率张量的第二不变量，$\eta(I_2)$为广义牛顿流体的粘度，它是I_2的给定函数．流体的运动方程为：

$$\rho(\partial u_i/\partial t+u_k u_{i,k})=\rho\bar{F}_i+\sigma_{ij,j} \tag{2.6}$$

其中$\bar{F}_i$为流体单位质量所受的体积力，ρ为流体的密度．若以u_i，p作为求解未知量，则将(2.1)、(2.3)式代入(2.6)得到用速度和压力表示的流体运动方程

$$\rho(\partial u_i/\partial t+u_k u_{i,k})=\rho\bar{F}_i-p_{,i}+[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]_{,j} \tag{2.7}$$

另外，流体的流动还需满足连续性方程

$$u_{k,k}=0,\qquad 在\tau中 \tag{2.8}$$

流场的边界条件为，在给定面力的边界Γ_σ上有

$$\sigma_{ij}n_j=[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})-p\delta_{ij}]n_j=\bar{f}_i\qquad 在\Gamma_\sigma上 \tag{2.9}$$

在固体壁面边界Γ_s上，有无滑移条件

$$u_i=0,\qquad 在\Gamma_s上 \tag{2.10}$$

此外，在来流边界Γ_u上，流速为已知

$$u_i=\bar{u}_i,\qquad 在\Gamma_u上 \tag{2.11}$$

这里整个流场τ的边界$\Gamma=\Gamma_\sigma+\Gamma_s+\Gamma_u$．于是以$u_i$，$p$为求解量的定解问题为：在边界条件(2.9)～(2.11)式下，从方程组(2.7)、(2.8)求解u_i，p．

三、广义牛顿流体流动问题的最大功率消耗原理（单变量u_i）

从式(2.5)我们有

$$\frac{\partial I_2}{\partial\varepsilon_{ij}}=\frac{2\varepsilon_{ij}}{I_2} \tag{3.1}$$

因此，(2.1)式可写成

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\eta(I_2)I_2\frac{\partial I_2}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{3.2}$$

我们定义函数$\nu(I_2)$如下：

$$\nu(I_2)=\int_0^{I_2}v\eta(v)dv \tag{3.3}$$

于是本构方程(3.2)可写成

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\frac{\partial\nu}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{3.4}$$

至此，我们便可把文[1]中关于不可压缩粘性流动问题的变分原理即最大功率消耗原理推广到广义牛顿流体流动问题中，而得到如下的广义牛顿流体流动问题的最大功率消耗原理．

在一切满足连续性方程(2.8)，边界条件(2.10)、(2.11)的u_i中，使下列流体功率消耗泛函[1]

$$\Pi=\Pi_0+\iiint_\tau[\nu(I_2)-\rho\bar{F}_i u_i]d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i u_i ds \tag{3.5}$$

取最大值者，即为广义牛顿流体流动问题的正确解．这里泛函Π_0的变分为：

$$\delta\Pi_0=\iiint_\tau \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k u_{i,k}\right)\delta u_i d\tau \tag{3.6}$$

证明 设u_i发生变分δu_i，则

$$\Pi(u_i+\delta u_i)=\Pi(u_i)+\delta\Pi+\delta^2\Pi+\cdots \tag{3.7}$$

$$\delta\Pi=\delta\Pi_0+\iiint_\tau\left[\frac{\partial v}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}-\rho\bar{F}_i\delta u_i\right]d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i ds \tag{3.8}$$

$$\delta^2\Pi=\delta^2\Pi_0+\iiint_\tau\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{pq}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{pq}d\tau \tag{3.9}$$

其中$\delta\Pi_0$见式(3.6)，而

$$\delta^2\Pi_0=\iiint_\tau\rho\delta\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k u_{i,k}\right]\delta u_i d\tau \tag{3.10}$$

比较(2.1)、(3.4)式，我们有

$$\frac{\partial v}{\partial\varepsilon_{ij}}=\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{3.11}$$

因此：

$$\frac{\partial v}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}=\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})\frac{1}{2}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})=\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})\delta u_{i,j} \tag{3.12}$$

另外，由变分约束条件知流速在变分过程中满足连续性方程，故有

$$\delta u_{k,k}=0,\qquad 在\tau中 \tag{3.13}$$

所以有

$$\delta_{ij}p\delta u_{i,j}=p\delta u_{i,i}=0 \tag{3.14}$$

故(3.8)式可写成

$$\delta\Pi=\delta\Pi_0+\iiint_\tau\{[-p\delta_{ij}+\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]\delta u_{i,j}-\rho\bar{F}_i\delta u_i\}d\tau$$

$$-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i ds \tag{3.15}$$

由于在边界Γ_u．Γ_s上，速度u_i已满足边界条件(2.10)、(2.11)式，故有

$$\delta u_i=0,\qquad 在\Gamma_u，\Gamma_s上 \tag{3.16}$$

于是按 Green 定理，我们有

$$\iiint_\tau[-p\delta_{ij}+\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]\delta u_{i,j}d\tau$$

$$=\iint_{\Gamma_\sigma}[-p\delta_{ij}+\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]n_j\delta u_i ds$$

$$-\iiint_\tau\{-p_{,i}+[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]_{,j}\}\delta u_i d\tau \tag{3.17}$$

因此，

$$\delta\Pi=\iiint_\tau\left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}+p_{,i}-[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]_{,j}-\rho\bar{F}_i\right\}\delta u_i d\tau$$

$$+\iint_{\Gamma_\sigma}\{[-p\delta_{ij}+\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]n_j-\bar{f}_i\}\delta u_i ds \tag{3.18}$$

若u_i使Π取驻值，即$\delta\Pi=0$，则由δu_i在τ中和Γ_σ上的变分独立性知，u_i满足

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k u_{i,k}\right)-\rho \bar{F}_i+p_{,i}-[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]_{,j}=0, \qquad \text{在}\tau\text{中} \tag{3.19}$$

$$[-p\delta_{ij}+\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]n_j-\bar{f}_i=0, \qquad \text{在}\Gamma_\sigma\text{上} \tag{3.20}$$

式(3.19)、(2.20)即为方程(2.7)和边界条件(2.9)．因此在变分约束条件下，使泛函Π取驻值的u_i将满足广义牛顿流体流动问题的所有方程和边界条件，是问题的正确解．现在我们要证明该驻值为最大值，从式(3.7)知，此时只要证明$\delta^2\Pi\leqslant 0$即可．为此对(3.19)取变分得

$$\rho\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k u_{i,k}\right)=-\delta p_{,i}+\delta[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]_{,j} \tag{3.21}$$

于是式(3.10)可写成：

$$\delta^2\Pi_0=\iiint_\tau\{-\delta p_{,i}\delta u_i+\delta[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]_{,j}\delta u_i\}d\tau \tag{3.22}$$

运用 Green 定理和式(3.13)、(3.16)，我们有

$$\iiint_\tau -\delta p_{,i}\delta u_i d\tau=\iint_{\Gamma_u+\Gamma_s+\Gamma_\sigma}-\delta p n_i\delta u_i\, ds+\iiint_\tau \delta p\delta u_{i,i}d\tau$$

$$=\iint_{\Gamma_\sigma}-\delta p n_i\delta u_i ds \tag{3.23}$$

$$\iiint_\tau \delta[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]_{,j}\delta u_i d\tau$$

$$=\iint_{\Gamma_u+\Gamma_s+\Gamma_\sigma}\delta[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]n_j\delta u_i ds-\iiint_\tau\delta[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]\delta u_{i,j}d\tau$$

$$=\iint_{\Gamma_\sigma}\delta[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]n_j\delta u_i ds-\iiint_\tau\delta[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]\delta\varepsilon_{ij}d\tau \tag{3.24}$$

于是(3.22)可写成

$$\delta^2\Pi_0=\iint_{\Gamma_\sigma}\{-\delta p\delta_{ij}+\delta[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]\}n_j\delta u_i ds$$

$$-\iiint_\tau\delta[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]\delta\varepsilon_{ij}d\tau \tag{3.25}$$

对式(3.20)、(3.11)分别进行变分后得

$$\{-\delta p\delta_{ij}+\delta[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]\}n_j=0 \tag{3.26}$$

$$\delta[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]=\delta\left(\frac{\partial\nu}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)=\frac{\partial^2\nu}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{pq}}\delta\varepsilon_{pq} \tag{3.27}$$

将(3.26)、(3.27)代入(3.25)得

$$\delta^2\Pi_0=-\iiint_\tau\frac{\partial^2\nu}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{pq}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{pq}d\tau \tag{3.28}$$

将上式代入(3.9)便得

$$\delta^2\Pi=-\frac{1}{2}\iiint_\tau\frac{\partial^2\nu}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{pq}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{pq}d\tau \tag{3.29}$$

按式(2.3)、(2.5)、(3.1)、(3.11)可得

$$\frac{\partial^2\nu}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{pq}}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{pq}}[2\eta(I_2)\varepsilon_{ij}]$$

$$=2\frac{d\eta}{dI_2}\frac{\partial I_2}{\partial\varepsilon_{pq}}\varepsilon_{ij}+2\eta\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\varepsilon_{pq}}$$

$$=\frac{4\eta'}{I_2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{pq}+2\eta\delta_{ip}\delta_{jq} \tag{3.30}$$

若$\eta'\geqslant 0$，则有

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{pq}}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{pq}=\frac{\eta'}{I_2}[\delta(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})]^2+2\eta\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\geqslant 0 \tag{3.31}$$

从式(3.29)便知

$$\delta^2\Pi\leqslant 0 \tag{3.32}$$

即上述泛函的驻值为极大值。至此我们证明了广义牛顿流体流动问题的最大功率消耗原理。需要指出，对可能出现$\eta'<0$的情形，上述极值原理不一定成立，但驻值原理仍然成立。

四、广义牛顿流体流动问题的广义变分原理（双变量u_i，p）

在上述变分原理中，有三个变分约束条件，即连续性方程(2.8)式和流速边界条件(2.10)、(2.11)式。为了解除这些变分约束条件而使之成为泛函取驻值的自然条件，我们分别在τ中和Γ_s，Γ_u上引入三个拉氏乘子ε，λ_i，π_i把这三个变分约束条件引入泛函而得到新的泛函

$$\Pi^*=\Pi+\iiint_\tau \varepsilon u_{i,i}d\tau+\iint_{\Gamma_s}\lambda_i u_i ds+\iint_{\Gamma_u}\pi_i(u_i-\bar{u}_i)ds \tag{4.1}$$

其中泛函Π见(3.5)式。

对(4.1)式进行变分，并运用 Green 定理得

$$\begin{aligned}
\delta\Pi^*=&\iiint_\tau\left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]_{,j}-\varepsilon_{,i}\right\}\delta u_i d\tau\\
&+\iint_{\Gamma_\sigma+\Gamma_u+\Gamma_s}\{\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})n_j+\varepsilon n_i\}\delta u_i ds\\
&+\iiint_\tau \delta\varepsilon u_{k,k}d\tau+\iint_{\Gamma_s}(u_i\delta\lambda_i+\lambda_i\delta u_i)ds\\
&+\iint_{\Gamma_u}\{(u_i-\bar{u}_i)\delta\pi_i+\pi_i\delta u_i\}ds-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i ds\\
=&\iiint_\tau\left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]_{,j}-\varepsilon_{,i}\right\}\delta u_i d\tau\\
&+\iiint_\tau u_{k,k}\delta\varepsilon d\tau+\iint_{\Gamma_s}u_i\delta\lambda_i ds+\iint_{\Gamma_s}\{[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})+\varepsilon\delta_{ij}]n_j\\
&+\lambda_i\}\delta u_i ds+\iint_{\Gamma_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta\pi_i ds\\
&+\iint_{\Gamma_u}\{[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})+\varepsilon\delta_{ij}]n_j+\pi_i\}\delta u_i ds\\
&+\iint_{\Gamma_\sigma}\{[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})+\varepsilon\delta_{ij}]n_j-\bar{f}_i\}\delta u_i ds
\end{aligned} \tag{4.2}$$

于是由Π^*的驻值条件$\delta\Pi^*=0$，我们有

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})]_{,j}-\varepsilon_{,i}=0,\quad 在\tau中 \tag{4.3a}$$

$$u_{k,k}=0,\qquad 在\tau中 \tag{4.3b}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0,\qquad 在\Gamma_u上 \tag{4.3c}$$

$$\pi_i+[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})+\varepsilon\delta_{ij}]n_j=0,\qquad 在\Gamma_u上 \tag{4.3d}$$

$$u_i=0,\qquad 在\Gamma_s上 \tag{4.3e}$$

$$\lambda_i+[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})\varepsilon\delta_{ij}]n_j=0,\qquad 在\Gamma_s上 \tag{4.3f}$$

$$[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})+\varepsilon\delta_{ij}]n_j-\bar{f}_i=0,\qquad 在\Gamma_\sigma上 \tag{4.3g}$$

比较(4.3a)和(3.19)式得：

$$\varepsilon=-p \tag{4.4}$$

将上式代入(4.3d)、(4.3f)、(4.3g)式分别得到

$$\pi_i=-[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})-p\delta_{ij}]n_j,\qquad 在\Gamma_u上 \tag{4.5}$$

$$\lambda_i=-[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})-p\delta_{ij}]n_j,\qquad 在\Gamma_s上 \tag{4.6}$$

$$\bar{f}_i=-[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})-p\delta_{ij}]n_j,\qquad 在\Gamma_\sigma上 \tag{4.7}$$

这里式(4.5)、(4.6)分别给出了拉氏乘子π_i，λ_i的识别结果而式(4.7)则是受力边界条件。其余的式(4.3b)、(4.3c)、(4.3e)分别是连续性方程、来流边界条件和固壁边界条件。至此，我们通过泛函Π^*的驻值条件，求得全部拉氏乘子和广义牛顿流体流动问题的全部定解方程和边界条件。

把ε，π_i，λ_i的表达式(4.3)、(4.4)、(4.5)代入(4.1)，便得到广义牛顿流体流动问题的广义变分原理的泛函为：

$$\Pi^*=\Pi-\iiint_\tau p u_{k,k}d\tau-\iint_{\Gamma_s}[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})-p\delta_{ij}]n_j u_i ds$$
$$-\iint_{\Gamma_u}[\eta(I_2)(u_{i,j}+u_{j,i})-p\delta_{ij}]n_j(u_i-\bar{u}_i)ds \tag{4.8}$$

于是广义牛顿流体流动问题的变分原理为：

在一切u_i，p中，使泛函(4.8)式为驻值的u_i，p必为广义牛顿流体流动问题的正确解。即泛函Π^*的驻值条件给出u_i，p定解问题的所有方程和边界条件。

五、结　束　语

本文对广义牛顿流体流动问题给出了相应的变分原理和广义变分原理，我们已对这种流体的流动问题采用上述变分原理和有限元法进行了计算，有关结果将以另文发表。

参 考 文 献

[1] 钱伟长，粘性流体力学的变分原理和广义变分原理，应用数学和力学，5(3) (1984)，305—332.

[2] Lin, C. C. and L. Rubinov., On the flow behind curved shocks, *J. Math. Physics*, 27 (1984), 105.

[3] Skobelkin, V. I., Variational principle in hydrodynamics, *Soviet Physics-JETP*, 4(1) (1957), 68.

[4] Guderly, K. G., An extremum principle for three dimensional compressible

inviscid flows, *SIAN, J. App. Math.*, 23(27) (1972), 259.

[5] Manuwell, A. R., A variational principle steady homogenetic compressible flow with finite shocks, *Wave Motion*, 2 (1980), 83.

[6] Hafez, M. and D. Lovell, Numerical solution of transonic stream function equation, *AIAA Journal*, 21(3) (1983).

[7] Grochet, M. J., A. R. Davies and K. Walters, *Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow*, Elsevier (1984).

Variational Principle and Generalized Variational Principle in Hydrodynamics of a Class of Non-Newtonian Fluid

Shen Min Sun Qi-ren

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai*, 200072)

Abstract

In this paper, the principle of maximum power losses for the incompressible viscous fluid proposed by professor Chien Wei-zang is extended to the hydrodynamic problems of a special class of non-Newtonian fluid——generalized Newtonian fluid. The constraint conditions of variation are eliminated by the method of identified Lagrangian multipliers and a generalized variational principle is established.

Key words non-Newtonian fluid, variational principle, Lagrangian multiplier