

# 一类带约束的二维弱奇异积分方程的解\*

云天铨

(华南理工大学工程力学系, 广州 510641)

(1994年3月15日收到初稿, 1994年12月10日收到修改稿)

## 摘 要

本文找出二维弱奇异第一类积分方程

$$\int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \psi) ds k(\psi) d\psi = F(r, \theta)$$

作用着约束方程

$$p(s, \psi) = 0, \text{ 对 } (s, \psi) = (r, \theta) \notin Q = \{(r, \theta) | F(r, \theta) > c_*\}$$

的解 $p$ 。

$$p = p(r, \theta) = \{2/[\pi^2 k(\psi_0)]\} \sqrt{F(r, \theta) - c_*} \quad (0 \leq r \leq r_*)$$

其中 $(s, \psi)$ 是原点在 $M(r, \theta)$ 的局部极坐标,  $(r, \theta)$ 是原点在 $O(0, 0)$ 的总体极坐标;  $k$ 和 $F$ 是给出的连续函数;  $\psi_0$ 是一常数;  $F(r_*, \theta) = c_*$  (常数) 是研究域 $Q$ 的边界围线。

所用方法可推广到三维情形。

**关键词** Radon变换 Abel积分方程 函数的值域 积分中值定理 接触问题 Hertz解

## 一、概 述

接触问题在机械和土木工程中有重要意义。分别由积分方程

$$\int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \psi) ds d\psi = (\alpha - \beta r^2) / (K_1 + K_2) \quad (1.1)$$

和

$$\int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \psi) ds d\psi = (\alpha - Ax^2 - By^2) / (K_1 + K_2) \quad (1.2)$$

所控制的弹性球体接触问题和一般弹性体接触问题的解是 Hertz(1881) 用假设的方法得到的<sup>[1]</sup>。式中 $\alpha, \beta, K_1, K_2, A$ 和 $B$ 是常数,  $(s, \psi)$ 是原点在 $M(r, \theta)$ 的局部极坐标 (源点用); 而 $(r, \theta)$ 和 $(x, y)$ 分别是原点在 $O(0, 0)$ 的总体极坐标和直角坐标 (场点用), 未知函数压力 $p = p(s, \psi) (= p(t, \phi))$ ,  $(t, \phi)$ ——源点用的总体极坐标) 作用有约束方程

$$p(s, \psi) = 0, \text{ 当 } (s, \psi) \notin Q \text{ (接触区)} \quad (1.3)$$

(1.1)式和(1.2)式的左边(L.H.S.)也可以写成另一型式

$$\text{L.H.S.} = \iint_Q \frac{p(x_1, y_1)}{[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]^{1/2}} dx_1 dy_1 \quad (1.4)$$

式中 $(x, y)$ 和 $(x_1, y_1)$ 分别是 $Q$ 中的场点和源点的总体直角坐标。因此, (1.1)和(1.2)属于二

\* 广东省自然科学基金资助项目。

维弱奇异第一类积分方程, 它的积分域 $Q$ 和方程右边的给出函数有关.

虽然Hertz用假设的方法找到这个古典弹性理论著名问题的解, 但是, 作用着约束方程(1.3)的Hertz积分方程(1.1), (1.2)或它的另一型式(1.5), 的解未被用严格的数学方法推导出来. 另一方面, 如作者在[2]中所指出的(1.1), (1.2)并非是Hertz接触问题精确的积分方程, 因为它忽略了接触区中的点的水平位移. 考虑垂直和水平这二者的位移而在[2]中推导出的精确的积分方程是很复杂的, 它的解还未曾求得过.

对于轴对称接触情形, 作者在文[3]中研究过所谓拟精确积分方程

$$\int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} p ds d\psi + \varepsilon r \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} p ds \cos\psi d\psi = G(r) \quad (1.5)$$

作用着约束(1.3)的渐近解. 这个拟精确的积分方程是由精确的弹性球体接触方程([2]的(2.5)式)略去高阶小项而得. 渐近解的求得是基于作用着约束(1.3)的积分方程

$$\int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} p ds d\psi = F(r) \quad (1.6)$$

的解, 其中(1.6)的左边与(1.1)同, 但右边的给出函数 $F(r)$ 比(1.1)更一般. 作者在[4]中用Radon变换, 变换变数以及用轴对称性的假设用严格的数学方法推导出积分方程(1.6)作用着约束(1.3)的解.

对于非轴对称接触情形, 无论是关于(1.2)作用着(1.3)的解的数学推导或者是拟精确积分方程的渐近解, 还未见有公开发表的文献. 本文研究比(1.2)和(1.6)更为一般的二维弱奇异积分方程

$$\int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \psi) ds k(\psi) d\psi = F(r, \theta) \quad (1.7)$$

作用着约束方程

$$p(s, \psi) = 0, \text{ 当 } (s, \psi) = (r, \theta) \notin Q = \{(r, \theta) | F(r, \theta) > c_*\} \quad (1.8)$$

的解. 应用积分中值定理和函数的值域, 分别将(1.7)的左、右边化为一维情形, 又用Radon变换, 变换变数将此一维积分方程化为标准的Abel积分方程, 就能推导出解答 $p$ .

$$p = p(r, \theta) = \{2/[\pi^2 k(\psi_0)]\} \sqrt{F(r, \theta) - c_*} \quad (0 \leq r \leq r_*) \quad (1.9)$$

将此解应用于(1.2)式, 得到的结果与Hertz用假设(猜)得到的完全一致. 这个解还将类似作者在[3]中将(1.6)的解用于拟精确积分方程(1.5)求渐近解的作用一样, 用于求非轴对称情形的拟精确积分方程的渐近解(另文讨论).

类似的方法, 推广到了三维情形, 求

$$\int_0^\pi \int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} p(z, z, \psi) ds R(z) dz k(\psi) d\psi = F(r, z, \theta) \quad (1.10)$$

作用着约束方程

$$p(s, z, \psi) = 0, \text{ 当 } (s, z, \psi) \notin Q = \{(r, z, \theta) | F(r, z, \theta) > c_*\} \quad (1.11)$$

的解. 此解将在CT的三维分析中 useful.

## 二、作用着约束方程(1.8)的积分方程(1.7)的解

一个以局部极坐标 $(s, \psi)$ 二变数函数 $f$ 的Radon变换仍是一个二变数函数, 但以总体极坐标 $(h, \lambda)$ 来表示, 它定义为<sup>[5]</sup>:

$$[Rf](h, \lambda) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{h^2+v^2}, \lambda + tg^{-1}(v/h)) dv \quad (2.1)$$

函数  $f$  的 Radon 变换代表函数  $f(s, \psi)$  沿一倾角为  $\psi$  的直线  $L$  的线积分,  $h$  表示  $O(0, 0)$  和  $L$  的距离,  $\lambda$  为  $OH$  和  $x$  轴的夹角,  $OH \perp L$ ,  $\overline{OH} = h$ , 且当  $(s, \psi)$  位于研究区域  $Q$  之外时有  $f(s, \psi) = 0$  (图 1)。

根据函数的 Radon 变换的定义, (1.7) 的左边 (L.H.S.) 可写成

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \psi) ds k(\psi) d\psi = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} p(t, \phi) ds k(\psi) d\psi \\ &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} p(h^2+v^2, \lambda + tg^{-1}(v/h)) dv k(\psi) d\psi \\ &= \int_0^\pi [Rp](h, \lambda) k(\psi) d\psi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [Rp](h, \lambda) k(\lambda) d\lambda \\ &= \pi k(\lambda_0) [Rp](h_0, \lambda_0) = \pi k(\psi_0) \int_{V_I}^{V_J} p(v, \psi_0) dv \\ &= \pi k(\psi_0) \int_{t_I}^{t_J} \frac{t p dt}{\pm (t^2-h^2)^{1/2}} = \frac{\pi k(\psi_0)}{2} \left[ \int_{t_I^2}^{t_J^2} \frac{p dt^2}{(t^2-h^2)^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{h^2}^{t_J^2} \frac{p dt^2}{(t^2-h^2)^{1/2}} \right] \\ &= \frac{\pi k(\psi_0)}{2} \left[ \int_0^{z_A} \frac{p du_A}{\sqrt{z_A-u_A}} + \int_0^{z_B} \frac{p du_B}{\sqrt{z_B-u_B}} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

式中  $v = s - r \cos(\theta + \psi)$ ,  $t^2 = h^2 + v^2$ ,

$h = r \sin(\theta + \psi)$ ,  $\lambda + \psi = \pi/2$ ,  $h_0 = r \sin(\theta + \psi_0)$ ,

$\psi_0 \in [0, \pi]$ ,  $V_I, V_J, t_I$  和  $t_J$  分别是  $v$  和  $t$  在  $\partial Q$  上的点  $I$  和  $J$  的值。在上述推导过程中, 用到 (1.8) 和函数的积分中值定理。中值  $\psi_0$  可用下文方法定出。为得到标准型式的积分方程, 引入上述新变数, 其中

$$u_A = t_I^2 - (t^2 - h^2), \quad u_B = t_J^2 - (t^2 - h^2) \quad (2.3)$$

$$z_A = t_I^2, \quad z_B = t_J^2, \quad (z_A, z_B \geq 0) \quad (2.4)$$

(2.2) 式的第 1 和第 2 个积分应分别为  $z_A$  和  $z_B$  的某一函数, 记为  $g$ , 即

$$g(z_A) = \int_0^{z_A} \frac{p du_A}{\sqrt{z_A - u_A}}, \quad g(z_B) = \int_0^{z_B} \frac{p du_B}{\sqrt{z_B - u_B}} \quad (2.5)$$

显然,  $g$  是一连续函数, 由连续函数的中值定理知, 存在一个  $z (z_A \leq z \leq z_B)$  使得

$$g(z_A) + g(z_B) = 2g(z) \quad (2.6)$$

$$g(z) = \int_0^z \frac{p du}{\sqrt{z-u}} \quad (2.7)$$

将 (2.6), (2.2) 代入 (1.7), 得

$$g(z) = F(r, \theta) / [\pi k(\psi_0)] \quad (2.8)$$

由 (2.8) 可见,  $g(z)$  是一已知函数, 因此 (2.7) 式是个标准的 Abel 积分方程, 而它的解是熟知的<sup>[6]</sup>, 即若记

$$y_1(w) = \int_0^w \frac{g(z) dz}{\sqrt{w-z}} \quad (2.9)$$

则(2.7)的解 $p$ 为:

$$p = p(w) = p(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \frac{dy_1}{dw} = \frac{2}{\pi} \left[ \sqrt{w} g'(0) + \int_0^w \sqrt{w-u} g''(u) du \right] \quad (2.10)$$

式中  $g' = dg/dw$ ,  $g = g(z)$  及  $g(0) = 0$ .

$$w = F(r, \theta) \quad (2.11)$$

我们来解释一下(2.10)和(2.11)中的 $p$ 和 $w$ .

1.  $p = p(r, \theta)$  的值是二变数 $r$ 和 $\theta$ 的函数. 然而, 若记

$$G(r, \theta) = c \quad (2.12)$$

代表 $p$ 的等值围线, 其中 $c$ 是 $G(r, \theta)$ 的值, 则在  $G(r, \theta) = c$  上的不同的点的 $p$ 值却是相同的, 即

$$p(r_1, \theta_1) = p(r_2, \theta_2) = p(c), \text{ 若 } (r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2) \in G(r, \theta) = c \quad (2.13)$$

(2.13)意味着我们可以用一个变数 $c$ 来代表两个变数 $(r, \theta)$ 的函数 $p$ 的值. 因此,  $p(w) = p(r, \theta)$ , 而 $w$ 是通过点 $(r, \theta)$ 的 $p$ 的围线的值.

2. 令

$$F(r_*, \theta) = c_* \quad (2.14)$$

表示接触区 $Q$ 的边界围线 $\partial Q$ , 其中下标 $*$ 用来表示 $\partial Q$ 上的点的. 由(1.8)

$$p(c_*) = p(r_*, \theta) = 0, \text{ 对 } (r_*, \theta) \in F(r_*, \theta) = c_* \quad (2.15)$$

(2.15)式意味着 $F(r_*, \theta) = c_*$ 是 $p$ 的一根等值围线. 所以,

$$G(r, \theta) = F(r, \theta) = c \quad (2.16)$$

是一族不同 $c$ 值的 $p$ 的等值围线. 由(2.16), 有 $w = F(r, \theta)$ , 即(2.11)式.

由(2.8)和(2.11)式, 有 $g' = 1/[\pi k(\psi_0)]$ ,  $g'' = 0$ . 于是(2.10)式变成:

$$p = p(w) = p(r, \theta) = \{2/[\pi^2 k(\psi_0)]\} \sqrt{w} \quad (c_* \leq w \leq F(0, \theta)) \quad (2.17)$$

为了满足(1.8), 即当 $w = c_*$ 时 $p(w) = 0$ , 引入新变数 $w_1 = w - c_*$ 并代入(2.17)式, 得

$$p = p(w_1) = \{2/[\pi^2 k(\psi_0)]\} \sqrt{w_1} \quad (0 \leq w_1 \leq F(0, w) - c_*) \quad (2.18)$$

或

$$\begin{aligned} p &= p(r, \theta) = \{2/[\pi^2 k(\psi_0)]\} \sqrt{F(r, \theta) - c_*} \\ &= \{2/[\pi^2 k(\psi_0)]\} \sqrt{F(r, \theta) - F(r_*, \theta)} \quad (0 \leq r \leq r_*) \end{aligned} \quad (2.19)$$

这就是本文要求的解.

**中值 $\psi_0$ 的决定:**

利用积分中值定理, 由(1.7)式知存在有 $\psi_0 \in [0, \pi]$ , 使得

$$\pi k(\psi_0) \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \psi_0) ds = F(r, \theta) \quad (2.20)$$

和

$$\int_0^{\psi_0} \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \psi) ds k(\psi) d\psi = \int_{\psi_0}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \psi) ds k(\psi) d\psi \quad (2.21)$$

由(1.7), (2.20)和(2.21)得

$$\int_0^{\psi_0} \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \psi) ds k(\psi) d\psi = F(r, \theta) / 2 \quad (2.22)$$

记

$$H(\psi_0) = k(\psi_0) \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \psi_0) ds = \frac{1}{\pi} F(r, \theta) \tag{2.23}$$

转换  $ds$  为  $dw$ , 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(s, \psi_0) ds = 2 \int_{c_*}^{c(\psi_0)} p(w) dw \tag{2.24}$$

式中  $c(\psi_0) = F(r, \theta)$  是和具有倾角为  $\psi_0$  的过给定点  $M(r, \theta)$  的直线相切的  $p$  的一根围线 (图 2)。

将 (2.24), (2.17) 代入 (2.23), 得

$$H(\psi_0) = (8/\pi^2) [c^{3/2}(\psi_0) - c_*^{3/2}] \tag{2.25}$$

将 (2.23), (2.25) 代入 (2.22),  $d/d\psi_0$  两边, 得:

$$(2/3) [c^{3/2}(\psi_0) - c_*^{3/2}] k(\psi_0) = [\pi^2 F(r, \theta) / 8] k'(\psi_0) \tag{2.36}$$

解 (2.26) 就可确定  $\psi_0$ 。

由 (2.26) 定  $\psi_0$  是很费力的运算, 实际上若  $p$  代表接触问题的接触应力, 求  $p$  用不着由 (2.26) 定  $\psi_0$ , 而直接由平衡方程 (式中  $P$  为压力)

$$\iint_Q p dQ = P \tag{2.27}$$

确定 (2.19) 式中的常数  $k(\psi_0)$ , 将简单得多。

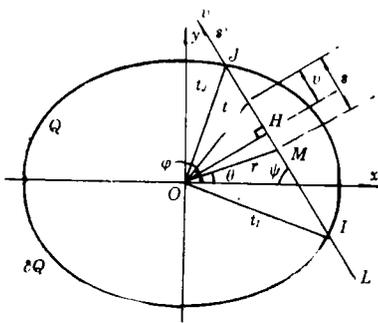


图 1

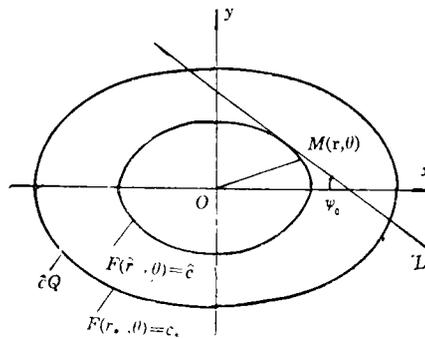


图 2

例 以一般弹性体相接触的 Hertz 接触问题为例, 即给出的函数  $F$  和  $k$  是:  $k(\psi) \equiv 1$ ,

$$F = (\alpha - Ax^2 - By^2) / (K_1 + K_2) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p ds d\psi \tag{2.28}$$

式中  $\alpha, A, B, K_1$  和  $K_2$  是常数,  $(x, y)$  是直角坐标。由接触体的几何条件, 即变形前两物体在  $\partial Q$  上的点的间隙等于  $c_*$ , 有

$$2c_* = \alpha / (K_1 + K_2) \tag{2.29}$$

由 (2.19) 式, 得

$$p = p(r, \theta) = (1/\pi^2) [2\alpha / (K_1 + K_2)]^{1/2} \sqrt{1 - (r/r_*)^2} \quad (0 \leq r \leq r_*) \tag{2.30}$$

$$\text{式中 } (1/r_*)^2 = (\cos\theta/a_*)^2 + (\sin\theta/b_*)^2 \tag{2.31}$$

$$a_*^2 = \alpha / (2A), \quad b_*^2 = \alpha / (2B) \tag{2.32}$$

$a_*$  和  $b_*$  是椭圆的边界围线  $\partial Q ((x/a_*)^2 + (y/b_*)^2 = 1)$  的半轴。将 (2.30) 的  $p$  代入平衡方程

$$2 \int_0^{\pi} \int_0^{r_*} p(r, \theta) r dr d\theta = P \tag{2.33}$$

求得

$$\alpha = 9\pi^2 P^2 (k_1 + k_2) / [8a_*^2 b_*^2] \quad (2.34)$$

$$p = p(r, \theta) = p(0) \sqrt{1 - (r/r_*)^2} \quad (0 \leq r \leq r_*) \quad (2.35)$$

$$p(0) = p(0, \theta) = 3P / (2\pi a_* b_*) \quad (2.36)$$

这结果与Hertz用假设的方法得到的解 ([1]的p.416) 完全一致。

### 参 考 文 献

- [1] Timoshenko, S. P. and J. N. Goodiar, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co., New York, (1970), 414.
- [2] Yun, T. Q., Solution of Hertz's contact problem by Radon transform, *Proc. 2nd Int. Conf. on Nonlinear Mech.*, (Edited by W. Z. Chien et. al.), (1993), 215—218.
- [3] Yun, T. Q., Asymptotic solution of small parametered 2-D integral equation arising from contact problem of elasticity based on the solution of a 2-D integral equation, *Proceedings of AMS*, (to appear).
- [4] Yun, T. Q., The exact integral equation of Hertz's contact problem, *Appl. Math. and Mech.*, 12(2)(1991), 181—185.
- [5] Herman, G. T., The fundamentals of computerized tomography, *Image Reconstruction from Projections*, Academic Press, INC, New York, (1980).
- [6] 云天铨, 《积分方程及其在力学中的应用》, 华南理工大学出版社, 广州(1990), 60.

## Solution of a 2-D Weak Singular Integral Equation with Constraint

Yun Tian-quan

(Department of Mechanics, South China University of Technology, Guangzhou 510641)

### Abstract

In this paper, the solution of a 2-D weak singular integral equation of the first kind

$$\int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty p(s, \psi) ds k(\psi) d\psi = F(r, \theta)$$

subjected to constraint

$$p(s, \psi) = 0, \text{ for } (s, \psi) = (r, \theta) \notin Q = \{(r, \theta) | F(r, \theta) > C_*\}$$

is found and listed

$$p = p(r, \theta) = \{2c_*^{3/2} / [\pi^2 k(\psi_0)]\} \sqrt{F(r, \theta) - c_*} \quad (0 \leq r \leq r_*)$$

where  $(s, \psi)$  is a local polar coordinating with origin at  $M(r, \theta)$ ,  $(r, \theta)$  is the global polar coordinating with origin at  $O(0, 0)$ ;  $k$  and  $F$  are given continuous functions;  $\psi_0$  and  $C$  are constants;  $F(r_*, \theta) = c_*$  (const.) is the boundary contour of considering range  $Q$ .

The method used can be extended to 3-D cases.

**Key words** Radon transform, Abel integral equation, range, theorem of integral mean value of function, contact problem, Hertz's solution