应用数学和力学，第16卷 第5期（1995年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

滞时Volterra积分方程数值方法的数值稳定性分析*

田红炯　匡蛟勋

（上海师范大学数学系，上海 200234）

（蔡树棠推荐，1994年5月23日收到）

摘　要

本文给出数值方法解 Volterra 积分方程的稳定性分析．我们判定可约积分方法的数值稳定性基于如下试验方程

$$y(t)=\psi(0)+\int_0^t(py(s)+q(s-\tau))ds \quad (0\leqslant t\leqslant X) \tag{0.1a}$$

$$y(t)=\psi(t) \quad (t\in[-\tau,0)) \tag{0.1b}$$

其中 τ是正常数，p和q是复值的．在上述试验方程的情况下，我们研究θ-方法及可约积分方法的稳定性．

关键词　Volterra 积分方程　滞时　稳定区域　可约积分方法　θ-方法

一、引　言

本文研究第二类具有滞时的Volterra积分方程

$$f(t)=g(t)+\int_0^t K(t,y,f(y),f(y-\tau))dy \qquad (0\leqslant t\leqslant X) \tag{1.1a}$$

$$f(t)=\psi(t) \qquad (t\in[-\tau,0)) \tag{1.1b}$$

其中 τ是一正常数，$f(t)$是未知函数，$g(t)$，$\psi(t)$，$K(t,y,u,v)$ 是给定函数．此类积分方程在脉冲理论[15,16]中具有一定应用．我们假设方程满足解的存在唯一性条件．

直接积分方法数值解(1.1)可通过应用形如

$$\int_0^{t_n}\varphi(s)ds\approx h\sum_{j=0}^{n}w_{n,j}\varphi(t_j) \qquad (t_j=jh)$$

的积分公式来离散(1.1)而得到方程

$$f_n=g(t_n)+h\sum_{j=0}^{n}\omega_{n,j}K(t_n,t_j,f_j,f_{j-\tau}) \quad (n\geqslant k\geqslant 1) \tag{1.2a}$$

$$f_s=\psi_s, \qquad (s\leqslant 0) \tag{1.2b}$$

来获得，f_n 近似$f(t_n)$和$f_{j-\tau}$ 近似$f(t_j-\tau)$．这里 $h>0$ 表示步长，并且 k 值依赖于希望的精

度．由于$\{\omega_{n,j}\}$的选择决定使用的数值方法的精度阶及稳定性，因此具有实际重要性．当所需的初始值f_0，…，f_0，f_1，…，f_{k-1}已知时，值f_k，f_{k+1}，…，可以通过[5]中提出的方法来获得．

Volterra方程与常微分方程(ODE)的积分形式的相似性意味着用于ODE问题的主要方法诸如Runge-Kutta方法和线性多步法(LMM)能被应用于Volterra方程．

本文中，我们研究这类积分方法，此类方法可通过收敛的、强稳定的LMM来构造．权$\{\omega_{n,j}\}$可由k步LMM的系数来构造．LMM的第一和第二特征多项式为

$$\rho(z)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j z^{k-j} \quad 及 \quad \sigma(z)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j z^{k-j} \tag{1.3}$$

由LMM构造的权$\{\omega_{n,j}\}$具有著名的性质，积分方法的构造和分析在[19]中给出．我们将利用权$\omega_{n,j}(n>k)$的一个重要性质，即

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\omega_{n-i,j}=\begin{cases}0 & (0\leqslant j\leqslant n-k-1)\\ b_{n-j} & (n-k\leqslant j\leqslant n)\end{cases} \tag{1.4}$$

这里我们对$j>n$已定义$\omega_{n,j}=0$．同时，我们假设LMM(ρ,σ)满足相容性条件$\rho(1)=0$，$\rho'(1)=\sigma(1)$，并且ρ和σ无公共因子．通过(1.4)和LMM(ρ,σ)相联系的积分方法(1.2)被称为(ρ,σ)-可约积分方法．

第二类Volterra积分方程的可约积分法的稳定性分析在最近文献[16]中已引起广泛的注意，但是关于可约积分方法求解第二类滞时Volterra积分方程的稳定性发表的文献很少．

我们的主要目的是分析(ρ,σ)-可约积分法关于如下试验方程

$$y(t)=\psi(0)+\int_0^t(py(s)+qy(s-\tau))ds \qquad (0\leqslant t\leqslant X) \tag{1.5a}$$

$$y(t)=\psi(t), \qquad (t\in[-\tau,0) \tag{1.5b}$$

对$q=0$，试验方程简化为非滞时方程

$$y(t)=\psi(0)+\int_0^t y(s)ds \quad (0\leqslant t\leqslant X) \tag{1.6a}$$

$$y(t)=\psi(t) \qquad (t\in[-\tau,0)) \tag{1.6b}$$

二、(ρ,σ)-可约积分方法的稳定性分析

通过微分(1.5)，易见(1.5)之解等于一阶滞时微分方程的解

$$y'(t)=py(t)+qy(t-\tau) \qquad (0\leqslant t\leqslant X) \tag{2.1a}$$

$$y(t)=\psi(t) \qquad (t\in[-\tau,0)) \tag{2.1b}$$

让我们回忆一下，对于p，q为复数时(2.1)的精确解的渐近性态已被许多作者所考虑．为简单起见，研究的稳定性通常约束于集合$D=\{(p,q)\in\mathbf{C}^2:|q|<-\mathrm{Re}(p)\}$，它包含于复稳定域中．

应用直接积分法(1.2)到试验方程(1.5)得到方程

$$y_n=\psi(0)+h\sum_{j=0}^{n}\omega_{n,j}(py_j+qy^h(t_j-\tau)) \tag{2.2}$$

其中 $y^h(t_j-\tau)$表示于$t_j-\tau$处的数值逼近。

设$\tau=(m-\delta)h$，$\delta\in[0,1)$，及m是一正整数。

我们考虑如下$y^h(t_i+\delta h)$的插值过程

$$y^h(t_i+\delta h)=\sum_{j=-r}^{s}L_j(\delta)y_{i+j}\qquad (对\delta\in[0,1),i=0,1,\cdots)\tag{2.3}$$

其中 $L_j(\delta)=\prod_{\substack{i=-r\\ i\neq j}}^{s}\left(\frac{\delta-i}{j-i}\right)$.

我们对递推方程(2.2)取权和，得到

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n-i}=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\psi(0)+a\sum_{k=0}^{k}\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\omega_{n-i,j}y_j+b\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\omega_{n-i,j}y^h(t_j-\tau),$$

其中 $a=hp$，$b=hq$。

注意到等式 $\rho(1)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j=0$和(1.4)，我们得到

$$\sum_{i=0}^{k}\beta_i y_{n-i}=a\sum_{i=0}^{k}\beta_i y_{n-\delta}+b\sum_{i=0}^{k}\beta_i y(t_{n-i}-\tau)\tag{2.4}$$

(2.3)代入(2.4)，得

$$\sum_{i=0}^{k}\beta_i y_{n-i}=a\sum_{i=0}^{k}\beta_i y_{n-i}+b\sum_{i=0}^{k}\beta_i\sum_{j=-r}^{s}L_j(\delta)y_{n-i-m+j}\tag{2.5}$$

我们注意到若$|q|<-\mathrm{Re}(p)$，则(1.5)之解$y(t)$趋于0，当$t\to\infty$。理想上，数值解应该保持精确解的性态。由此引出下述定义。

定义2.1 (ρ,σ)-可约积分方法应用于(1.5)被称为于(a,b)处稳定，若对于a和b(2.5)的数值解y_n趋于0当$n\to\infty$，$\forall\delta\in[0,1)$，$m\geqslant s+1$。

定义2.2 (a,b)-平面上的域S被称为(ρ,σ)-可约积分方法的绝对稳定域，若该方法对所有$(a,b)\in\mathbf{C}^2$是绝对稳定的。

定义2.3 (ρ,σ)-可约积分方法应用于(1.5)被称为稳定的，若$D\subseteqq S$。

三、稳 定 域

若分方程(2.5)的特征方程为

$$P_m(z)=z^{m+r}(\rho(z)-a\sigma(z))-b\sigma(z)\alpha(z,\delta)=0\tag{3.1}$$

其中 $\alpha(z;\delta)=\sum_{j=-r}^{s}L_j(\delta)z^{j+r}$ (对$z\in\mathbf{C}$，$0\leqslant\delta<1$)。

我们将(3.1)之左端（即$P_m(z)$）称为方程的稳定多项式。由定义2.1，可证方法于(a,b)处绝对稳定当且仅当$P_m(z)$是一个Schur多项式，对$\forall\delta\in[0,1)$，$m\geqslant S+1$。

应用[10]中得到的一个关于$P_m(z)$为Schur多项式的定理，我们有

引理3.1 (ρ,σ)-可约积分方法应用于(1.5)于(a,b)处是绝对稳定的当且仅当

$\rho(z)-\sigma(z)$是Schur多项式. (3.2a)

$|b\sigma(z)\alpha(z;\delta)|\leqslant|\rho(z)-a\sigma(z)|$ 当$|z|=1$, $\delta\in[0,1)$ (3.2b)

$P_m(z)\neq 0$ 当$|z|=1$, $\delta\in[0,1)$, $m\geqslant S+1$. (3.2c)

众所周知LMM(ρ,σ)关于ODE是A-稳定的当且仅当 $\rho(z)-\bar{h}\sigma(z)$是Schur多项式, $\forall\operatorname{Re}(\bar{h})<0$.

最后，我们重点考虑多项式α. 考虑条件

$$|\alpha(z;\delta)|\leqslant 1 \qquad (\text{当}|z|=1,\ \delta\in[0,1)). \tag{3.3}$$

引理3.2[9] 条件(3.3)等价于条件$r\leqslant s\leqslant r+2$, 而且，若$r+s>0$, $r\leqslant s\leqslant r+2$, $|z|=1$, $0<\delta<1$. 则$|\alpha(z;\delta)|=1$当且仅当$z=1$.

下面的定理是本节的主要结论.

定理3.1 设$r\leqslant s\leqslant r+2$. 则$(\rho,\sigma)$-可约积分方法($\rho(1)=0$)是稳定的当且仅当LMM$(\rho,\sigma)$关于ODE是$A$-稳定的.

证明 (i)假设LMM(ρ,σ)是A-稳定的且$\rho(1)=0$, $r\leqslant s\leqslant r+2$, 设$(a,b)\in D$. 我们有$\rho(z)-a\sigma(z)$是Schur多项式. 若对某个$z$, $|z|=1$时$\sigma(z)=0$, 则$\rho(z)\neq 0$. 从而

$$P_m(z)\neq 0.$$

若对z, $|z|=1$时$\sigma(z)\neq 0$, 则 $\operatorname{Re}\left(\frac{\rho(z)}{\sigma(z)}\right)\geqslant 0$, 所以我们有

$$|b\sigma(z)\alpha(z;\delta)|\leqslant|b\sigma(z)|<-\operatorname{Re}(a)|\sigma(z)|\leqslant|\rho(z)-a\sigma(z)|.$$

从而$(a,b)\in S$, 这意味着$D\subseteq S$. 由定义2.3, 我们得到该方法是稳定的.

(ii) 假设$D\subseteq S$. 则由引理3.1, 当$\operatorname{Re}(a)<0$时$\rho(z)-a\sigma(z)$是Schur多项式. 立即可得LMM(ρ,σ)关于ODE是A-稳定的.

注 Dahlquist[7]已证明任何关于ODE是A-稳定的LMM最高可达阶为2. 因此采用逐段线性插值是合适的.

四、θ-方法的稳定域

θ-方法[11]应用于(1.1)有

$$f_n=g(t_n)+h(1-\theta)\sum_{j=0}^{n-1}\omega_{nj}K(t_n,t_j,f_j,f_{j-\tau})+h\theta\sum_{j=1}^{n}\omega_{n,j}K(t_n,t_j,f_j,f_{j-\tau}) \tag{4.1}$$

其中 $n=1,2,\cdots$及$\theta\in[0,1]$.

应用(4.1)于试验方程(1.5)给出方程

$$y_n=\psi(0)+h(1-\theta)\sum_{j=0}^{n-1}\omega_{n,j}(\rho y_j+qy^h(t_j-\tau))+h\theta\sum_{j=1}^{n}\omega_{n,j}(\rho y_j+qy^h(t_j-\tau)) \tag{4.2}$$

利用(2.3)和(1.4)及$\rho(1)=0$得

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n-i}=\theta\left\{hp\sum_{i=0}^{k}\beta_i y_{n-j}+qh\sum_{i=0}^{k}\beta_i\sum_{j=-r}^{s}L_j(\delta)y_{n-i-m+j}\right\}$$

$$+(1-\theta)\left\{hp\sum_{i=0}^{k}\beta_i y_{n-i}+hq\sum_{i=1}^{k}\beta_i\sum_{j=-r}^{s}L_j(\delta)y_{n-i-m+j}\right\}\tag{4.3}$$

差分方程(4.3)的特征多项式为

$$\rho(z)-\theta\{a\sigma(z)+z^{-(m+r)}b\sigma(z)\alpha(z;\delta)\}-(1-\theta)\{a\sigma(z)-\beta_0 az^k$$
$$+z^{-(m+r)}b\sigma(z)\alpha(z;\delta)-b\beta_0\alpha(z;\delta)z^k\}=0\tag{4.4}$$

(4.4)的左端为θ-方法的稳定多项式，且能写成形如

$$W_m^\theta(z)=P_m^\theta(z)-Q^\theta(z)\tag{4.5}$$

其中

$$P_m^\theta(z)=z^{m+r}\{\rho(z)-a\sigma(z)+(1-\theta)a\beta_0 z^k\},$$
$$Q^\theta(z)=b\alpha(z;\delta)\{\sigma(z)+(1-\theta)\beta_0 z^k\}.$$

类似于引理3.1，我们有

引理4.1 θ-方法应用于(1.5)于(a,b)处是绝对稳定的当且仅当

$$\rho(z)-a\sigma(z)+(1-\theta)a\beta_0 z^k \text{ 是 Schur 多项式}\tag{4.6a}$$

$$|b\alpha(z;\delta)(\sigma(z)+(1-\theta)\beta_0 z^k)|\leqslant|\rho(z)-a\sigma(z)+(1-\theta)a\beta_0 z^k|\tag{4.6b}$$

当 $|z|=1$，$\delta\in[0,1)$，

$$W_m^\theta(z)\neq 0 \quad 当|z|=1,\ \delta\in[0,1),\ m\geqslant s+1,\ |P_m^\theta(z)|=|Q^\theta(z)|\tag{4.6c}$$

注意到对$\theta=1$，我们可见θ-方法与(ρ,σ)-可约积分方法具有相同的绝对稳定域.

下面，我们特别分析θ-方法的绝对稳定域，特征多项式ρ和σ分别为

$$\rho(z)=z-1\tag{4.7}$$

及

$$\sigma(z)=\Theta z+(1-\Theta),\quad \Theta\in[0,1].$$

为简单起见，我们定义$\alpha(z;\delta)=\delta z+(1-\delta)$.

由定义(4.7)，θ-方法的稳定多项式为

$$W_m^\theta(z)=P_m^\theta(z)-Q^\theta(z)$$
$$=z^m[z-1-(1-\Theta+\theta\Theta z)a]-b[\delta z+(1-\delta)][(1-\Theta)+\Theta\theta z].$$

对任意固定$\theta\in[0,1]$，我们引入下述记号

$$\rho_\Theta=\frac{1}{1-(1+\theta)\Theta}，\ 对\ \Theta\neq\frac{1}{1+\theta},$$

且广义圆盘$D_{\Theta,\theta}$定义为

$$D_{\Theta,\theta}=\{z\in\mathbf{C}:\ |z+\rho_\Theta|<\rho_\Theta\},\quad 若\ 0\leqslant\Theta<\frac{1}{1+\theta},$$

$$D_{\Theta,\theta}=\{z\in\mathbf{C}:\ \mathrm{Re}(z)<0\},\quad 若\ \Theta=\frac{1}{1+\theta},$$

$$D_{\Theta,\theta}=\{z\in\mathbf{C}:\ |z+\rho_\Theta|>-\rho_\Theta\},\quad 若\ \frac{1}{1+\theta}<\Theta\leqslant 1.$$

设$\partial D_{\Theta,\theta}$表示$D_{\Theta,\theta}$的边界.

注意到复变量函数

$$W=\frac{z-1}{1-\Theta+\Theta\theta z}\tag{4.8}$$

将z-平面上单位圆盘映为w-平面上之广义圆盘$D_{\Theta,\theta}$，我们看到(4.6b)等价于(4.9)：

$$|b|\left|\delta\frac{1+w-\Theta w}{1-\Theta\theta w}+1-\delta\right|\leqslant|w-a|,\quad w\in\partial D_{\Theta,\theta} \tag{4.9}$$

定理4.2 对任意给定$\theta\in[0,1]$，θ-方法与LMM(ρ,σ)(由(4.7)定义）和线性插值应用于(1.5)是稳定的当且仅当

$$(1+\theta)^{-1}\leqslant\Theta\leqslant1.$$

证明 (i) $0\leqslant\Theta<\frac{1}{1+\theta}$. 存在$(a,b)\in D$使得$\left|\frac{1+(1-\Theta)a}{1-\theta\Theta a}\right|>1$,这意味着条件(4.6a)不被满足，因此该方法不稳定.

(ii) $\Theta=\frac{1}{1+\theta}$. 设$\delta\in[0,)$为任意给定，$(a,b)\in D$. 因为

$$\left|\delta\frac{1+w-\Theta w}{1-\Theta\theta w}+(1-\delta)\right|\leqslant1,\quad w\in\partial D_{\Theta,\theta},$$

我们得到 $$|b|\left|\delta\frac{1+w-\Theta w}{1-\Theta\theta w}+(1-\delta)\right|\leqslant|b|<-\mathrm{Re}(a)\leqslant|w-a|,\quad w\in\partial D_{\Theta,\theta}.$$

这意味着(4.6b)和(4.6c)是满足的.

因为$(a,b)\in D$意味着$\mathrm{Re}(a)<0$，则

$$\left|\frac{1+(1-\Theta)a}{1-\theta\Theta a}\right|<1.$$

所以(4.6a)是满足的. 所以该方法是稳定的.

(iii) $(1+\theta)^{-1}<\Theta\leqslant1$. 该方法的稳定性类似可得.

参 考 文 献

[1] Amni, S.,C.T.H. Baker, P.J. Baker, van der Houwen and P.H.M. Walkeefct, Stability analysis of numerical methods for Volterra integral equations with polynomial convolution kernels, *J. Integral Equations*, 5(1983), 73—92.

[2] Baker, C. T. H. and M. S. Keech, Stability region in the numerical treatment of Volterra integial equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 15(1978), 394—417.

[3] Bellman, R. and K. L. Cooke, *Differcntial-Differcnoc Equations*. Academic Press, New York, San Francisco, London(1963).

[4] Bownds, J. M., J. M. Cushingand R. Schutte, Existence, uniqueness and extendility of solutions of Volterra integral systems with multiple variable lags, *Funkcial. Ekvac.*, 19(1976), 101—111.

[5] Cahlon, B., J. Nachman, and D. Segmidt, Numerical solution of Volterra integral equations with delay arguments, *J.Integral Equations*,7(1984),191—208.

[6] Cahlon, B., On the numerical stability of Volterra integral equations with delay argument, *J. C. A. M.*, 33(1990), 97—104.

[7] Dahlquist, G., A special stability problem for linear multistep methods, *BIT*, 3(1963), 27—43.

[8] Grand, T., Numerical methods for integration of delay differential equations, Thesis, Dpto. Mat. Apl. Univ. Zaragoza, (1986).

[9] in't Hout, K. J., A new interpolation procedure for adapting Runge—Kutta methods to delay differential equations, Rfport nr. Tw—90—09, Dept. Math. and Comput. Sc., Univ. of Leiden, (1990).

[10] in't Hout., K. J. and M. N. Spijker, The θ-methods in the numerical solution of delay differential equations, Rep TW—89—03, Univ. Leiden(1989).

[11] Jackiewicz, Z., Asymptotic stability analysis of θ-methods for functional differential equations, *Numer. Math.*, 43(1984) 389—396.

[12] Lambert, J. D., *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York(1973).

[13] Lu Lian-hua, Numerical stability of the θ—methods for systems of differential equations with several delay terms, *J. C. A. M.*, 34(1991), 291—304.

[14] Marsden, M., Geometry of Polynomials, Amer. Mathematical Soci., Providence, RI, (1966).

[15] Morugim, D., *Impulsive Structures with Delayed Feedback*, Moscow (1961). (in Russian)

[16] Morugim, D. Resistence of impact with retarded inverse connections, Sovetskoe Radio(1961). (in Russian)

[17] Roth, M. G., Difference methods for stiff delay differential equations, Thesis, Dept. Domput. Sci., Univ. Illinois at Urbana—Champaign, Urbana, IL, (1980).

[18] Tian Hong-jiong and Kuang Jiao-xun, The stability of the θ—methods in the numerical solution of delay differential equations with several delay terms, to appear in *J. C. A. M.* (1994).

[19] Walkenfelt, P. H. M., The construction of reducible quadrature rules for Volterra integral and integral—differential equations, *IMA J. Numer. Anal.*, 2 (1982), 131—152.

Numerical Stability Analysis of Numerical Methods for Volterra Integral Equations with Delay Argument

Tian Hong-jiong Kuang Jiao-xun

(*Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai* 200234)

Abstract

The present paper deals with the stability properties of numerical methods for Volterra integral equations with delay argument. We assess the numerical stability of numerical methods with respect to the following test equations

$$y(t)=\psi(0)+\int_0^t(py(s)+qy(s-\tau)ds, \quad (0\leqslant t\leqslant X) \tag{0.1a}$$

$$y(t)=\psi(t), \quad t\in[-\tau,0), \tag{0.1b}$$

where τ is a positive constant, and p and q are complex valued. We investigate the stability properties of reducible quadrature methods and θ-methods in the case of the above test equations.

Key words Volterra integral equation, delay, stability regions, reducible quadrature methods, θ-methods