应用数学和力学，第16卷 第4期（1995年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

拓扑有限交性质及极大极小定理*

张石生　　张　宪

（四川大学数学系 成都 610064）　（安徽师范大学数学系 芜湖 241000）

（1994年月7日11收到）

摘　要

本文研究了更一般的拓扑有限交的性质．作为应用，利用本文结果给出了更一般的极大极小定理．本文结果推广了[5，6，9]中的主要结果．

关键词　有限交性质　极大极小定理　连通集

集合族的有限交性质在研究变分不等式，极大极小问题中起着重要作用．1929年，Knaster，Kuratowski及Mazurkiewicz[10]首先在有限维空间中证明了有限交定理（后称为KKM定理）．1961年，Ky Fan[7]把这一定理推广到无限维 Hausdorff 拓扑向量空间（后称为 FKKM 定理）．近年来 Bardaro 与 Ceppitelli[1,2]，Chang 等人[3~6]，Horvath[8]，Kindler[9]，Park[11]以及 Shih 和 Tan[12]在不具线性结构的拓扑空间中研究了有限交定理．本文目的是给出更一般的不具线性结构的拓扑有限交定理．作为应用，我们用本文结果来研究极大极小问题．本文结果推广了[5，6，9]中主要结果．

一、拓扑型有限交定理

定理1　设X是一非空集，Y是一拓扑空间，映象$F: X\to 2^Y$满足条件：

(i)　对任一$x\in X$，$F(x)\neq\phi$；

(ii)　$\forall x_1$，$x_2\in X$，存在连通的拓扑空间Z及映象$G: Z\to 2^Y$，使得

(a)　$G(Z)=F(x_1)\cup F(x_2)$；

(b)　对任一$z\in Z$，存在$x\in X$，使得$F(x)\subset G(z)$；

(c)　$\forall z\in Z$及对任意的有限集$A\subset X$，$(\bigcap_{x\in A}F(x))\cap G(z)$是连通的．

如果再设下列之一条件满足：

(d1)　F取闭值，G是上半连续的；

(d2)　F取开值，G是下半连续的；

(d3)　F取闭值且$\forall y\in Y$，$G^{-1}(y)$为Z中的开集；

(d4)　Y是紧的，F取闭值且graph(G)是闭的．

* 国家自然科学基金资助项目

则$\{F(x):x\in X\}$具有限交性质．特别，当满足条件(d4)时$\bigcap_{x\in X}F(x)\neq\phi$．

证　用归纳法证明．当$n=1$时，由(i)，$\forall x\in X$，$F(x)\neq\phi$．设当$n\geqslant1$及对任意的$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}\in X$，$\bigcap_{i=1}^{n}F(x_i)\neq\phi$，下证这一结论对$n+1$也成立．设相反，存在$x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}\in X$，使得$\bigcap_{i=1}^{n+1}F(x_i)=\phi$，令$H=\bigcap_{i=3}^{n+1}F(x_i)$（当$n+1=2$时，令$H=Y$），则有

$$H\cap F(x_1)\neq\phi,\quad H\cap F(x_2)\neq\phi$$

但

$$(H\cap F(x_1))\cap(H\cap F(x_2))=\phi \tag{1.1}$$

对上面的x_1，x_2，由(ii)，存在连通的拓扑空间Z及映象$G:Z\to2^Y$满足条件(a)～(c)及某一条件(di)，$i=1, \cdots, 4$．由(a)知

$$H\cap G(Z)=(H\cap F(x_1))\cup(H\cap F(x_2)) \tag{1.2}$$

由(b)，$\forall z\in Z$，存在$x\in X$，使得$F(x)\subset G(z)$．另由归纳法假设$H\cap F(x)\neq\phi$，从而由(c)知，$H\cap G(z)$是非空连通集，且

$$H\cap G(z)\subset(H\cap F(x_1))\cup(H\cap F(x_2)) \tag{1.3}$$

因F取闭（或开）值，$H\cap F(x_1)$，$H\cap F(x_2)$为不交的闭（或开）集，$(H\cap F(x_1)\cap H\cap F(x_2)=\phi)$，故

$$H\cap G(z)\subset H\cap F(x_1)\text{或}H\cap G(z)\subset H\cap F(x_2)$$

又对$y\in H\cap F(x_1)$，由(1.2)，存在$z\in Z$，使得$y\in H\cap G(z)$．由$H\cap G(z)$的连通性，必有$H\cap G(z)\subset H\cap F(x_1)$．

同理存在$z\in Z$，使得$H\cap G(z)\subset H\cap F(x_2)$．令

$$E_1=\{z\in Z:H\cap G(z)\subset H\cap F(x_1)\}$$

$$E_2=\{z\in Z:H\cap G(z)\subset H\cap F(x_2)\}$$

则E_1，E_2均非空，$E_1\cap E_2=\phi$，$E_1\cup E_2=Z$．

当(d1)成立时，对$z_0\in E_1$，有$G(z_0)\cap(H\cap F(x_2))=\phi$．由$H\cap F(x_2)$闭及$G$上半连续，存在$z_0$的开邻域$V\subset Z$，使

$$G(z)\cap(H\cap F(x_2))=\phi,\qquad \forall z\in V$$

故$H\cap G(z)\subset H\cap F(x_1)$，$\forall z\in V$，因而$V\subset E_1$，故$E_1$是$Z$的开集．

同理可证E_2是Z中的开集．这与Z的连通性矛盾．

当(d2)成立时，设$\{z_\alpha\}$是E_1中的收敛网，$z_\alpha\to z_0$，则对任一α，$G(z_\alpha)\subset Y\setminus(H\cap F(x_2))$．因$H\cap F(x_2)$开且$G$为下半连续，故必有$G(z_0)\subset Y\setminus(H\cap F(x_2))$，因而$z_0\in E_1$．从而得证$E_1$是$Z$中的闭集．同理可证$E_2$也是$Z$中的闭集．这又与$Z$的连通性矛盾．

当(d3)成立时，设$\{z_\alpha\}$是E中的收敛网，$z_\alpha\to z_0$，则$Gz_\alpha\cap(H\cap F(x_2))=\phi$，$\forall\alpha$．故$z_\alpha\notin G^{-1}(H\cap F(x_2))$．由假设$G^{-1}(y)$是开的，$\forall y\in Y$．故$G^{-1}(H\cap F(x_2))$是开的，从而$z_0\notin G^{-1}(H\cap F(x_2))$．因而$Gz_0\cap(H\cap F(x_2))=\phi$，即$z_0\in E_1$．故$E_1$是$Z$中的闭集．同理可证$E_2$也是$Z$中的闭集．这与$Z$的连通性相矛盾．

当(d4)成立时，设$\{z_\alpha\}$是E中的收敛网，$z_\alpha\to z_0$．取$y_\alpha\in H\cap G(z_\alpha)\subset H\cap F(x_1)$，$\forall\alpha$．因$Y$是紧的，故存在子网$\{y_\beta\}\subset\{y_\alpha\}$，使得$y_\beta\to y_0$．则$y_0\in H\cap F(x_1)$．因graph$(G)$是闭的，故$y_0\in G(z_0)$，于是有$H\cap G(z_0)\subset H\cap F(x_1)$．因而$z_0\in E_1$．此即$E_1$是闭的．同理可证$E_2$是闭的．这又与$Z$的连通性矛盾．

上述矛盾表明$\{F(x):x\in X\}$有有限交性质．证毕．

注1　定理1中的条件(a)可代之以条件(a)′：

(a)′　$G(Z)\subset F(x_1)\cup F(x_2)$，且$\exists z_1$，$z_2\in Z$，使得$G(z_1)\subset F(x_1)$，$G(z_2)\subset F(x_2)$．

由定理1可得下面的推论

推论1　设X，Y是拓扑空间，设$F:X\to 2^Y$满足条件：

(i)　对任一$x\in X$，$F(x)\neq\phi$；

(ii)　对任意的x_1，$x_2\in X$，存在X的连通子集C，使

$$F(C)=F(x_1)\cup F(x_2);$$

(iii)　对任意的有限集$A\subset X$，$\bigcap_{x\in A}F(x)$连通．

如果下列之一条件满足：

(iva)　F取闭值，且为上半连续的；

(ivb)　F取开值，且下半连续；

(ivc)　F取闭值且$\forall y\in Y$，$F^{-1}(y)$是开的，

则$\{F(x):x\in X\}$具有限交性质．

注2　推论1中的条件(ii)可代之以下面的条件(ii)′：

(ii)′　$\forall x_1$，$x_2\in X$，$\{x\in X:F(x)\subset F(x_1)\cup F(x_2)\}$是连通的；

另外推论1也推广了Chang-Wu[5，定理1]及Kindler[9]中的定理1～2的充分性部分及推论1～2．

为了下面的讨论我们先给出如下的定义．

定义1　设$\{\forall A_\alpha:\alpha\in I\}$,$\{B_\alpha:\alpha\in J\}$是两个非空集合族，其中$I$，$J$是二指标集．若对任意的有限集$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\subset I$，存在$\beta_0\in J$，使得$A_{\alpha_i}\cap B_{\beta_0}\neq\phi$，$i=1,\cdots,n$．则称$\{A_\alpha:\alpha\in I\}$关于$\{B_\beta:\beta\in J\}$具有限交性质．特别当存在$\beta\in J$，使得$A_\alpha\cap B_\beta\neq\phi$，$\forall\alpha\in I$，则称$\{A_\alpha:\alpha\in I\}$关于$\{B_\beta:\beta\in J\}$具非空交性质．

显然当每一B_β都是单元集时，由上述定义即可得到通常意义下的有限交性质和非空交性质．

定理2　设X，Y，Z是拓扑空间，设映象$F:X\to 2^Y$，$S:Z\to 2^Y$满足条件：

(i)　$\forall x\in X$，$F(x)\cap S(Z)\neq\phi$；

(ii)　$\forall x_1$，$x_2\in X$，存在X的连通子集C，使得

$$S(Z)\cap F(C)=S(Z)\cap(F(x_1)\cup F(x_2));$$

(iii)　对任意的有限集$A\subset X$，$\bigcap_{x\in A}S^{-1}(F(x))$连通；如果下列之一条件成立：

(iva)　F是取闭值的上半连续映象；S是上半连续的闭映象；

(ivb)　F是取开值的下半连续映象；S是下半连续的开映象；

(ivc)　F取闭值且$\forall y\in Y$，$F^{-1}(y)$是开的；S上半连续．则集合族$\{F(x):x\in X\}$关于$\{S(z):z\in Z\}$具有限交性质．特别当Z是紧的且条件(iva)或(ivc)成立时，则$\{F(x):x\in X\}$关于$\{S(z):z\in Z\}$有非空交性质．

证　定义映象$S^{-1}\circ F:X\to 2^Z$．下证$S^{-1}F$满足推论1中的条件．

事实上，由(i)知，$\forall x\in X$，$(S^{-1}\circ F)(x)\neq\phi$；

由(ii)，$\forall x_1$，$x_2\in X$，存在X的连通子集C，使得

$$S(Z)\cap F(C)=S(Z)\cap(F(x_1)\cap F(x_2))\tag{1.4}$$

下证　$$(S^{-1}\circ F)(C)=(S^{-1}\circ F)(x_1)\cup(S^{-1}\circ F)(x_2)$$

事实上，因$z\in(S^{-1}\circ F)(C)\Leftrightarrow\exists\, x\in C$，使得$S(z)\cap F(x)\neq\phi\Leftrightarrow$存在$y\in S(z)$，使得$y\in S(z)\cap F(C)\Leftrightarrow\exists\, y\in S(z)$，使得$y\in S(Z)\cap(F(x_1)\cup F(x_2))\Leftrightarrow\exists\, i=1, 2$，使$S(z)\cap F(x_i)\neq\phi\Leftrightarrow z\in(S^{-1}\circ F)(x_1)\cup(S^{-1}\circ F)(x_2)$。因而结论得证。

由(iii)，对任一有限集$A\subset X$，$\bigcap\limits_{x\in A}(S^{-1}\circ F)(x)$是连通的。

又当条件(iva)成立时，$\forall x\in X$，由$F(x)$闭及S的上半连续性知$(S^{-1}\circ F)(x)$是闭的。又对Z中的任意闭子集B，不难证明$(S^{-1}\circ F)^{-1}(B)=F^{-1}(S(B))$。从而由$S$是闭映象及$F$的上半连续性知$(S^{-1}\circ F)^{-1}(B)$是闭的。因而$S^{-1}\circ F$是上半连续的。

当条件(ivb)成立时，因F取开值且S下半连续，故$(S^{-1}\circ F)(x)$是开的，$\forall x\in X$。又对Z中的任意开集B，因S是开映象及F下半连续，故$(S^{-1}\circ F)^{-1}(B)=F^{-1}(S(B))$是开的，从而$S^{-1}\circ F$是下半连续的。

当条件(ivc)成立时，因F取闭值且S上半连续，故$\forall x\in X$，$(S^{-1}\circ F)(x)$是闭的。又对任一$z\in Z$，$(S^{-1}\circ F)^{-1}(z)=F^{-1}(S(z))=\bigcup\limits_{y\in S(z)}F^{-1}(y)$是开的。

故知推论1的条件被满足。由推论1，集合族$\{(S^{-1}\circ F)(x): x\in X\}$具有限交性质。从而对任意的有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset X$，$\bigcap\limits_{i=1}^{n}S^{-1}(F(x_i))\neq\phi$。取

$$z_*\in\bigcap_{i=1}^{n}S^{-1}(F(x_i))$$

故 $S(z_*)\cap F(x_i)\neq\phi$，$i=1, \cdots, n$，即$\{F(x): x\in X\}$关于$\{S(z): z\in Z\}$具有限交性质。

又当Z是紧的且(iva)或(ivc)成立时，则有$\bigcap\limits_{x\in X}S^{-1}(F(x))\neq\phi$，故存在$z\in Z$使得$S(z)\cap F(x)\neq\phi$，$\forall x\in X$，即$\{F(x): x\in X\}$关于$\{S(z): z\in Z\}$有非空交性质。

二、拓扑型极大极小定理

作为推论1的应用，在本节中我们研究拓扑空间中的极大极小定理。

定理3 设X是一拓扑空间，Y是一紧拓扑空间，映象$f: X\times Y\to[-\infty, +\infty]$满足条件：

(i) $x\mapsto f(x, y)$，$y\mapsto f(x, y)$均是下半连续的；

(ii) 对Y的任一闭子集B，及$\forall r\in(-\infty, \infty)$集$\bigcup\limits_{y\in B}\{x\in X: f(x, y)\leqslant r\}$是闭的；

(iii) 对任一有限集$A\subset X$及$\forall r\in(-\infty, +\infty)$，集$\{y\in Y: f(x, y)\leqslant r, \forall x\in A\}$是连通的；

(iv) 对任意的$x_1, x_2\in X$，存在X的紧的连通子集C，使得

$$\inf_{x\in C}f(x, y)=\min\{f(x_i, y), i=1, 2\}, \qquad \forall y\in Y$$

则存在$y_0\in Y$，使得

$$\sup_{x\in X}f(x, y_0)=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x, y)$$

证 记

$$\alpha=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x, y),\quad \beta=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}(x, y)$$

设$\alpha<\beta$，取$r\in R$，使$\alpha<r<\beta$．定义映象$F:X\to 2^Y$：

$$F(x)=\{y\in Y: f(x, y)\leqslant r\}, \qquad x\in X$$

下证F满足推论 1 的条件(i)～(iv)．

由r的取法，对一切$x\in X$，$F(x)\neq\phi$．又对任意的x_1，$x_2\in X$，由(iv)存在X的紧的连通子集C，使得

$$\inf_{x\in C} f(x, y)=\min\{f(x_i, y), i=1, 2\}, \qquad \forall y\in Y \tag{2.1}$$

下证$F(C)=F(x_1)\cup F(x_2)$．事实上，对任一$y\in F(C)$，$\exists x\in C$，使得$y\in F(x)$，即$f(x, y)\leqslant r$．由(2.1)，$f(x_1, y)\leqslant r$或$f(x_2, y)\leqslant r$．因而$y\in F(x_1)\cup F(x_2)$．反之，若$y\in F(x_1)\cup F(x_2)$，故有$\min\{f(x_1, y), f(x_2, y)\}\leqslant r$，从而由(2.1)知$\inf\limits_{x\in C} f(x, y)\leqslant r$．由条件(i)，$x\mapsto f(x, y)$下半连续，故存在$x_0\in C$，使得$f(x_0, y)=\inf\limits_{x\in C} f(x, y)\leqslant r$．因而$y\in F(x_0)\subset F(C)$．故结论得证．

因$y\mapsto f(x,y)$下半连续，故对任一$x\in X$，$F(x)$是闭的；又对任意的有限集$A\subset X$，$\bigcap\limits_{x\in A} F(x)=\{y\in Y: f(x, y)\leqslant r, \forall x\in A\}$是连通的．另由条件(ii)，对$Y$中任意的闭子集$B$，$F^{-1}(B)=\bigcup\limits_{y\in B}\{x\in X: f(x, y)\leqslant r\}$是闭的，从而$F$是上半连续的．

综上所述，F满足推论 1 中的条件(i)～(iv)．因Y紧，故由推论 1 知$\bigcap\limits_{x\in X} F(x)\neq\phi$．故存在$y_*\in Y$，使得$f(x, y_*)\leqslant r$，$\forall x\in X$．因而有

$$\beta=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x, y)\leqslant r<\beta$$

矛盾．由此矛盾得知

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x, y)\geqslant\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x, y)$$

另外显然有

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x, y)\leqslant\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x, y)$$

故得证

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x, y)=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x, y)$$

由假设$y\mapsto f(x, y)$下半连续，故$\sup\limits_{x\in X} f(x, y)$对$y$下半连续，故存在$y_0\in Y$，使得

$$\sup_{x\in X} f(x, y_0)=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x, y)$$

证毕．

定理4 在定理 3 中，如果代条件(i)，(ii)以"$f(x, y)$在$X\times Y$上为上半连续"而其它条件不变．则定理 3 的结论仍成立．

证 在此条件下，易知定理 3 的证明中所定义的映象F，其图象graph(F)是闭的，从而F是上半连续的，其余的证明同定理3．证毕．

定理5 设X是一拓扑空间，Y是一紧拓扑空间，映象f，$g: X\times Y\to[-\infty, +\infty]$满足条件

(i) $g(x, y)\leqslant f(x, y)$，$\forall (x, y)\in X\times Y$；

(ii) $y\mapsto f(x, y)$上半连续，$y\mapsto g(x, y)$下半连续；

(iii) 对Y的任一开子集B及任一$r\in(-\infty, +\infty)$，

$$\bigcup_{y\in B}\{x\in X: f(x, y)<r\}$$

是开的；

(iv) 对任意的有限集 $A\subset X$ 及对任意的 $r\in R$，集$\{y\in Y: f(x, y)<r, \ \forall x\in A\}$是连通的；

(v) 对任意的x_1，$x_2\in X$，存在X的连通子集C，使

$$\inf_{x\in C} f(x, y)=\min\{f(x_i, y), \ i=1, \ 2\}, \qquad \forall y\in Y$$

则
$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x, y)\geqslant\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} g(x, y)$$

证 记

$$\alpha=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x, y), \ \beta=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} g(x, y)$$

如果$\alpha<\beta$，取$r\in R$，使得$\alpha<r<\beta$. 定义映象$F: X\to 2^Y$,

$$F(x)=\{y\in Y: f(x, y)<r\}$$

及映象$G: X\to 2^Y$:

$$G(x)=\{y\in Y: g(x, y)\leqslant r\}, \qquad x\in X$$

则$F(x)\subset G(x)$，$\forall x\in X$. 仿定理 3 可证F满足推论 1 的条件(i)，(ii)，(iii)，(ivb). 故由推论1，$\{F(x): x\in X\}$具有限交性质，从而$\{G(x): x\in X\}$有有限交性质. 因$y\mapsto g(x, y)$下半连续，故$G(x)$，$\forall x\in X$为闭集. 因Y紧，从而，$\bigcap_{x\in X} G(x)\neq\phi$. 令$y_0\in\bigcap_{x\in X} G(x)$，则$g(x, y_0)\leqslant r$，$\forall x\in X$. 于是有

$$\beta=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} g(x, y)\leqslant r<\beta$$

矛盾. 从而结论得证.

定理6 在定理 5 中，如果代条件(iii)以下面的条件(iii)′: $x\mapsto f(x, y)$是上半连续. 则定理 5 的结论仍成立.

证 在条件(iii)′下，对任一$r\in R$及任一$y\in Y$，集$\{x\in X: f(x, y)<r\}$是开的. 故定理5中的条件(iii)成立.

定理7 设X，Y是拓扑空间，f，$g: X\times Y\to[-\infty, +\infty]$满足条件:

(i) $y\mapsto f(x, y)$上半连续；$y\mapsto g(x, y)$下半连续；$x\mapsto f(x, y)$上半连续；

(ii) $g(x, y)\leqslant f(x, y)$，$\forall(x, y)\in X\times Y$；

(iii) 对任意的x_1，$x_2\in X$，存在连通子集$C\subset X$，使得

$$\inf_{x\in C} f(x, y)=\min\{f(x_i, y), \ i=1, \ 2\}, \ \forall y\in Y;$$

(iv) 存在非空集$K\subset Y$及紧集$H\subset X$，使得

(a) $\sup_{x\in X\setminus H}\inf_{y\in K} f(x, y)\leqslant\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x, y)$；

(b) 对Y的任一有限子集F，存在紧子集$K_F\subset Y$，$F\cup K\subset K_F$，使得对任意的有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset X$及任意的$r\in R$，$\{y\in K_F: f(x_i, y)<r, \ i=1, \cdots, n\}$是连通的.

则
$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x, y)\geqslant\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} g(x, y)$$

证 记

$$\alpha=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x, y), \ \beta=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} g(x, y)$$

如果$\alpha<\beta$，取$r\in R$，$\alpha<r<\beta$. 令

$$L(y)=\{x\in X: f(x, y)\geqslant r\}, \qquad y\in Y$$

由条件(i)，对任一$y\in Y$，$L(y)$是闭的．令$L=\bigcap_{y\in K}L(y)$．下证$\{L\cap L(y):y\in Y\}$具有限交 性质．事实上，对任一有限集$F\subset Y$，由(b)知，存在紧集$K_F\subset Y$，使得$F\cup K\subset K_F$．下证$\bigcap_{y\in K_F}L(y)\neq\phi$，（从而$\bigcap_{y\in F}(L\cap L(y))\neq\phi$）．设相反$\bigcap_{y\in K_F}L(y)=\phi$．则$\forall x\in X$，存在$y_x\in K_F$，使$x\notin L(y_x)$，即$f(x,y_x)<r$．由此得知

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in K_F}f(x,y)\leqslant r$$

但是，在X，K_F上应用定理6，又有

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in K_F}f(x,y)\geqslant\inf_{y\in K_F}\sup_{x\in X}g(x,y)$$
$$\geqslant\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}g(x,y)=\beta>r$$

这是一个矛盾．从而得证$\{L\cap L(y):y\in Y\}$具有限交性质．

另由条件(a)，对任一$x\in X\setminus H$，有

$$\inf_{y\in K}f(x,y)\leqslant\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y)=\alpha<r$$

故存在$y\in K$，使得$f(x,y)<r$．故$x\notin L(y)$，因而$x\notin\bigcap_{y\in K}L(y)$．于是有$\bigcap_{y\in K}L(y)\subset H$．因$H$紧，故$L$是紧集，从而$L\cap L(y)$也是紧的．因此$\bigcap_{y\in Y}(L\cap L(y))\neq\phi$．这表明$\bigcap_{y\in Y}L(y)\neq\phi$．取$x_0\in\bigcap_{y\in Y}L(y)$，即$f(x_0,y)\geqslant r$，$\forall y\in Y$．故有

$$\alpha=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y)\geqslant r>\alpha$$

矛盾．由此矛盾知$\alpha\geqslant\beta$．定理的结论得证．

参 考 文 献

[1] Bardaro, C. and R. Ceppitelli, Some further generalizations of Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 132 (1988), 484—490.

[2] Bardaro, C. and R. Ceppitelli, Applications of generalized Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem to variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 137 (1989), 46—58.

[3] Chang Shih-sen and Zhang Ying, Generalized KKM theorem and variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 158 (1991), 10—25.

[4] Chang Shih-sen and Ma Yi-hai, Generalized KKM theorem on H-space with applications, *J. Math. Anal. Appl.* 163 (1992), 406—421.

[5] Chang Shih-sen, Y. J. Cho, X. Wu and Y. Zhang, The topological versions of KKM theorem and Fan's matching theorem with applications, *Topological Methods in Nonlinear Anal.*, 1 (1993), 231—245.

[6] Chang Shih-sen and X. Wu, Topological KKM theorem and minimax theorems, *J. Math. Anal. Appl.*, 182 (1994), 1—12.

[7] Fan, Ky, A generalization of Tychonoff's fixed point theorem, *Math. Ann.*, 142 (1961), 303—310.

[8] Horvath, C., Some results on multivalued mappings and inequalities without convexity in "Nonlinear and Convex Analysis", *Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Series*, Springer-Verlag, 107 (1987).

[9] Kindler, J., Topological intersection theorems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **117** (1993), 1003—1011.

[10] Knaster, B., C. Kuratowski and S. Mazurkiewicz, Ein Beweis des Fixpunksatzes *n*-dimensionale Simplexe, *Fund. Math.*, **14** (1929), 132—137.

[11] Park, S., Generalizations of Ky Fan's matching theorems and their applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **141** (1989), 164—176.

[12] Shih, M. H. and K. K. Tan, A geometric property of convex sets with applications to minimax type inequalities and fixed point theorems, *J. Austral Math. Soc. A.*, **45** (1988), 169—183.

Topologically Finite Intersection Property and Minimax Theorems

Zhang Shi-sheng

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu*, 610064)

Zhang Xian

(*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu, Anhui*, 241000)

Abstract

A more general topologically finite intersection property is obtained. As an application, we utilize this result to obtain some more general minimax theorems. The results presented in this paper unify and extend the main results of[5, 6, 9].

Key words finite intersection property, minimax theorem, connected set.