

具有双曲线边界的各向异性介质的二维问题*

胡元太 赵兴华

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

摘 要

文章研究了在纯弯矩 M_0 作用下, 具双曲线边界的各向异性介质的二维变形问题, 求得了介质内部的应力应变场的具体形式。在此基础上, 以单晶铝板(立方晶系介质)为例, 我们求得了沿双曲线边界的环向应力及 $x_2=0$ 面上的应力分布。当双曲线退化成一双边裂纹时, 文章也求得了相应的应力强度因子(k_1, k_2, k_3), 并且也发现, k_1 与材料的弹性性质无关。

关键词 Stroh方法 双边裂纹 应力强度因子

一、介 绍

通常, 对各向同性弹性材料做应力分析时都采用双调和函数法或 Airy 应力函数法, 但这个方法对各向异性材料不适用^[1,2]。Lekhnitskii^[3] 曾引入双应力函数来研究一般的各向异性材料, 他的方法后来被 Wang 及 Ckoi^[4] 用在研究层状复合材料交界面的热应力问题, 但由于目前还没找到足够的恒等式能将其给出的弹性场的复形式解答转化成实数解, 因此限制了它的进一步应用。因为现今复合材料的迅速发展, 各向异性弹性理论就显得更重要了, 这就迫使人们去寻求更为有效的解决各向异性问题的力学方法。在 1958 年至 1962 年间, Stroh 仔细研究了 Eshelby 等人^[5] 在 1953 年分析位错时所采用的方法, 系统地提出了一个新的特征值法, 即 Stroh 方法, 其特征就是通过引入一应力矢量 t 代替应力张量 σ_{ij} , 将问题的一般解通过方程的特征值函数形式表示出来。最近 Stroh 方法已在材料科学和表面波领域取得了许多进展^[6~10], 并且也已证明 Stroh 方法是研究广义平面变形问题的最有效最优美的方法。

本文利用 Stroh 方法研究在纯弯矩 M_0 作用下, 具双曲线边界的各向异性弹性介质的二维变形问题, 并求出它的一般解, 以单晶铝材料(立方晶系介质)为例, 求得了沿双曲线边界的环向应力及 $x_2=0$ 面上的应力分布。最后讨论在双曲线退化成一双边裂纹时介质内的应力应变场, 并求解裂纹尖端的应力强度因子。

* 1994年1月15日收到初稿, 1994年10月5日收到修改稿。

二、基本方程

在一直角坐标系 $x_i (i=1, 2, 3)$ 中, 取 u_i, σ_{ij} 及 ε_{ij} 分别表示位移, 应力及应变, 那么应力应变关系及平衡方程为

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (2.2)$$

式中

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (2.3)$$

是材料的弹性系数。以后除非特殊声明, 重复指标总是哑标, 逗号表示求偏导。

变形的平面特征就要求 u_i 及 σ_{ij} 与 x_3 无关, 则(2.2)可化为:

$$\sigma_{1i,1} + \sigma_{2i,2} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.4)$$

我们可以构造一应力矢量 $t(x_1, x_2)^{[6,7]}$

$$t_i(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{x_1} \sigma_{2i}(\xi, a_2) d\xi - \int_{a_2}^{x_2} \sigma_{1i}(x_1, \eta) d\eta \quad (2.5)$$

其中 a_1, a_2 为两任意实矢量。从(2.4)及(2.5), 容易发现: 应力张量 σ_{ij} 可以用 t 取代, 它们之间存在下列关系

$$\sigma_{1i} = -t_{i,2} \quad \sigma_{2i} = t_{i,1} \quad (2.6)$$

联合(1.1)与(1.6), 可得

$$R(0)u_{,1} - Q\left(\frac{\pi}{2}\right)u_{,2} + t_{,1} = 0 \quad (2.7)$$

$$-Q(0)u_{,1} - R\left(\frac{\pi}{2}\right)u_{,2} - t_{,2} = 0$$

式中

$$Q_{ij}(0) = C_{i1j1}, \quad Q_{ij}\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_{i2j2} \quad (2.8)$$

$$R_{ij}(0) = -C_{i2j1}, \quad R_{ij}\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_{i1j2}$$

引入一新的六维矢量

$$W = \langle u, t \rangle^T \quad (2.9)$$

它由位移矢量与应力矢量构成, 右上标 T 表示转置。将(2.7)写成整体形式

$$N(0)W_{,1} - W_{,2} = 0 \quad (2.10)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} N(0) &= \begin{pmatrix} N_1(0) & N_2(0) \\ N_3(0) & N_1^T(0) \end{pmatrix} \\ N_1(0) &= -Q^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)R^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ N_2(0) &= Q^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = N_1^T(0) \\ N_3(0) &= R\left(\frac{\pi}{2}\right)Q^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)R^T\left(\frac{\pi}{2}\right) - Q(0) = N_3^T(0) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

由(2.10), 可求得各向异性弹性力学平面问题的一般解为

$$W = \sum_{\alpha=1}^6 f_{\alpha}(x_1 + p_{\alpha}(0)x_2) \zeta_{\alpha} \quad (2.12)$$

其中 $p_{\alpha}(0)$, ζ_{α} 分别为 $N(0)$ 的特征值及特征矢量, 且

$\zeta_{\alpha} = \langle \mathbf{a}_{\alpha}, \mathbf{b}_{\alpha} \rangle^T$, \mathbf{a}_{α} , \mathbf{b}_{α} 是两个三维矢量, $f_{\alpha}(\cdot)$ 代表任意的函数形式.

(2.12) 是二维各向异性弹性力学问题的Stroh解. 工程应用中, 我们可以根据给定的边界条件来确定 $f_{\alpha}(\cdot)$ 的具体形式.

为了后面运算的需要, 引入下列三个矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \\ \mathbf{B} &= (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \langle f_{\alpha}(z_{\alpha}) \rangle &= \text{diag}\{f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3)\} \\ z_{\alpha} &= x_1 + p_{\alpha}(0)x_2 \quad (\alpha=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.14)$$

通常, $f_{\alpha}(z_{\alpha})$ 都具有相同的形式, 即

$$f_{\alpha}(z_{\alpha}) = q_{\alpha} f(z_{\alpha}) \quad (\alpha \text{ 不求和}) \quad (2.15)$$

式中: q_{α} ($\alpha=1, 2, 3$) 是任意复常数, 为了方便将 \mathbf{q} 分解成

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}^T \mathbf{g} + \mathbf{B}^T \mathbf{h}$$

\mathbf{g} 和 \mathbf{h} 是两三维实矢量, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$, 于是(2.12)可与成

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 2\text{Re}\{\mathbf{A} \langle f(z_{\alpha}) \rangle \mathbf{A}^T\} \mathbf{g} + 2\text{Re}\{\mathbf{A} \langle f(z_{\alpha}) \rangle \mathbf{B}^T\} \mathbf{h} \\ \mathbf{t} = 2\text{Re}\{\mathbf{B} \langle f(z_{\alpha}) \rangle \mathbf{A}^T\} \mathbf{g} + 2\text{Re}\{\mathbf{B} \langle f(z_{\alpha}) \rangle \mathbf{B}^T\} \mathbf{h} \end{cases} \quad (2.16)$$

容易证明, 下面三个矩阵

$$\mathbf{H} = 2i\mathbf{A}\mathbf{A}^T, \quad \mathbf{L} = -2i\mathbf{B}\mathbf{B}^T, \quad \mathbf{S} = i(2\mathbf{A}\mathbf{B}^T - \mathbf{I}) \quad (2.17)$$

是纯实的, 其中 \mathbf{I} 为三维单位阵, $i = \sqrt{-1}$, 且 \mathbf{H} 和 \mathbf{L} 是对称正定的, 在这三个实矩阵之间还存在下列关系

$$\mathbf{L}\mathbf{S}^T + \mathbf{S}^T\mathbf{L} = 0, \quad \mathbf{H}\mathbf{S}^T + \mathbf{S}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H}\mathbf{L} - \mathbf{S}^2 = \mathbf{I} \quad (2.18)$$

三、双曲线边界问题

如图1所示, 双曲线 Ω 的方程为

$$x_1 = \pm a \cosh \psi \quad x_2 = \mp b \sinh \psi \quad (3.1)$$

式中 a , b 为两常实矢量, ψ 为一实参数, 由 Ω 所包围的介质承受纯弯矩 M_0 的作用, 参照[3], 我们选择解函数 $f_{\alpha}(z_{\alpha})$ 为

$$f_{\alpha}(z_{\alpha}) = i/a [z_{\alpha} - (z_{\alpha}^2 - a^2 + p_{\alpha}^2 b^2)^{1/2}] \quad (3.2)$$

明显的, 在双曲线边界 Ω 上, 应力矢量 \mathbf{t} 可以由(2.16)求得

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = 1/a \{ & [a(\cosh \psi - \sinh \psi) \mathbf{S}^T + b(\cosh \psi \\ & + \sinh \psi) (\mathbf{N}_1^T(0) \mathbf{S}^T + \mathbf{N}_3(0) \mathbf{H}) \mathbf{g} \\ & + [-a(\cosh \psi - \sinh \psi) \mathbf{L} + b(\cosh \psi + \sinh \psi) \\ & \cdot (\mathbf{N}_3(0) \mathbf{S} - \mathbf{N}_1^T(0) \mathbf{L}) \mathbf{h}] \} \quad (3.3) \end{aligned}$$

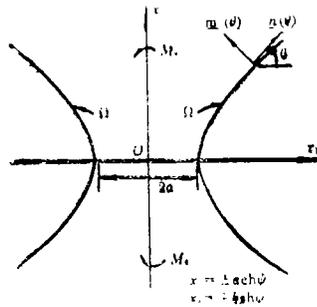


图1 双曲线边界

因为 Ω 上没有外力作用, 因此沿 Ω 将有

$$\mathbf{t}=0 \quad (3.4)$$

由(3.3)及(3.4), 可以得到

$$\left. \begin{aligned} & [N_1^T(0)\mathbf{S}^T + N_3(0)\mathbf{H}]\mathbf{g} + [N_3(0)\mathbf{S} - N_1^T(0)\mathbf{L}]\mathbf{h} = 0 \\ & \mathbf{S}^T\mathbf{g} - \mathbf{L}\mathbf{h} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

为了得到非平凡解 \mathbf{g} 和 \mathbf{h} , 必须其系数行列式为0, 即

$$\det \mathbf{D} = 0 \quad (3.6)$$

其中

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} N_1^T(0)\mathbf{S}^T + N_3(0)\mathbf{H} & N_3(0)\mathbf{S} - N_1^T(0)\mathbf{L} \\ \mathbf{S}^T & -\mathbf{L} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

由附录 I 可知, (3.6)是自然满足的, 并且 \mathbf{D} 的秩降为5, 即 $\text{rank } \mathbf{D} = 5$. 所以方程(3.5)能提供关于 \mathbf{g} 和 \mathbf{h} 的五个独立的方程. 为了唯一地决定 \mathbf{g} 和 \mathbf{h} , 必须寻找补充条件. 假设将物仅体从 $x_2=0$ 面上切开, 则 $x_2=0$ 面上的合力 \mathbf{F} 及合力矩 m 必须符合条件

$$\mathbf{F} = 0, \quad m = M_0 \quad (3.8)$$

从(3.5)中第二个方程可以发现, 上述第一个方程自然满足, 所以仅有合力矩方程提供必须的补充条件.

为了运算方便, 引入一新的矢量

$$\mathbf{f} = \int_{-a}^a \sigma_2(x_1, 0) x_1 dx_1 = \int_{-a}^a \mathbf{t}_{,1}(x_1, 0) x_1 dx_1$$

式中 $\sigma_2 = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})^T$, 从附录 I 得

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \{-b[N_1^T(0)\mathbf{S}^T + N_3(0)\mathbf{H}] + (\pi/2)a[\Delta\mathbf{L}(\theta_0)\mathbf{H} - \Delta\mathbf{S}^T(\theta_0)\mathbf{S}^T] \\ & - (\pi/2a)b^2[N_1^{\{2\}T} - N_3^{\{2\}}\mathbf{S}\mathbf{L}^{-1}] - (\Delta\mathbf{L}(\theta_0)\mathbf{H} - \Delta\mathbf{S}^T(\theta_0)\mathbf{S}^T) \\ & - N_3^{\{2\}}\mathbf{L}^{-1}\Delta\mathbf{S}(\theta_0)] - (\pi/2)a\mathbf{I} + (\pi/2a)b^2N_1^{\{2\}T}\}\mathbf{g} \\ & + \{-b[N_3(0)\mathbf{S} - N_1^T(0)\mathbf{L}] + (\pi/2)a[\Delta\mathbf{L}(\theta_0)\mathbf{S} + \Delta\mathbf{S}^T(\theta_0)\mathbf{L}] \\ & - (\pi/2a)b^2[N_1^{\{2\}T} - N_3^{\{2\}}\mathbf{S}\mathbf{L}^{-1}](\Delta\mathbf{L}(\theta_0)\mathbf{S} + \Delta\mathbf{S}^T(\theta_0)\mathbf{L}) \\ & + N_3^{\{2\}}\mathbf{L}^{-1}\Delta\mathbf{L}(\theta_0)] + (\pi/2a)b^2N_3^{\{2\}}\}\mathbf{h} \end{aligned} \quad (3.9)$$

式中 $\theta_0 = \tan^{-1}(b/a)$, $\Delta\mathbf{S}(\theta_0) = \bar{\mathbf{S}}(\theta_0) - \bar{\mathbf{S}}(-\theta_0)$, $\Delta\mathbf{L}(\theta_0) = \bar{\mathbf{L}}(\theta_0) - \bar{\mathbf{L}}(-\theta_0)$

$$\Delta\mathbf{H}(\theta_0) = \bar{\mathbf{H}}(\theta_0) - \bar{\mathbf{H}}(-\theta_0)$$

$$\bar{\mathbf{S}}(\theta_0), \bar{\mathbf{L}}(\theta_0), \bar{\mathbf{H}}(\theta_0) \text{ 和 } N_i^{\{2\}} \quad (i=1, 2, 3)$$

上面这些量可见附录 I

联合(3.8)及(3.9), 且让

$$\mathbf{f}_2 = M_0 \quad (3.10)$$

(3.5)及(3.10)就是求解 \mathbf{g} 和 \mathbf{h} 的基本方程组. 一旦确定了 \mathbf{g} 和 \mathbf{h} , 那么通过(2.6), (3.2)及(3.3)就可求得图 1 所示的介质内的弹性场.

四、单晶铝板

为了说明上面的过程, 取图 1 所示介质为单晶铝 (属立方晶系介质), 其弹性系数为^[17]

$$C_{11} = 10.8 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$$

$$C_{12} = 6.13 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2} \quad (4.1)$$

$$C_{44} = 2.85 \times 10^{10} \text{Nm}^{-2}$$

当 $a=b$ 时, 由(3.5)及(3.10)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= -0.8032(M_0/a)(0, 1, 0)^T \\ \mathbf{h} &= -4.705 \times 10^{-12}(M_0/a)(1, 0, 0)^T \end{aligned} \quad (4.2)$$

取边界 Ω 上的单位切向量及法向量分别为 $\mathbf{n}(\theta)$ 和 $\mathbf{m}(\theta)$, 图1.

$$\mathbf{n}^T(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \quad \mathbf{m}^T(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)^T \quad (4.3)$$

$$\tan\theta = -\text{cth}\psi \quad (4.4)$$

所以, 由[3]得, 在垂直边界 Ω 的单位面上的应力矢量 \mathbf{t}_n 为

$$\mathbf{t}_n = \sin\theta \mathbf{t}_{,1} - \cos\theta \mathbf{t}_{,2} \quad (4.5)$$

式中 $\mathbf{t}_{,1}$ 及 $\mathbf{t}_{,2}$ 可以由(2.16)确定.

沿 Ω 的环向应力 σ_n 为

$$\sigma_n = \mathbf{n}^T(\theta) \mathbf{t}_n = -(\mathbf{t}_{,2})_1 \cos^2\theta + [(\mathbf{t}_{,1})_1 - (\mathbf{t}_{,2})_2] \sin\theta \cos\theta + (\mathbf{t}_{,1})_2 \sin^2\theta \quad (4.6)$$

其分布可见图2示.

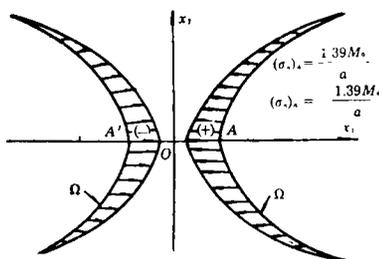


图2 环向应力分布图

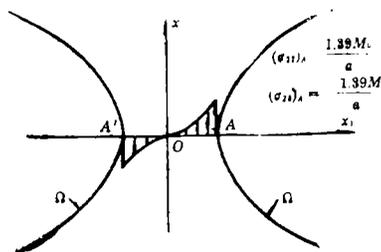


图3 $x_2=0$ 面上的应力分布

类似地, 也可以求得 $x_2=0$ 面上的应力分布, 结果见图3.

从上两图可以发现, 所计算的结果都以 x_1 轴为对称轴, 而反对称于 x_2 轴, 并且从计算结果发现, 在 $x_2=0$ 面上, 剪应力为0.

五、双 边 裂 纹

若(3.1)中的 $b \rightarrow 0$, 那么双曲线边界将退化成一双边裂纹, 它的两裂纹尖端 (A 与 A') 之间相距 $2a$, 由此可以确定它的应力强度因子 (k_1, k_2, k_3).

因为 $b=0$, (3.9) 变为

$$f_2 = -(\pi/2) a g_2 \quad (5.1)$$

联合(3.10)及(5.1), 就有

$$g_2 = -2M_0/\pi a \quad (5.2)$$

为了后面运算的方便, 引入两个新的矢量

$$\mathbf{K}_1 = \lim_{z \rightarrow a^-} \sqrt{2\pi(a-z)} \mathbf{t}_{,1} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{K}_1 = \lim_{z \rightarrow a^-} \sqrt{2\pi(a-z)} \mathbf{t}_{,2} \quad (5.4)$$

将(2.16)代入(5.3)及(5.4), 得

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_I &= -\sqrt{\pi/a} \mathbf{g} \\ \mathbf{K}_I &= \sqrt{\pi/a} [\mathbf{N}_I^T(0) \mathbf{g} + \mathbf{N}_I(0) \mathbf{h}] \end{aligned} \quad (5.5)$$

所以, A 点的应力强度因子如下:

a. 第一类应力强度因子 k_1

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow a^-} \sqrt{2\pi(a-z)} \sigma_{22}(z) = (\mathbf{K}_I)_2 = 2/(a\sqrt{\pi a}) M_0 \quad (5.6)$$

从上式可以发现, k_1 与材料的弹性性质无关, 并且它恒等于各向同性弹性材料的第一类应力强度因子^[18].

b. 第二类应力强度因子 k_2

$$k_2 = \lim_{z \rightarrow a^-} \sqrt{2\pi(a-z)} \sigma_{12}(z) = (\mathbf{K}_I)_1 = (\mathbf{K}_I)_2 = -\sqrt{\pi/a} g_1 \quad (5.7)$$

c. 第三类应力强度因子 k_3

$$k_3 = \lim_{z \rightarrow a^-} \sqrt{2\pi(a-z)} \sigma_{13}(z) = (\mathbf{K}_I)_3 \quad (5.8)$$

下面, 我们讨论立方晶系介质的三类应力强度因子, 立方晶系的弹性系数为

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{12} \delta_{ij} \delta_{kl} + C_{44} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &+ (C_{11} - C_{12} - 2C_{44}) \sum_{r=1}^3 \delta_{ri} \delta_{rj} \delta_{rk} \delta_{rl} \end{aligned} \quad (5.9)$$

它的基本弹性系数矩阵

$$\mathbf{N}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{1}{C_{44}} & 0 & 0 \\ -\frac{C_{12}}{C_{11}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/C_{44} \\ \frac{C_{12}^2 - C_{11}^2}{C_{11}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_{12}}{C_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{44} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

由附录 III, 立方晶系介质的弹性矩阵 \mathbf{H} , \mathbf{L} 及 \mathbf{S} 分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= S'_{11} (1 - gh) \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & q_1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{L} &= h/S'_{11} \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & q_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{S} &= gh \begin{pmatrix} 0 & -e & 0 \\ e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.11)$$

其中 $g, h, S'_{11}, e, q_\alpha (\alpha=1, 2)$ 见附录 III.

所以, 由(5.11), (3.5)和(3.8), 即得

$$\begin{aligned} g_1 &= 0, \quad g_2 = -2M_0/(\pi a), \quad g_3 = 0 \\ h_1 &= -2gS'_{11}M_0/(\pi a), \quad h_2 = 0, \quad h_3 = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

则A点的应力强度因子为

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{2M_0}{a\sqrt{\pi a}} \\ k_2 &= k_3 = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

六、结 论

文章通过Stroh方法研究了各向异性弹性材料的双曲线边值问题, 求解了介质的应力应变场, 并以单晶铝材料为例作了详细的说明, 最后还分析了双边裂纹问题, 确定了它的三类应力强度因子, 并且发现第三类应力强度因子与材料的弹性系数无关。

附 录 I

从[2.12~2.16], 可以得到下列恒等式

$$\begin{aligned} A \langle p_a^a \rangle A^T &= 1/2(N_2^{(a)}M - iN_1^{(a)}H) \\ A \langle p_a^a \rangle B^T &= 1/2(N_1^{(a)}N^{-1} + iN_2^{(a)}L) \\ B \langle p_a^a \rangle A^T &= 1/2(N_1^{(a)}M - iN_3^{(a)}H) \\ B \langle p_a^a \rangle B^T &= 1/2(N_3^{(a)}M^{-1} + iN_1^{(a)T}L) \end{aligned} \quad (A1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} 2A \langle \ln \zeta_a \rangle A^T &= -i(\ln r)H + \pi\{\overline{H}(\theta) - i[\overline{S}(\theta)H + \overline{H}(\theta)S^T]\} \\ 2A \langle \ln \zeta_a \rangle B^T &= (\ln r)(I - iS) + \pi\{\overline{S}(\theta) + i[\overline{H}(\theta)L - \overline{S}(\theta)S]\} \\ 2B \langle \ln \zeta_a \rangle A^T &= (\ln r)(I - iS^T) + \pi\{\overline{S}^T(\theta) + i[\overline{L}(\theta)H + \overline{S}^T(\theta)S^T]\} \\ 2B \langle \ln \zeta_a \rangle B^T &= i(\ln r)L + \pi\{-\overline{L}(\theta) + i[\overline{L}(\theta)S + \overline{S}^T(\theta)L]\} \end{aligned} \right\} \quad (A1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} BA^{-1} &= (S^T + iI)H^{-1} = -H^{-1}(S - iI) \\ AB^{-1} &= -(S + iI)L^{-1} = L^{-1}(S^T - iI) \end{aligned} \right\} \quad (A1.3)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \left\langle \begin{matrix} N_1^{(a)} & N_2^{(a)} \\ N_3^{(a)} & N_1^{(a)T} \end{matrix} \right\rangle &= N^n, \quad M = H^{-1}(I + iS) = (I - iS^T)H^{-1} \\ & \quad M^{-1} = L^{-1}(I + iS^T) = (I - iS)L^{-1} \\ \zeta_a &= x_1 + p_a x_2, \quad x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \tan^{-1} x_2/x_1 \\ \overline{H}(\theta) &= 1/\pi \int_0^\theta N_2(W)dw, \quad \overline{L}(\theta) = -1/\pi \int_0^\theta N_3(w)dw, \quad \overline{S}(\theta) = 1/\pi \int_0^\theta N_1(w)dw \\ N_1(w) &= -T^{-1}(w)R^T(W) \quad N_2(w) = T^{-1}(w) \quad N_3(w) = R(w)T^{-1}(w)R^T(w) - Q(w) \\ Q_{ih}(w) &= C_{ih1}n_1(w)n_1(w), \quad R_{ih}(w) = C_{ih1}n_1(w)m_1(w), \quad T_{ih}(w) = C_{ih1}m_1(w)m_1(w) \\ n(w) &= (\cos w, \sin w, 0)^T, \quad m(w) = (-\sin w, \cos w, 0)^T \end{aligned} \right\} \quad (A1.4)$$

对于适当选择的一组基矢量 (a, b, c) 及其倒易基矢量 (a', b', c') , 我们可将矩阵 S, H, L 及 L^{-1} 表示成谱形式

$$\begin{aligned} S &= s(a \otimes b' - b \otimes a') \\ H &= \mu(a \otimes a + b \otimes b) + \beta c \otimes c \\ L &= \mu^{-1}F(a' \otimes a' + b' \otimes b') + \beta^{-1}c' \otimes c' \\ L^{-1} &= \mu F^{-1}(a \otimes a + b \otimes b) + \beta c \otimes c \end{aligned} \quad (A1.5)$$

式中 s, μ, β 及 F 是实参数,

附录 I

利用矩阵方法, 得

$$D = \begin{pmatrix} N_1^T(0)S^T + N_3(0)H & N_3(0)S - N_1^T(0)L \\ S^T & -L \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N_3(0)H + N_3(0)SL^{-1}S^T & N_3S - N_1^T L \\ -L & -L \end{pmatrix} \quad (\text{A2.1})$$

所以, D 的秩为

$$\text{rank } D = \text{rank}[N_3H(I - S^T H^{-1} L^{-1} S^T)] + \text{rank } L \quad (\text{A2.2})$$

由附录 I 及 [14], 容易得到

$$I - S^T H^{-1} L^{-1} S^T = 1/(1-s^2)(a' \otimes a + b' \otimes b) + c' \otimes c \quad (\text{A2.3})$$

式中

$$N_3(0) = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \quad (\text{A2.4})$$

*号表示非零因子。

将 (A2.3) 和 (A2.4) 代入 (A2.2), 有

$$\text{rank } D = 5 \quad (\text{A2.5})$$

附录 II

对单斜晶系材料 [19] 中已表示出了 Barnett-Lothe 张量 S , H 及 L 的形式, 由于他们的代数方程可化为一四次方程与二次方程的乘积, 所以特征值 p 可很容易地以这两个方程中求出。设 p_1 和 p_2 分别是四次方程中具正虚部的两个根, 且

$$p_1 + p_2 = a + bi \quad p_1 p_2 = c_1 + di \quad (\text{A3.1})$$

很容易证明 [19]

$$\left. \begin{aligned} H &= S'_{11}(1-gh) \begin{pmatrix} b & d & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & q_1 \end{pmatrix} & L &= h/S'_{11} \begin{pmatrix} e & -d & 0 \\ -d & b & 0 \\ 0 & 0 & q_2 \end{pmatrix} \\ S &= gh \begin{pmatrix} d & -b & 0 \\ e & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.2})$$

其中

$$\left. \begin{aligned} e &= ad - bc > 0, \quad g = S'_{12}/S'_{11} - C_1 > 0 \\ h &= (be - d^2)^{-1} > 1, \quad q = (C_{44}C_{55} - C_{45}^2)^{1/2} \\ q_1 &= [S'_{11}(1-gh)q]^{-1}, \quad q_2 = qS'_{11}h^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.3})$$

上式中, C_{ij} 是 C_{ijkl} 的缩并形式

$$S'_{ij} = S_{ij} - (S_{i3}S_{3j})/S_{33} \quad (\text{A3.4})$$

C_{ij} 及 S_{ij} 可从 [17] 中查到

由 [19], 我们也可得到 a, b, c_1, d 及 S'_{ij} 之间的如下关系

$$\left. \begin{aligned} a &= S'_{16}/S'_{11}, \quad 2c_1 + a^2 + b^2 = (S'_{66} + 2S'_{12})/S'_{11} \\ ac_1 + bd &= S'_{26}/S'_{11}, \quad c_1^2 + d^2 = S'_{22}/S'_{11} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3.5})$$

参 考 文 献

- [1] 钱伟长、叶开沅,《弹性力学》,科学出版社,北京(1980).
- [2] Cherepanov, G. P., *Mechanics of Brittle Fracture*, McGraw-Hill, Inc, (1979).
- [3] Lekhnitskii, S. G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, MIR, Moscow, (1981).
- [4] Wang, S. S. and I. Choi, Boundary layer thermal stress in angle-ply composite laminates, *Modern Developments in Composite Materials and Structures*, ASME, ed. J. R. Vinster, (1979), 315—341.
- [5] Eshelby, J. D., W. T. Read and W. Shockey, Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory, *Acta Metallurgica*, (1)(1953), 251—259.
- [6] Stroh, A. N., Dislocations and cracks in anisotropic elasticity, *Phil Mag.*, (3)(1958), 625—646.
- [7] Stroh, A. N., Steady state problems in anisotropic elasticity, *J. Math. Phys.*, 41(1962), 77—103.
- [8] Barnett, D. M., and J. Lothe, An image force theorem for dislocation in anisotropic bicrystals, *J. Phys. F.*, (4)(1974), 1618—1535.
- [9] Barnett, D. M., J. Lothe, K. Nishioka and R. J. Asaro, Elastic surface waves in anisotropic crystals: a simplified method for calculating Rayleigh velocities using dislocation theory, *J. Phys. F.*, (3)(1973), 1033—1096.
- [10] Asaro, R. J., J. P. Hirth, D. M. Barnett and J. Lothe, The elastic energy of a straight dislocation in an infinite anisotropic elastic medium, *Phys. Stat. Sol. B.*, 60(1973), 261—271.
- [11] Lothe, J. and D. M. Barnett, On the existence of surface-wave solutions for anisotropic elastic half-space with free surface, *J. Appl. Phys.* 47(1976), 428—433.
- [12] Chadwick, P. and T. C. T. Ting, On the structure and invariance of the Barnett-Lothe tensors, *Q. Appl. Math.*, 45(1987), 419—427.
- [13] Ting, T. C. T. Some identities and the structure of Ni in the Stroh formalism of anisotropic elasticity, *Q. Appl. Math.*, 46(1988), 109—120.
- [14] Ting, T. C. T. The Stroh formalism and some invariable quantities in two-dimensional anisotropic elasticity, *Advance in Mechanics*, 22(1992), 145—160.
- [15] Ting, T. C. T. Line forces and dislocations in angularly inhomogeneous anisotropic elastic wedges and spaces, *Q. Appl. Math.*, 47(1988), 123—128.
- [16] Ting, T. C. T. The critical angle of the anisotropic elastic wedge asubjected to uniform tractions, *J. Elast.*, 20(1988), 113—130.
- [17] Auld, B. A. *Acoustic Fields and Waves in Solids*, John Wiley, (1973).
- [18] Sih, G. C. and H. Liebowitz, Mathematical theory of Brittle fracture, *An Advance Treatise on Fracture*, 2, ed. H. Liebowitz, Academic Press(1968), 67—190.
- [19] Ting, T. C. T. Barnett-lothe tensors and their associated tensors for monoclinic materials with the symmetry plane at $x_3=0$, *J. Elast.*, 27(1992), 143—165.

Two-Dimensional Problem of Anisotropic Elastic Body with a Hyperbolic Boundary

Hu Yian-tai Zhao Xing-hua

(*Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics
and Mechanics, Shanghai 200072*)

Abstract

The general and simplified formula for anisotropic medium with a hyperbolic boundary subjected to pure bending M_0 is provided in this paper. The stress and strain fields in medium are obtained. Based upon the above results, we analyse the hoop stress along the hyperbolic curve and the stress distributions on the plane $x_2=0$ for aluminium (cubic crystal). When the boundary curve degenerates into an external crack three kinds of stress intensity factors (k_1, k_2, k_3) are obtained, and it is easily found that the first stress intensity factor k_1 is independent of the material constants.

Key words Stroh's formalism, external crack, stress intensity factor