应用数学和力学，第16卷 第4期（1995年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

构造弹性力学位移函数的机械化算法*

张鸿庆　　冯　红

（大连理工大学数学研究所 116023）

（1994年4月25日收到）

摘　要

本文证明线性算子方程组$Au=f$的一般解为$u=Cv+e$，其中v满足方程组$Dv=g$，D是对角矩阵．以Hilbert零点定理的构造性证明为基础，给出了C，D，e的机械化求法．用此方法可以给出各种弹性力学位移函数的机械化算法．

关键词　弹性力学　位移函数　机械化算法　Hilbert零点定理

构造弹性力学位移函数的问题已有许多研究[1],[2]，但是没有一个统一的有效的方法．文献[3]～[6]对齐次线性弹性力学方程组给出构造位移函数的一般方法．本文给出构造非齐次线性偏微分方程组一般解的统一格式，并就常系数情形以代数几何方法为工具，给出构造一般解的机械化算法．这种算法可以借助符号计算技术在计算机上实现[7]．弹性力学方程组许多著名的结果都是本文的特例．利用本文的方法还可以构造出一系列新解．

一、非齐次线性偏微分算子方程组一般解的构造

定理1　设A，B，C，D是线性空间M到M的线性算子阵，$C\ker D=\ker A$，$AC=BD$，则方程$Au=f$的一般解可以表示成$u=Cv+e$，$Dv=g$，其中e，g是方程 $Ae+Bg=f$ 的一组解．

证明　对满足$Ae+Bg=f$的任意一组e和g，令$u=Cv+e$，其中v满足$Dv=g$，则

$$Au=ACv+Ae=BDv+Ae=Ae+Bg=f$$

反之，对方程$Au=f$的任意解u，设$u_1=Cv_1+e$是$Au=f$的一个特解，其中$Dv_1=g$，$Ae+Bg=f$．则　$u-u_1\in\ker A$，并且存在$v_2\in\ker D$，使$Cv_2=u-u_1$．因此

$$u=u_1+Cv_2=Cv_1+e+Cv_2=C(v_1+v_2)+e$$

令$v=v_1+v_2$，即得所证．

例1　均匀各向同性体弹性力学方程组[8]$Au=f$，其中

$$A=\begin{bmatrix} \partial_x^2+k_1\Delta & \partial_{xy}^2 & \partial_{xz}^2 \\ \partial_{xy}^2 & \partial_y^2+k_1\Delta & \partial_{yz}^2 \\ \partial_{xz}^2 & \partial_{yz}^2 & \partial_z^2+k_1\Delta \end{bmatrix}$$

---

*国家自然科学基金资助项目
数学机械化研究中心资助项目

设

$$C=\frac{1}{1+k_1}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+k_1-\frac{x}{2}\partial_x & -\frac{y}{2}\partial_x & -\frac{z}{2}\partial_x & -\frac{1}{2}\partial_x \\ -\frac{x}{2}\partial_y & \frac{1}{2}+k_1-\frac{y}{2}\partial_y & -\frac{z}{2}\partial_y & -\frac{1}{2}\partial_y \\ -\frac{x}{2}\partial_z & -\frac{y}{2}\partial_z & \frac{1}{2}+k_1-\frac{z}{2}\partial_z & -\frac{1}{2}\partial_z \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+k_1-\frac{x}{2}\partial_x & -\frac{y}{2}\partial_x & -\frac{z}{2}\partial_x & -\frac{1}{2}\partial_x \\ -\frac{x}{2}\partial_y & -\frac{1}{2}+k_1-\frac{y}{2}\partial_y & -\frac{z}{2}\partial_y & -\frac{1}{2}\partial_y \\ -\frac{x}{2}\partial_z & -\frac{y}{2}\partial_z & -\frac{1}{2}+k_1-\frac{z}{2}\partial_z & -\frac{1}{2}\partial_z \end{bmatrix}$$

$$D=\mathrm{diag}\{\Delta,\Delta,\Delta,\Delta\},$$

其中$\Delta=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2$. 则$AC=BD$. 因此$u=Cv$, $Dv=0$是齐次方程组$Au=0$的解.

对于非齐次情形，由定理1，先求方程 $Ae+Bg=f$的一组解

$$e=0,\quad g=\left[\frac{f_1}{k_1},\ \frac{f_2}{k_1},\ \frac{f_3}{k_1},\ -\frac{xf_1}{k_1}-\frac{yf_2}{k_1}-\frac{zf_3}{k_1}\right]^T$$

其中，$f=[f_1,f_2,f_3]^T$. 因此非齐次方程$Au=f$的解为$u=C\psi$, $D\psi=g$.
此解正是Boussinesq-Papkovich-Neuber解[1].

下面就线性常系数偏微分方程组给出B,C,D的具体构造. 变系数情形可见[6]～[8]. 在定理 1 的假设下，

$$B=\begin{array}{l} a_{11} \\ \begin{bmatrix} a_{21} & -\delta^{12}_{12} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & -\delta^{1n}_{12} & \cdots & -\delta^{12\cdots n}_{12\cdots n} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & -\delta^{12}_{23} & \cdots & (-1)^k\delta^{12\cdots k-1}_{23\cdots k} & \cdots & (-1)^n\delta^{12\cdots n-1}_{23\cdots n} \\ & -a_{11} & \delta^{12}_{13} & & (-1)^{k+1}\delta^{12\cdots k-1}_{13\cdots k} & \cdots & (-1)^{n+1}\delta^{12\cdots n-1}_{13\cdots n} \\ & & -\delta^{12}_{12} & & \vdots & & \vdots \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & (-1)^{2k-1}\delta^{12\cdots k-1}_{12\cdots k-1} & \cdots & (-1)^{n-k+1}\delta^{12\cdots k-1\ k\cdots n-1}_{12\cdots k-1\ k+1\cdots n} \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & (-1)^{2n-1}\delta^{12\cdots n}_{12\cdots n} \end{bmatrix}$$

$$D=\mathrm{diag}\left\{1,\frac{D_2}{D_1},\ \frac{D_3}{D_2},\ \cdots,\ \frac{D_n}{D_{n-1}}\right\}$$

对于以上符号作如下解释：设 $\Delta^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_m}$表示$A$中第$i_1,i_2,\cdots,i_m$行和第$j_1,j_2,\cdots,j_m$列所构成的行列式. D_k表示$\Delta^{12\cdots k-1\ k}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}i_k}$和 $\Delta^{i_1\cdots i_{k-1}i_k}_{1\cdots k-1\ k}$ 的最大公因式，$\Delta^{12\cdots k-1\ k}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}i_k}=D_k\delta^{12\cdots k-1\ k}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}i_k}$，$\Delta^{i_1i_2\cdots i_{k-1}i_k}_{12\cdots k-1\ k}=D_k\delta^{i_1i_2\cdots i_{k-1}i_k}_{12\cdots k-1\ k}$，其中$i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}$, $i_1,i_2,\cdots,i_{k-1}$是 1 到k中的整数，i_k 可取

$k, k+1, \cdots, n$.

例2 横观各向同性弹性体空间方程组$Au=f$，其中

$$A=\begin{bmatrix} B_{11}\partial_x^2+B_{66}\partial_y^2+B_{44}\partial_z^2 & B_{12}\partial_{xy}^2 & B_{13}\partial_{xz}^2 \\ B_{12}\partial_{xy}^2 & B_{66}\partial_x^2+B_{11}\partial_y^2+B_{44}\partial_z^2 & B_{13}\partial_{yz}^2 \\ B_{13}\partial_{xz}^2 & B_{13}\partial_{yz}^2 & B_{44}(\partial_x^2+\partial_y^2)+B_{33}\partial_z^2 \end{bmatrix}$$

B_{11}，B_{12}，B_{13}，B_{33}，B_{44}，B_{66}部是物理常数，$B_{66}=B_{11}-B_{12}$.

对于齐次情况$Au=0$，[3]中已给出其解$u=Cv$，$Dv=0$，其中

$$C=\begin{bmatrix} -\partial_y & -\partial_{xz}^2 \\ \partial_x & -\partial_{yz}^2 \\ 0 & \frac{B_{11}}{B_{13}}(\partial_x^2+\partial_y^2)+\frac{B_{44}}{B_{13}}\partial_z^2 \end{bmatrix}$$

$$D=\operatorname{diag}\left\{\partial_x^2+\partial_y^2+\frac{1}{s_0^2}\partial_z^2,\ \left(\partial_x^2+\partial_y^2+\frac{1}{s_1^2}\partial_z^2\right)\left(\partial_x^2+\partial_y^2+\frac{1}{s_2^2}\partial_z^2\right)\right\}$$

其中 $\frac{1}{s_0^2}=\frac{B_{44}}{B_{66}}$，$\frac{1}{s_1^2}+\frac{1}{s_2^2}=B_{44}^2+B_{11}B_{33}-\frac{B_{13}^2}{B_{11}B_{44}}$

由$AC=BD$，得

$$B=\begin{bmatrix} -B_{66}\partial_y & 0 \\ B_{66}\partial_x & 0 \\ 0 & B_{66}B_{11}/B_{13} \end{bmatrix}$$

设$e=[e_1,e_2,e_3]^T$，$g=[g_1,g_2,g_3]^T$是方程$Ae+Bg=f$的一组解，则e_i, g_j是下列方程的解：

$$\begin{cases} (B_{66}\partial_x^2+B_{66}\partial_y^2+B_{44}\partial_z^2)e_1=f_1 \\ (B_{66}\partial_x^2+B_{66}\partial_y^2+B_{44}\partial_z^2)e_2=f_2 \\ e_3=-\frac{B_{12}}{B_{13}}\partial_z^{-1}(\partial_x e_1+\partial_y e_2) \\ g_1=0 \\ g_2=\frac{B_{13}}{B_{12}B_{44}B_{11}}\{f_3-[B_{12}B_{44}(\partial_x^2+\partial_y^2)+(B_{33}B_{12}-B_{13}^2)\partial_z^2]e_3\} \end{cases}$$

因此，非齐次线性方程组的一般解为$u=Cv+e$，$Dv=g$. 当$f=0$时，此解正是胡海昌解[9].

二、求解的机械化方法

设F为数域，$F[x_1,\cdots,x_n]$为F上的多元多项式环，简记为$F[x]$；$F[\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_n}]$为$F$上的线性常系数偏微分算子环，简记为$F[D]$.

基于$F[x]$与$F[D]$同构，从而相应的多元多项式矩阵环与线性常系数偏微分算子矩阵环同构. 因此我们给出以下定义：

定义1 设

$$P(D)=\sum a_{i_1\cdots i_n}\partial_{x_1}^{i_1}\partial_{x_2}^{i_2}\cdots\partial_{x_n}^{i_n}=\sum a_\alpha D^\alpha,\quad a_\alpha\in F$$

在同构意义下，$P(D)$对应$F[x]$中元素

$$P(x)=\sum a_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\qquad P(x)\in F[x]$$

称$P(x)$为$P(D)$决定的多元多项式.

定义2　设$P(D)$为线性常系数偏微分算子阵，同构意义下，$P(D)$对应的多元多项式阵为$P(x)$（其元素按定义1对应）。称$P(x)$为$P(D)$决定的多元多项式阵。

引理[10]　对于任意的正整数n,m，$n\geqslant m$，总可构造一$n\times m$数字矩阵$K_{n\times m}$，使得$K_{n\times m}$中的所有$m\times m$阶子式均不为零。

证明　令$K_{n\times m}$的前m行为$e_1,\cdots,e_m$，其中$e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)$，1在第$i$个位置。假设已经构成了$l$行（$l\geqslant m$），即已有$e_1,\cdots,e_m$，$e_{m+1},\cdots,e_l$，其中任意$m$个向量线性无关，现来找第$l+1$个向量$e_{l+1}$。

令$V_{i_1i_2\cdots i_{m-1}}=L(e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_{m-1}})$，即由$e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_{m-1}}$生成的线性空间，则$V_{i_1i_2\cdots i_{m-1}}$是$m$维向量空间$V_m=L(e_1,\cdots,e_m)$的真子空间。因此$\bigcup\limits_{i_1\cdots i_{m-1}}V_{i_1\cdots i_{m-1}}\neq V_m$[11]，其中$i_1,\cdots,i_{m-1}$是$1,2,\cdots,l$中任取的$m-1$个数。取$e_{l+1}\in V_m$，但$e_{l+1}\bar{\in}\bigcup\limits_{i_1i_2\cdots i_{m-1}}V_{i_1i_2\cdots i_{m-1}}$，则$e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_{m-1}}$，$e_{l+1}$线性无关。因此$e_1,e_2,\cdots,e_l$，$e_{l+1}$中任意$m$个向量线性无关。

以上作法都是可构造的，其构造关键在于e_{l+1}的取法。这可参阅[11]。

定理2[10]　设$P(D)$，$Q(D)$分别为$m\times q$，$m\times l$阶矩阵，其元素取自$F[D]$中，设$C(D)=[P(D)\ \ Q(D)]$，$q+l\geqslant m\geqslant 1$，设$C(x)$的所有$m$阶子式的最大公因式为$d(x)$，则有一算法对每个$i(i=1,2,\cdots,n)$可找到$R_i(D)$，$S_i(D)$，满足

$$P(D)R_i(D)+Q(D)S_i(D)=\psi_i(D)d(D)I_m$$

其中$R_i(D)$，$S_i(D)$分别为$F(D)$中$q\times m$，$l\times m$阶线性常系数偏微分算子多项式阵，$\psi_i(D)$是不含∂_{x_i}的线性常系数偏微分算子阵。

证明　对每个$i=1,2,\cdots,n$，算法一样，以下就$i=n$情况证明：

1°　设$\Delta_{i_1\cdots i_m}(x)$为$C(x)$的任一$m$阶子式，则共有$C^m_{q+l}$个。这$C^m_{q+l}$个多项式$\Delta_{i_1\cdots i_m}(x)/d(x)$在$F[x_1,\cdots,x_n]$上互质。则此组多项式在$F(x_1,\cdots,x_{n-1})[x_n]$上也互质[12]。对于$F(x_1,\cdots,x_{n-1})[x_n]$上的一元多项式$\Delta_{i_1\cdots i_m}(x_1,\cdots,x_n)/d(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，用Euclid算法，可求出$\bar{a}_{i_1\cdots i_m}\in F(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})[x_n]$，满足

$$\sum_{i_1\cdots i_m}\bar{a}_{i_1\cdots i_m}\frac{\Delta_{i_1\cdots i_m}(x_1,\cdots,x_n)}{d(x_1,\cdots,x_n)}=1$$

通分整理得

$$\sum_{i_1\cdots i_m}a_{i_1\cdots i_m}\Delta_{i_1\cdots i_m}(x_1,\cdots,x_n)=\psi_n(x)d(x)$$

其中　　$a_{i_1\cdots i_m}\in F[x_1,\cdots,x_n]$，$\psi_n(x)\in F[x_1,\cdots,x_{n-1}]$

2°　由引理，构造数字矩阵$K_{(q+l)\times m}$。

3°　设$\Lambda(\lambda)=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{q+l}\}$，

$$D(x,\lambda)=C(x)\Lambda(\lambda)K_{(q+l)\times m},$$

$D_a(x,\lambda)$为$D(x,\lambda)$的伴随阵，$K\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_m\\1\ 2\cdots m\end{pmatrix}$是$K_{(q+l)\times m}$中的第$i_1,i_2,\cdots,i_m$行所成的$m$阶子式。由此得[10]

$$\Delta(x,\lambda)=\det D(x,\lambda)=\sum_{i}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_m}\Delta_{i_1\cdots i_m}(x)K\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_m\\1\ 2\cdots m\end{pmatrix}$$

$$\Delta_{i_1\cdots i_m}(x)K\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_m\\1\ 2\cdots m\end{pmatrix}=\frac{\partial^m\Delta(x,\lambda)}{\partial\lambda_{i_1}\partial\lambda_{i_2}\cdots\partial\lambda_{i_m}}\bigg|_{\lambda=0}$$

$$\Delta(x,\lambda)I_m=D(x,\lambda)D_a(x,\lambda)=C(x)\Lambda(\lambda)K_{q+l\times m}D_a(x,\lambda)$$

将上式两边对λ求偏导，得

$$\left.\frac{\partial^m(\Delta(x,\lambda))I_m}{\partial\lambda_{i_1},\partial\lambda_{i_2}\cdots\partial\lambda_{i_m}}\right|_{\lambda=0}=C(x)\left.\frac{\partial^m(\Lambda(\lambda)K_{q+l\times m}D_a(x,\lambda))}{\partial\lambda_{i_1}\partial\lambda_{i_2}\cdots\partial\lambda_{i_m}}\right|_{\lambda=0}$$

令 $$Z_{i_1\cdots i_m}(x)=\frac{1}{K\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_m\\1\ 2\cdots m\end{pmatrix}}\left.\frac{\partial^m(\Lambda(\lambda)K_{q+l\times m}D_a(x,\lambda))}{\partial\lambda_{i_1}\partial\lambda_{i_2}\cdots\partial\lambda_{i_m}}\right|_{\lambda=0}$$

则 $$\Delta_{i_1\cdots i_m}(x)I_m=C(x)Z_{i_1\cdots i_m}(x)$$

令 $$Z(x)=\sum_i a_{i_1\cdots i_m}(x)Z_{i_1\cdots i_m}(x)=\begin{bmatrix}R_n(x)\\S_n(x)\end{bmatrix}$$

其中$R_n(x)$是$q\times m$矩阵，$S_n(x)$是$l\times m$矩阵．则有

$$C(x)\ Z(x)=\sum_i a_{i_1\cdots i_m}(x)C(x)Z_{i_1\cdots i_m}(x)$$

$$=\sum_i a_{i_1\cdots i_m}(x)\Delta_{i_1\cdots i_m}(x)I_m=\psi_n(x)d(x)I_m$$

即有 $$P(x)R_n(x)+Q(x)S_n(x)=\psi_n(x)d(x)I_m$$
$$P(D)R_n(D)+Q(D)S_n(D)=\psi_n(D)d(D)I_m$$

其中$\psi_n(D)$中不含∂_{x_n}．

例 设

$$A=\text{grad}=\begin{bmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{bmatrix},\quad B=\text{rot}=\begin{bmatrix}0&\partial_z&-\partial_y\\-\partial_z&0&\partial_x\\\partial_y&-\partial_x&0\end{bmatrix}$$

为方便计，用x,y,z分别代替$\partial_x,\partial_y,\partial_z$．

1° 设$C=[A\ B]$，则C中所有3阶子式的最高公因式为$d(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$．

$$z\Delta_{123}=z^2d(x,y,z),\quad -y\Delta_{124}=y^2d(x,y,z),\quad x\Delta_{134}=x^2d(x,y,z)$$

2° 取

$$K=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

则其所有3阶子式皆不为零．

3° 设$\Lambda(\lambda)=\text{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\}$

$$D(x,y,z,\lambda)=C\Lambda(\lambda)K$$

$D_a(x,y,z,\lambda)$为$D(x,y,z,\lambda)$的伴随阵，令

$$Z_{123}=\frac{1}{K\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}}\left.\frac{\partial^3(\Lambda(\lambda)KD)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2\partial\lambda_3}\right|_{\lambda=0}=\begin{bmatrix}xz&yz&z^2\\xy&-(x^2+z^2)&yz\\y^2+z^2&-xy&-xz\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$Z_{124}=\begin{bmatrix}-xy & -y^2 & -yz\\ xz & yz & -(y^2+x^2)\\ 0 & 0 & 0\\ y^2+z^2 & -xy & -xz\end{bmatrix},\quad Z_{134}=\begin{bmatrix}x^2 & xy & xz\\ 0 & 0 & 0\\ xz & yz & -(x^2+y^2)\\ -xy & (x^2+z^2) & -yz\end{bmatrix}$$

$$Z_1=zZ_{123}=\begin{bmatrix}xz^2 & yz^2 & z^3\\ xyz & -z(x^2+z^2) & yz^2\\ z(y^2+z^2) & -xyz & -xz^2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

取

$$X_1=[xz^2 \quad yz^2 \quad z^3],\quad Y_1=\begin{bmatrix}xyz & -z(x^2+z^2) & yz^2\\ z(y^2+z^2) & -xyz & -xz^2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

则有 $\quad AX_1+BY_1=z^2\Delta I \qquad (2.1)$

同理，取

$$X_2=[xy^2 \quad y^3 \quad y^2z],\quad Y_2=\begin{pmatrix}-xyz & -y^2z & y(y^2+x^2)\\ 0 & 0 & 0\\ -y^3-yz^2 & xy^2 & xyz\end{pmatrix}$$

则有 $\quad AX_2+BY_2=y^2\Delta I \qquad (2.2)$

取 $\quad X_3=[x^3 \quad x^2y \quad x^2z],\quad Y_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ x^2z & xyz & -x(x^2+y^2)\\ -x^2y & x(x^2+z^2) & -xyz\end{pmatrix}$

则有 $\quad AX_3+BY_3=x^2\Delta I \qquad (2.3)$

将(2.1)，(2.2)，(2.3)相加，得

$$A(X_1+X_2+X_3)+B(Y_1+Y_2+Y_3)=\Delta^2 I$$

令 $\quad X=X_1+X_2+X_3,\ Y=Y_1+Y_2+Y_3$

则有 $\quad AX+BY=\Delta^2 I$

用原符号∂_x，∂_y，∂_z表示，则上式为

$$\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}[\partial_x \quad \partial_y \quad \partial_z]\Delta+\begin{pmatrix}0 & \partial_z & -\partial_y\\ -\partial_z & 0 & \partial_x\\ \partial_y & -\partial_x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\partial_z & \partial_y\\ \partial_z & 0 & -\partial_x\\ -\partial_y & \partial_x & 0\end{pmatrix}\Delta=\Delta^2 I$$

即 $\quad \mathrm{grad}\cdot\mathrm{div}\Delta-\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\Delta=\Delta^2 I,$

由于Δ是满射，故有

$$\mathrm{grad}\cdot\mathrm{div}-\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}=\Delta I$$

这正是著名的Helmholtz分解[1]。

定理3 设A，B分别为$m\times q$，$m\times l$阶矩阵，其元素取自$F[D]$中，且有$AM+BN=R$，M，N，R皆为偏微分算子阵，则方程$Ae+Bg=f$的一类解为$e=M\psi$，$g=N\psi$，$R\psi=f$。

由定理2及定理3，我们可得方程$Ae+Bg=f$的一个机械化解法：（A为$m\times q$阵，B为$m\times l$阵，$q+l\geqslant m$）

1° 对A,B，由定理2，有一算法可找到偏微分算子阵M,N，使$AM+BN=\psi_i(D)d(D)I_m$其中$\psi_i(D)$是一不含∂_{x_i}的线性偏微分算子，$d(x)$为$C=(A,B)$的m阶子式的最大公因式。

2° 解方程组

$$\psi_i(D)v=f,\quad d(D)\varphi=v$$

其中 v,φ为$m\times l$矩阵。

3° 由定理3，$Ae+Bg=f$的一类解为

$$e=M\varphi,\quad g=N\varphi$$

其中φ是2°中方程组之解。

在2°中，$\psi_i(D)$中不含∂_{x_l}，$d(D)$是$C=[A\ \ B]$中所有m阶子式的最大公因式，其次数在一般情况下是较低的，且这两个方程实质上已转化为单个方程。因此比原方程容易解。

例 平面弹性动力方程组中，

$$A=\begin{bmatrix}(\lambda+2\mu)\partial_x^2+\mu\partial_y^2 & (\lambda+\mu)\partial_{xy}^2\\ (\lambda+\mu)\partial_{xy}^2 & \mu\partial_x^2+(\lambda+2\mu)\partial_y^2-\rho\partial_t^2\end{bmatrix}$$

其中ρ,λ,μ是常数。

齐次方程[3] $Au=0$的解为

$$u=\begin{bmatrix}(\lambda+\mu)\partial_{xy}^2\\ \rho\partial_t^2-(\lambda+2\mu)\partial_x^2-\mu\partial_y^2\end{bmatrix}[\varphi]$$

其中φ满足$(\mu\Delta-\rho\partial_t^2)[(\lambda+2\mu)\Delta-\rho\partial_t^2]\varphi=0$。因此在此例中，

$$C=\begin{bmatrix}(\lambda+\mu)\partial_{xy}^2\\ \rho\partial_t^2-(\lambda+2\mu)\partial_x^2-\mu\partial_y^2\end{bmatrix},\quad D=(\mu\Delta-\rho\partial_t^2)[(\lambda+2\mu)\Delta-\rho\partial_t^2],\quad B=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$$

设$Q(D)=[A\ \ B]$，则$Q(D)$中所有2阶子式互素。有$0\cdot\Delta_{12}-1\cdot\Delta_{23}+0\cdot\Delta_{13}=(\lambda+\mu)\partial_{xy}^2$，此式右端不含$\partial_t$。取

$$K=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

则其任意二阶子式都不等于零。设

$$\Lambda(\lambda)=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\},\quad D(x,y,\lambda)=Q(D)\Lambda(\lambda)K$$

$D_a(x,y,\lambda)$为$D(x,y,\lambda)$的伴随阵，令

$$Z_{23}=\frac{1}{K\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}}\left.\frac{\partial^2(\Lambda(\lambda)KD_a(x,y,\lambda))}{\partial\lambda_2\partial\lambda_3}\right|_{\lambda=0}$$

$$=(-1)\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\ \mu\partial_x^2+(\lambda+2\mu)\partial_y^2-\rho\partial_t^2 & -(\lambda+\mu)\partial_{xy}^2\end{pmatrix}$$

$$Z=-Z_{23}=\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad Y=[\mu\partial_x^2+(\lambda+2\mu)\partial_y^2-\rho\partial_t^2,\ -(\lambda+\mu)\partial_{xy}^2]$$

则有$AX+BY=(\lambda+\mu)\partial_{xy}^2I_2$。因此$Ae+Bg=f$的一组解为

$$e=X\varphi=\begin{bmatrix}0\\ \varphi_1\end{bmatrix},\quad g=Y\varphi=[\mu\partial_x^2+(\lambda+2\mu)\partial_y^2-\rho\partial_t^2]\varphi_1-(\lambda+\mu)\partial_{xy}^2\varphi_2$$

其中 $$\varphi=\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}$$

是方程 $(\lambda+\mu)\partial^2_{xy}I_2\varphi=f$ 的解。因此平面弹性动力非齐次方程组的解为 $u=Cv+e$，$Dv=g$。

参 考 文 献

[1] Gurtin, M. E., The linear theory of elasiticity, *Handuck Der Physik Encyclopedia of Physics*, Band Vla/2, Springer-Verlag, Berlin (1972).

[2] 王敏中，弹性力学通解和应力函数研究概况，力学进展，19(1) (1989), 65—72.

[3] 张鸿庆，弹性力学方程组一般解的统一理论，大连工学院学报，3 (1978), 23—47.

[4] 张鸿庆，线性算子方程组一般解的代数结构，力学学报特刊 (1981), 152—161.

[5] Zhang Hong-qing and Feng Hong, Mechanical method for algebraic structure of the general solution to the system of linear operator equations, *Proceedings of the* 1992 *International Workshop Mathematics Mechanization*, International Academic, Beijing (1992), 276—280.

[6] Zhang Hong-qing and Wu Fang-xiang, Mechanical method to construct the general solution for a system of partial equation, *Proceedings of the* 1992 *International Workhop Mathematics Mechanization*, International Academic, Beijing (1992), 280—285.

[7] 吴文俊，《几何定理机器证明的基本原理》(初等几何部分)，科学出版社 (1984).

[8] 张鸿庆、杨光，变系数偏微分方程组一般解的构造，应用数学和力学，12(2) (1991), 135—139.

[9] 胡海昌，横观各向同性体的弹性力学的空间问题，物理学报，9(2) (1953).

[10] Youla, Dante. C., Notes on *n*-dimensional system, *Theory IEEE Transactions Circuits and Systems*, Cas-31(6) (1984), 105—111.

[11] 北京大学，《高等代数》，高等教育出版社 (1988).

[12] Jacobson, Nathan, *Basic Algebra*, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1974).

The Mechanical Method of Constructing the Displacement Functions in Elasticity

Zhang Hong-qing Feng Hong

(*Institute of Mathematical Science, Dalian Univ. of Tech., Dalian*, 116023)

Abstract

In this paper, we have proven the general solution to the equations of linear operators $Au=f$ as $u=Cv+e$, where v satisfies the equation $Dv=g$ and D is a diagonal matrix. Basing on the constructive proof of Hilbert Nullstellensatz, we have given the mechanical method of constructing C, D and e, and some of the mechanical algorithm displacement functions in elasticity are given by this method also.

Key words elasticity, displacement function, mechanical algorithm, Hilbert nullstellensatz