

中厚板热后屈曲分析

沈惠申 朱湘赓

(上海交通大学, 上海 200030)
(何福保推荐, 1994年9月16日收到)

摘 要

依据 Reissner-Mindlin 板理论考虑转动惯量和横向剪切变形影响, 本文给出中厚板在(1)均布和非均布(线性)热荷载作用下; (2)单向压缩和均布热荷载共同作用下的后屈曲分析, 采用摄动法导出完善和非完善中厚板的热屈曲载荷和热后屈曲平衡路径, 并与经典薄板理论结果进行了比较.

关键词 结构稳定性 热屈曲 热后屈曲 中厚板 摄动法

一、引 言

近代设计中板的热问题变得非常重要. 在土木和其它结构工程中经常采用中厚板, 这些板状结构不可避免地存在相当程度的初始几何缺陷, 因此, 对于非完善中厚板的热屈曲和热后屈曲性态必须有充分的认识.

尽管对于各向同性和各向异性矩形板的热屈曲和热后屈曲已作过许多研究, 但对于考虑转动惯量和横向剪切变形的中厚板的热屈曲问题仅为少数研究者所注意, 如 Chen 等^[1], Yang 和 Shieh^[2], Tauchert^[3], Sun 和 Hsu^[4]以及 Chen 等^[5]. 上述分析或计算结果仅限于完善板的小挠度分析. 近来, 对于板在面内压缩和热荷载共同作用下的屈曲和后屈曲行为又受到研究者的重视, Librescu 和 Souza^[6]给出了计及剪切变形的非完善平板在面内压缩和热荷载共同作用下的后屈曲分析.

沈惠申^[7]曾给出完善和非完善中厚板在面内压缩作用下的后屈曲分析. 本文将进一步讨论中厚板在(1)均布和非均布(线性)热荷载作用下; (2)单向压缩和均布热荷载共同作用下的后屈曲行为. 依据 Reissner-Mindlin 板理论, 考虑转动惯量和横向剪切变形的影响, 同时考虑板初始几何缺陷的影响. 假定板的材料性能常数与温度无关. 采用文[8]提供的二次摄动法给出完善和非完善中厚板的热屈曲载荷和热后屈曲平衡路径.

二、基 本 方 程

考虑长为 a , 宽为 b , 厚度为 t 的中厚板受热荷载和边缘压缩荷载作用. \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} 分别为对应右手坐标系 (x, y, z) 的位移分量. 采用 Reissner-Mindlin 板理论, 并计及板的热应变,

以 w^* 和 w 分别表示初始的和附加的挠度, 以 \bar{F} 表示应力函数, 即有 $N_x = \bar{F}_{,xx}$, $N_y = \bar{F}_{,yy}$ 和 $N_{xy} = -\bar{F}_{,xy}$. 我们可以导得非线性大挠度方程

$$D\nabla^4 w + \nabla^2 M^T = \left(1 - \frac{D}{\kappa^2 Gt} \nabla^2\right) L(w + w^*, \bar{F}) \quad (2.1)$$

$$\nabla^4 \bar{F} + (1-\nu)\nabla^2 N^T = -\frac{1}{2} Et L(w + 2w^*, w) \quad (2.2)$$

其中
$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.3a, b)$$

$$L(\quad) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (2.3c)$$

式中 D 为弯曲刚度, 且 $D = Et^3/12(1-\nu^2)$. E 为弹性模量, G 为剪切弹性模量, ν 为 Poisson 比. κ^2 为横向剪切变形修正因子, 对于 Reissner 板理论 $\kappa^2 = 5/6$, 对于 Mindlin 板理论 $\kappa^2 = \pi^2/12$.

热力和热弯矩定义为

$$(N^T, M^T) = \frac{E\alpha}{1-\nu} \int_{-t/2}^{t/2} (1, z) T(x, y, z) dz \quad (2.4)$$

其中 α 为热膨胀系数. 板的单位端部缩短为

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta_x}{a} = & -\frac{1}{abt} \int_{-t/2}^{t/2} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx dy dz = -\frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{Et} \left(\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} + \frac{1}{Et} (1-\nu) N^T \right] dx dy \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_y}{b} = & -\frac{1}{abt} \int_{-t/2}^{t/2} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dy dx dz = -\frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{Et} \left(\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial y^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} + \frac{1}{Et} (1-\nu) N^T \right] dy dx \end{aligned} \quad (2.6)$$

下面我们考虑两种加载条件

(1) 非均布热荷载单独作用

取非均匀线性分布荷载

$$T(x, y, z) = \begin{cases} T_0 + 2T_1 y/b & (0 \leq y \leq b/2) \\ T_0 + 2T_1(b-y)/b & (b/2 \leq y \leq b) \end{cases} \quad (2.7)$$

在式(2.7)中, 当 $T_1 = 0$ 表示均布热荷载作用. 由(2.7)式, 我们有 $M^T = 0$ 和 $\nabla^2 N^T = 0$.

边界支承假定为四边不可移简支, 即有边界条件

$$x=0, a; \quad w = \bar{u} = 0 \quad (2.8a)$$

$$N_{xy} = M_x = 0 \quad (2.8b)$$

$$y=0, b; \quad w = \bar{v} = 0 \quad (2.8c)$$

$$N_{xy} = M_y = 0 \quad (2.8d)$$

(2) 单向压缩和均布热荷载共同作用

板受均布热荷载 T_0 作用, 并在纵轴方向受面内压缩作用. 此时, 边界支承为加载边 ($x=0, a$) 可移简支, 非加载边不可移简支, 即有边界条件

$$x=0, a; w=0, N_{xy}=\bar{M}_x=0 \quad (2.9a)$$

$$\int_0^b N_x dy + \sigma_x t b = 0 \quad (2.9b)$$

$$y=0, b; w=0, N_{xy}=\bar{M}_y=0 \quad (2.9c)$$

$$v=0 \quad (2.9d)$$

下面我们仿照文[7]来构造其渐近解。

三、分析方法与渐近解

引进

$$x=\pi x/a, \quad y=\pi y/b, \quad \beta=a/b, \quad \gamma=\pi^2 D/\kappa^2 a^2 Gt,$$

$$(u, v, w, w^*) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{w}^*) \sqrt{12(1-\nu^2)}/t, \quad F = \bar{F}/D,$$

$$(M_x, M_y) = (\bar{M}_x, \bar{M}_y) a^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}/\pi^2 D t,$$

$$\lambda_T = 6(1-\nu^2)b^2 \alpha T_i / \pi^2 t^2 \quad (\text{对于均布热荷载取 } i=0, \text{ 对于非均布热荷载取 } i=1),$$

$$(\delta_x, \delta_y) = (\Delta_x/a, \Delta_y/b) 12(1-\nu^2)b^2/4\pi^2 t^2 \quad (3.1)$$

那么方程(2.1)和(2.2)可表为如下无量纲形式

$$\bar{\nabla}^4 w = \beta^2 (1-\gamma \bar{\nabla}^2) L(w+w^*, F) \quad (3.2)$$

$$\bar{\nabla}^4 F = -\frac{1}{2} \beta^2 L(w+2w^*, w) \quad (3.3)$$

其中

$$\bar{\nabla}^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\beta^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad \bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.4a)$$

$$L(\quad) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (3.4c)$$

板的单位端部缩短化为

$$\begin{aligned} \delta_x = & -\frac{1}{4\pi^2 \beta^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \left[\left(\beta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} + 2\lambda_T \beta^2 C_{11} \right] dx dy \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \delta_y = & -\frac{1}{4\pi^2 \beta^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \beta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \beta^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \\ & \left. - \beta^2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} + 2\lambda_T \beta^2 C_{11} \right] dy dx \end{aligned} \quad (3.6)$$

在式(3.5)和(3.6)中, 对于均布热荷载作用取 $C_{11}=1.0$, $\lambda_T=6(1-\nu^2)b^2 \alpha T_0 / \pi^2 t^2$; 对于非均布热荷载作用取

$$C_{11} = (T_0/T_1 + 0.5), \quad \lambda_T = 6(1-\nu^2)b^2 \alpha T_1 / \pi^2 t^2.$$

边界条件式(2.8)化为

$$x=0, \pi; w=0, \delta_x=0 \quad (3.7a)$$

$$F_{,xy}=0, M_x=0 \quad (3.7b)$$

$$y=0, \pi; w=0, \delta_y=0 \quad (3.7c)$$

$$F_{,xy}=0, M_y=0 \quad (3.7d)$$

边界条件式(2.9)化为

$$x=0, \pi; w=0, M_x=0, F_{,xx}=0 \quad (3.8a)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \beta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy + 4\lambda_s \beta^2 = 0 \quad (3.8b)$$

$$y=0, \pi; w=0, M_y=0, F_{,yy}=0 \quad (3.8c)$$

$$\delta_y = 0 \quad (3.8d)$$

采用文[8]提供的二次摄动方法, 设方程(3.2)和(3.3)的解为如下渐近展开式

$$w(x, y, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j w_j(x, y); \quad F(x, y, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j f_j(x, y) \quad (3.9)$$

其中 ε 为摄动小参数. 取 $w_j(x, y)$ 的首项 $w_1(x, y)$ 为小挠度经典解

$$w_1(x, y) = A_{11}^{(1)} \sin mx \sin ny \quad (3.10)$$

并取板的初挠度为相同的形式

$$w^*(x, y, \varepsilon) = \varepsilon A_{11}^* \sin mx \sin ny = \varepsilon \mu A_{11}^{(1)} \sin mx \sin ny \quad (3.11)$$

其中 μ 为缺陷参数, 且 $\mu = A_{11}^* / A_{11}^{(1)}$.

将式(3.9)代入方程(3.2)和(3.3), 我们得到一系列摄动方程组, 利用式(3.10)和(3.11)逐级求解这些摄动方程组, 我们最终可以求得大挠度渐近解

$$w = \varepsilon [A_{11}^{(1)} \sin mx \sin ny] + \varepsilon^3 [A_{13}^{(3)} \sin mx \sin 3ny + A_{33}^{(3)} \sin 3mx \sin ny] + O(\varepsilon^4) \quad (3.12)$$

$$F = -B_{00}^{(0)} \frac{y^2}{2} - b_{00}^{(0)} \frac{x^2}{2} + \varepsilon^2 \left[-B_{00}^{(2)} \frac{y^2}{2} - b_{00}^{(2)} \frac{x^2}{2} + B_{20}^{(2)} \cos 2mx + B_{02}^{(2)} \cos 2ny \right] + \varepsilon^4 \left[-B_{00}^{(4)} \frac{y^2}{2} - b_{00}^{(4)} \frac{x^2}{2} + B_{20}^{(4)} \cos 2mx + B_{02}^{(4)} \cos 2ny + B_{22}^{(4)} \cos 2mx \cos 2ny + B_{40}^{(4)} \cos 4mx + B_{04}^{(4)} \cos 4ny + B_{24}^{(4)} \cos 2mx \cos 4ny + B_{42}^{(4)} \cos 4mx \cos 2ny \right] + O(\varepsilon^6) \quad (3.13)$$

式中各系数如文[7]所示皆可表为 $A_{11}^{(1)}$ 的函数.

对于所讨论的两种加载情况, 进一步利用边界条件式(3.7)或(3.8), 并经过摄动参数转换, 我们可以求得以最大无量纲挠度为摄动参数的后屈曲平衡路径.

(1) 均布或非均布热荷载单独作用

$$\lambda_T = \lambda_T^{(0)} + \lambda_T^{(2)} w_m^2 + \lambda_T^{(4)} w_m^4 + \dots \quad (3.14)$$

其中

$$\lambda_T^{(0)} = \frac{(1-\nu)(m^2+n^2\beta^2)}{2\beta^2(1+\mu)[1+\gamma(m^2+n^2\beta^2)]C_{11}}$$

$$\lambda_T^{(2)} = \frac{1}{32\beta^2} \frac{(3-\nu^2)(m^4+n^4\beta^4) + 4\nu m^2 n^2 \beta^2}{(1+\nu)(m^2+n^2\beta^2)C_{11}} (1+2\mu)$$

$$\lambda_T^{(4)} = \frac{1}{512\beta^2} \frac{(1-\nu)[1+\gamma(m^2+n^2\beta^2)]}{(m^2+n^2\beta^2)C_{11}} (C_2 - C_4) \quad (3.15a)$$

及

$$C_2 = 2(1+\mu)^2(1+2\mu)^2 [(3-\nu^2)(m^4+n^4\beta^4) + 4\nu m^2 n^2 \beta^2] \cdot [m^4[1+\gamma(m^2+9n^2\beta^2)]/g_{13} + n^4\beta^4[1+\gamma(9m^2+n^2\beta^2)]/g_{31}] / (1-\nu^2)$$

$$C_4 = (1+\mu)(1+2\mu)[2(1+\mu)^2 + (1+2\mu)] \cdot [m^8[1+\gamma(m^2+9n^2\beta^2)]/g_{13} + n^8\beta^8[1+\gamma(9m^2+n^2\beta^2)]/g_{31}]$$

$$g_{13} = (m^2+9n^2\beta^2)^2 [1+\gamma(m^2+n^2\beta^2)] (1+\mu)$$

$$\begin{aligned}
& - (m^2 + n^2\beta^2)(m^2 + 9n^2\beta^2)[1 + \gamma(m^2 + 9n^2\beta^2)] \\
g_{31} = & (9m^2 + n^2\beta^2)^2[1 + \gamma(m^2 + n^2\beta^2)](1 + \mu) \\
& - (m^2 + n^2\beta^2)(9m^2 + n^2\beta^2)[1 + \gamma(9m^2 + n^2\beta^2)]
\end{aligned} \quad (3.15b)$$

式(3.14)可用于中厚板在均匀或非均匀(线性)分布热荷载作用下的后屈曲荷载-挠度曲线计算。对于完善板,取 $\mu=0$ (或 $\bar{w}^*/t=0$),并令 $w_m=0$ (或 $\bar{w}/t=0$),我们容易得到热屈曲荷载(或临界温度)。通常,其对应的屈曲模态为 $(m,n)=(1,1)$ 。

(2) 单向压缩和均布热荷载共同作用

$$\frac{\lambda_s}{\lambda_{cr}^s} + \frac{\lambda_T}{\lambda_{cr}^T} = S_0 + S_2 w_m^2 + S_4 w_m^4 + \dots \quad (3.16)$$

其中 λ_{cr}^s 为 λ_s 单独作用时的临界值, λ_{cr}^T 为 λ_T 单独作用时的临界值,即

$$\begin{aligned}
\lambda_{cr}^s &= \frac{(m^2 + n^2\beta^2)^2}{4\beta^2[1 + \gamma(m^2 + n^2\beta^2)](m^2 + \nu n^2\beta^2)} \\
\lambda_{cr}^T &= \frac{(m^2 + n^2\beta^2)^2}{2\beta^2[1 + \gamma(m^2 + n^2\beta^2)]n^2\beta^2}
\end{aligned} \quad (3.17a)$$

$$\text{且} \quad S_0 = \frac{1}{1 + \mu}, \quad S_2 = \frac{1}{16} \frac{(m^4 + 3n^4\beta^4)[1 + \gamma(m^2 + n^2\beta^2)]}{(m^2 + n^2\beta^2)^2} (1 + 2\mu)$$

$$\begin{aligned}
S_4 &= \frac{1}{256} \frac{[1 + \gamma(m^2 + n^2\beta^2)]}{(m^2 + n^2\beta^2)^2} (C_2 - C_4) \\
C_2 &= 2(1 + \mu)(1 + 2\mu)^2(m^4 + 3n^4\beta^4)[m^4[1 + \gamma(m^2 + 9n^2\beta^2)]/g_{13} \\
&\quad + n^4\beta^4[1 + \gamma(9m^2 + n^2\beta^2)]/g_{31}] \\
C_4 &= (1 + 2\mu)[2(1 + \mu)^2 + (1 + 2\mu)][m^8[1 + \gamma(m^2 + 9n^2\beta^2)]/g_{13} \\
&\quad + n^8\beta^8[1 + \gamma(9m^2 + n^2\beta^2)]/g_{31}] \\
g_{13} &= (m^2 + 9n^2\beta^2)^2 - \beta^2 B \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} m^2 + b \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} 9n^2\beta^2 [1 + \gamma(m^2 + 9n^2\beta^2)] \\
g_{31} &= (9m^2 + n^2\beta^2)^2 - (\beta^2 B \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} 9m^2 + b \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} n^2\beta^2) [1 + \gamma(9m^2 + n^2\beta^2)]
\end{aligned} \quad (3.17b)$$

式(3.16)表征单向压缩荷载与均布热荷载关系曲线。对于完善板的小挠度问题,式(3.16)退化为经典解

$$\frac{\lambda_s}{\lambda_{cr}^s} + \frac{\lambda_T}{\lambda_{cr}^T} = 1 \quad (3.18)$$

分别给定初热应力或初压应力,式(3.16)可用于计算中厚板后屈曲及热后屈曲响应。

当仅有面内压缩作用时($T_0/T_{cr}=0.0$),式(3.16)退化为文[7]所示对应纵向边缘不可移简支的结果。

当仅有均布热荷载作用时($P_x/P_{cr}=0.0$),式(3.16)表征纵向边缘不可移简支,另两边可移简支中厚板的热荷载-挠度曲线。与式(3.14)的结果相比较,我们发现,四边不可移简支方板的临界温度仅为两边不可移简支方板临界温度的35%。

此外,当板相当薄时(即当 i/b 很小时), $\gamma \rightarrow 0$ 。此时,式(3.14)和(3.16)退化为Karman板的结果。

四、结果和讨论

由于Mindlin系数 $\pi^2/12$ 比Reissner系数 $5/6$ 略小一点,因此,采用Mindlin系数将获得略为低一点的屈曲荷载。在本文的数值计算中将采用Mindlin系数。

作为算例，我们利用式(3.14)计算了薄方板 ($\gamma=0, \beta=1.0, \nu=0.3$) 在均布热荷载作用下的后屈曲载荷，计算结果以无量纲形式给出，列在表 1 中，其中 $\lambda_T^* = 12(1+\nu)\alpha T_0 a^2 \cdot (\pi^2)^{-1}$ ，并与 Raju 和 Rao^[9,10] 利用有限元或 Rayleigh-Ritz 法的计算结果进行比较。可以看出，本文结果介于有限元和 Rayleigh-Ritz 法计算结果之间，具有良好的精度。

图 1 为热屈曲载荷 λ_T 随板长宽比 β 的变化曲线。其中曲线 1 对应薄板，曲线 2 和 3 对应中厚板。计算发现在通常情况下，热屈曲皆对应屈曲模态 $(m, n) = (1, 1)$ ，这和面内压缩屈曲问题的情形是完全不同的。板厚对热屈曲载荷的影响在 β 较小时特别显著。

图 2 为中厚板在均布热荷载作用下的热后屈曲载荷-挠度曲线，并与经典薄板理论结果进行了比较。图示表明，对于中厚板，在挠度不太大时 ($w/t \leq 1.0$)，横向剪切变形对热后屈曲平衡路径的影响是明显的，在进一步的后屈曲阶段影响渐弱。

图 3 为中厚板在非均匀线性分布热荷载作用下的后屈曲载荷-挠度曲线。可以看出，热屈曲载荷及热后屈曲强度皆随着热荷载比 T_0/T_1 的增加而减小。

图 4 和图 5 为中厚板在单向压缩和均布热荷载共同作用下的后屈曲载荷-挠度曲线。此时需要分别讨论两种先情况：(i) 先加热荷载 ($T_0/T_{cr} = 0.0, 0.25$ 或 0.50)，板在逐渐加大的面内压缩作用下屈曲，并发展到后屈曲阶段；(ii) 先加面内压缩 ($P_x/P_{cr} = 0.0, 0.25$ 或 0.50)，板在逐渐加大的温度作用下屈曲，并发展到后屈曲阶段。对于方板 ($\beta=1.0$)，此两种情况皆对应屈曲模态 $(m, n) = (1, 1)$ ，给出的载荷-挠度曲线近乎一致 (图 4)。对于矩形板 ($\beta=3.0$)，情况 (i) 对应屈曲模态 $(m, n) = (2, 1)$ (图 5a)；情况 (ii) 对应屈曲模态 $(m, n) = (1, 1)$ (图 5b)。图示表明两种情况后屈曲平衡路径有相当大的差别。热问题的后屈曲平衡路径要徒得多。

除了完善板，图 2~5 中还给出非完善板的后屈曲平衡路径，对于均布和非均布热荷载作用，板的屈曲和后屈曲行为初始几何缺陷皆表现不敏感。

表 1 薄方板无量纲热屈曲载荷 λ_T^* 比较

a/t	Raju 和 Rao		本 文
	FEM ^[9]	Rayleigh-Ritz ^[10]	
0.0	1.9847	2.0000	2.0000
0.2	2.1058	2.1122	2.1054
0.4	2.4170	2.4492	2.4231
0.6	2.9528	3.0106	2.9571
0.8	3.7136	3.7968	3.7144
1.0	4.6990	4.8074	4.7049

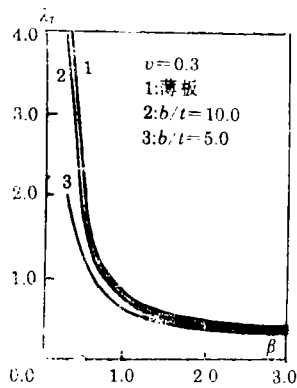


图 1 均布热荷载作用，不同长宽比矩形板热屈曲载荷比较。

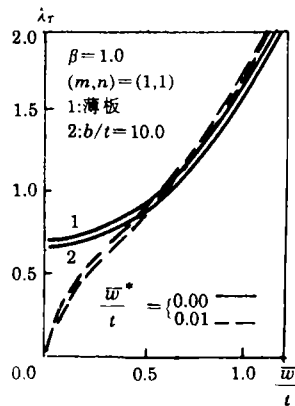
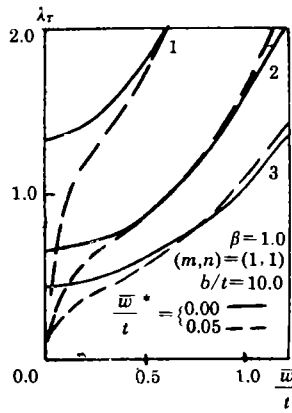
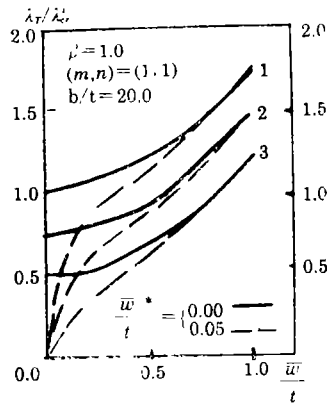


图 2 均布热荷载作用，热后屈曲载荷-挠度曲线比较。



- 1: $T_0/T_1=0.0$
- 2: $T_0/T_1=0.5$
- 3: $T_0/T_1=1.0$

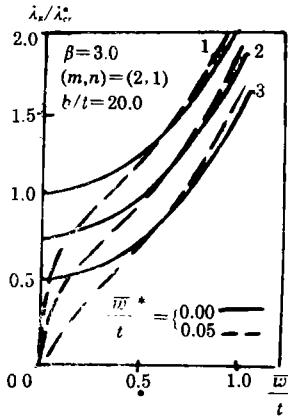
图 3 非均匀线性分布热荷载作用, 热后屈曲载荷-挠度曲线比较.



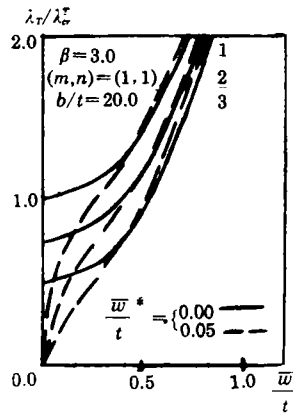
- | | p_x/p_{cr} | T_0/T_{cr} |
|----|--------------|--------------|
| 1: | 0.00 | 0.00 |
| 2: | 0.25 | 0.25 |
| 3: | 0.50 | 0.50 |

(右边纵轴为 $\lambda_x \setminus \lambda_{cr}^{\alpha}$ 的读数)

图 4 单向压缩和均布热荷载共同作用, 方板后屈曲载荷-挠度曲线比较.



- 1: $T_0/T_{cr}=0.00$
- 2: $T_0/T_{cr}=0.25$
- 3: $T_0/T_{cr}=0.50$



- 1: $p_x/p_{cr}=0.00$
- 2: $p_x/p_{cr}=0.25$
- 3: $p_x/p_{cr}=0.50$

图 5 单向压缩和均布热荷载共同作用, 矩形板后屈曲载荷-挠度曲线比较.

五、结 论

本文采用摄动法研究了中厚板在均匀和非均匀热荷载作用下的后屈曲行为。结果表明, 初始几何缺陷, 热荷载比以及初始压缩应力对中厚板热后屈曲特性都有较大影响, 而板的横向剪切变形影响相对较小, 但在挠度不太大时不容忽视。

参 考 文 献

- [1] Chen, L. W., E. J. Brunelle and L. Y. Chen, Thermal buckling of initial stressed thick plates, *J. Mech. Des.*, **104**(1982), 557—564.
- [2] Yang, I. H. and J. A. Shieh Generic thermal buckling of initial stressed antisymmetric cross-ply thick laminates, *Int. J. Solids Structures*, **24** (1988), 1059—1070.
- [3] Tauchert, T. R., Thermal buckling of thick antisymmetric angleply laminates, *J. Therm. Stresses*, **10**(1987), 113—124.
- [4] Sun, L. X. and T. R. Hsu, Thermal buckling of laminated composite plates with transverse shear deformation, *Computers & Structures*, **36**(1990), 883—889.
- [5] Chen, W. J., P. D. Lin and L. W. Chen, Thermal buckling behavior of thick composite laminated plates under nonuniform temperature distribution, *Computers & Structures*, **41**(1991), 637—645.
- [6] Librescu, L. and M. A. Souza, Postbuckling of geometrically imperfect shear-deformable flat panels under combined thermal and compressive edge loadings, *J. Appl. Mech.*, **60**(1993), 526—533
- [7] 沈惠申, 中厚板的弹性屈曲和后屈曲, *应用数学和力学*, **11**(4)(1990), 341—350.
- [8] 沈惠申、张建武, 单向压缩简支矩形板后屈曲摄动分析, *应用数学和力学*, **9**(8)(1988), 741—752.
- [9] Raju, K. K. and G. V. Rao, Thermal postbuckling of a square plate resting on an elastic foundation by finite element method, *Computers & Structures*, **28** (1988), 195—199.
- [10] Raju, K. K. and G. V. Rao, Thermal post-buckling of thin simply supported orthotropic square plates, *Composite Structures*, **12**(1989), 149—154.

Thermal Postbuckling Analysis of Moderately Thick Plates

Shen Hui-shen Zhu Xiang-geng

(Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030)

Abstract

A thermal postbuckling analysis is presented for a moderately thick rectangular plate subjected to (1) uniform and non-uniform tent-like temperature loading; and (2) combined axial compression and uniform temperature loading. The initial geometrical imperfection of plate is taken into account. The formulations are based on the Reissner-Mindlin plate theory considering the effects of rotary inertia and transverse shear deformation. The analysis uses a deflection-type perturbation technique to determine the thermal buckling loads and postbuckling equilibrium paths. Numerical examples are presented that relate to the performances of perfect and imperfect, moderately thick rectangular plates and are compared with the results predicted by the thin plate theory.

Key words structural stability, thermal buckling, thermal postbuckling, moderately thick plate, perturbation method