

一个非线性波动方程的计算机代数-摄动解

王明祺 戴世强

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(1994年7月22日收到)

摘 要

本文采用计算机代数-摄动法讨论一个非线性波动方程的Cauchy问题高阶渐近解, 将特征坐标变形与重整化方法相结合, 消除直接展开解的长期项, 并利用计算机代数软件进行符号运算, 得到该问题的四项摄动解, 所得的渐近解与数值解的比较表明: 对较小的 ε , 两者相吻合; 对较大的 ε (如 $\varepsilon=0.25$), 两者也相当符合。

关键词 非线性波动 摄动 计算机代数 重整化法 近似解析特征线法

一、引 言

摄动法作为解决非线性问题的一个有力工具, 已得到了广泛的应用(参看文献[1~3]), 但是, 为了得到更为准确的高阶解, 随着摄动阶数的提高, 计算过程的繁重程度陡增, 传统的手工推导已难以胜任, 且无法保证结果的正确性。于是, 一种将摄动技巧与计算机代数相结合的近似解析方法便应运而生(参看文献[4,5])。

计算机代数, 又称符号运算, 是计算机科学的分支学科, 研究使用计算机进行公式推演, 包括推演的算法、语言和系统^[6]。利用计算机代数系统, 可使人们从摄动计算的繁冗劳动中解放出来, 因此前途无量。我们尝试求得了 Duffing 方程的十五阶计算机代数-摄动解^[7], 并进而编制了FORTRAN程序求得了八十二阶渐近解^[8], 且用 Domb-Sykes 图证明了渐近级数解的收敛半径为1。而后, 又用计算机代数系统MATHEMATICA 分析了较为困难的界面孤立波解的高阶近似, 得到了令人满意的四阶渐近解^[9]。实践中, 我们发现, 由于利用了计算机, 公式推导和数值计算的准确性得到了保证, 而且从理论上讲, 只要内存和时间允许, 可以得经任意阶数的摄动解。当然, 实际情况是, 计算机容量不可能是无限的。正如 M. van Dyke 教授所指出的^[10], 计算机代数求解的最大困难在于所谓“中间表达式膨胀”, 即对于并不十分复杂的问题, 中间推导、计算过程过于庞杂, 造成计算机运算时的溢出, 对于复杂问题更是如此。本文将问题的求解过程适当地分解成若干步骤, 前一步运行的结果存入文件, 作为下一步推导计算的输入文件, 依此类推, 有效地减少了参与运算的中间表达式, 基本上解决了因内存不足而产生的溢出问题。

* 国家自然科学基金和上海市自然科学基金资助的课题。

本文中, 考虑非线性波动方程的Cauchy问题

$$\left. \begin{aligned} u_{t\eta} - u_{\xi\xi} &= \varepsilon u_{\xi} u_{\xi\xi} \quad (0 < \varepsilon \ll 1) \\ u(x, 0) &= 2 \tanh x \\ u_t(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

引进特征坐标:

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t \quad (1.2)$$

(1.1)式化为

$$\left. \begin{aligned} u_{\xi\eta} &= -\frac{1}{8} \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) (u_{\xi} + u_{\eta})^2 \\ u(\xi, \xi) &= 2 \tanh \xi \\ u_{\xi}(\xi, \xi) &= u_{\eta}(\xi, \xi) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

我们采用由林家翘和P. A. Fox的近似解析特征线法(参看[11])确定问题(1.3)的两族特征线的近似形式和相应的高阶渐近解。然而, 如果通过特征线变形来直接解方程, 其推导过程十分繁杂, 这里采用M. Ф. Прицуло和P. D. Usher提出的重整化步骤^[11], 即先求出问题(1.3)的正则摄动解, 然后代入经变形的特征坐标并作Taylor展开, 消去长期项, 最终得到所要求的解。我们采用计算机代数系统 MATHEMATICA 作符号运算, 求得了四项渐近解的解析表达式, 并对 $\varepsilon = 0.1, 0.25$ 这两种情况给出了特征线族和不同时刻的波形曲线, 为了验证渐近解的正确性, 采用有限差分法对问题(1.3)作了数值计算, 并将渐近解与数值解作了比较, 其符合情况令人满意。

二、方法概述

将方程(1.3)的解 $u(\xi, \eta)$ 作摄动展开

$$u = u_0(\xi, \eta) + \varepsilon u_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \eta) + \dots \quad (2.1)$$

代入(1.3)式, 得到如下递推方程:

$$u_{0,\xi\eta} = 0, \quad u_0(\xi, \xi) = 2 \tanh \xi, \quad u_{0,\xi}(\xi, \xi) = u_{0,\eta}(\xi, \xi) \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{k,\xi\eta} &= \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) H_k, \\ &\quad (k=1, 2, 3, \dots) \\ u_k(\xi, \xi) &= 0, \quad u_{k,\xi}(\xi, \xi) = u_{k,\eta}(\xi, \xi) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\text{其中} \quad H_k = -\frac{1}{8} \sum_{i=0}^{k-1} (u_{i,\xi} + u_{i,\eta}) (u_{k-1-i,\xi} + u_{k-1-i,\eta}) \quad (2.4)$$

容易得到, (2.2)的解为

$$u_0 = \tanh \xi + \tanh \eta \quad (2.5)$$

而(2.3)的解为

$$u_k = \int_{\eta}^{\xi} H_k(\xi_1, \eta) d\xi_1 + \int_{\xi}^{\eta} H_k(\xi, \eta) d\eta_1 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (2.6)$$

于是我们可以递推地求得直接展开解(2.1)的各项 $u_k(\xi, \eta)$, 但是, 它们的表达式中含有长期项, 必须予以消除。作为例证, 我们给出第二项解:

$$u_1 = \frac{1}{8}(\xi - \eta)(\operatorname{sech}^4 \xi - \operatorname{sech}^4 \eta) + \frac{1}{4}(\operatorname{sech}^2 \xi - \operatorname{sech}^2 \eta)(\tanh \xi - \tanh \eta) \quad (2.7)$$

上式中右端第一项即为长期项, 因为 $\xi - \eta = -2t$. 为了消除长期项, 对特征坐标 ξ, η 作如下变形^[11]:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r + \varepsilon \xi_1(r, s) + \varepsilon^2 \xi_2(r, s) + \varepsilon^3 \xi_3(r, s) + \dots \\ \eta &= s + \varepsilon \eta_1(r, s) + \varepsilon^2 \eta_2(r, s) + \varepsilon^3 \eta_3(r, s) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

其中 r, s 为新的特征坐标, $\xi_n, \eta_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 为待定函数, 由消除长期项的条件确定. 将(2.8)式代入已确定的直接展开解(2.1), (2.5), (2.6), 在 (r, s) 邻近作 Taylor 展开, 由消除长期项的要求求出 ξ_n, η_n , 从而得到各阶摄动解. 仍以一阶解为例, 由(2.5), (2.7), (2.8)式, 经 Taylor 展开, 有

$$\begin{aligned} u &= \tanh r + \tanh s + \varepsilon [\xi_1(r, s) \operatorname{sech}^2 r + \eta_1(r, s) \operatorname{sech}^2 s \\ &\quad + \frac{1}{8}(r-s)(\operatorname{sech}^4 r - \operatorname{sech}^4 s) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\operatorname{sech}^2 r - \operatorname{sech}^2 s)(\tanh r - \tanh s)] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

从而求得

$$\xi_1 = \frac{1}{8}(r-s) \operatorname{sech}^2 r, \quad \eta_1 = -\frac{1}{8}(r-s) \operatorname{sech}^2 s \quad (2.10)$$

于是有如下形式的一阶解

$$\left. \begin{aligned} u &= \tanh r + \tanh s + \frac{1}{4}(\operatorname{sech}^2 r - \operatorname{sech}^2 s)(\tanh r - \tanh s) + O(\varepsilon^2) \\ \xi &= r + \frac{1}{8}\varepsilon(r-s) \operatorname{sech}^2 r + O(\varepsilon^2), \quad \eta = s - \frac{1}{8}\varepsilon(r-s) \operatorname{sech}^2 s + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

经反演运算, 并利用(1.2)式, 可得

$$r = x - t - \frac{\varepsilon}{4}t \operatorname{sech}^2(x-t) + O(\varepsilon^2), \quad s = x + t + \frac{\varepsilon}{4}t \operatorname{sech}^2(x+t) + O(\varepsilon^2) \quad (2.12)$$

而 $r = \text{const}$ 和 $s = \text{const}$ 即为两族经变形后的一阶近似特征线.

三、计算机代数-摄动解

根据上节的解法和思路, 我们利用计算机代数系统 MATHEMATICA, 先求得三阶近似直接展开解, 而后再重整化后得到一致有效的三阶渐近解, 具体结果如下:

$$\begin{aligned} u &= \tanh r + \tanh s + \frac{1}{4}\varepsilon(\operatorname{sech}^2 r - \operatorname{sech}^2 s)(\tanh r - \tanh s) \\ &\quad + \frac{1}{96}\varepsilon^2(\operatorname{sech}^2 r - \operatorname{sech}^2 s)[22(\tanh r + \tanh s) + 8\operatorname{sech}^2 r \tanh r \\ &\quad + 3\operatorname{sech}^2 r \tanh s - 3\operatorname{sech}^2 s \tanh r - 8\operatorname{sech}^2 s \tanh s] \\ &\quad + \frac{1}{384}\varepsilon^3(\operatorname{sech}^2 r - \operatorname{sech}^2 s)[-72(\tanh r - \tanh s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -104\text{sech}^2r\tanh r+68\text{sech}^2r\tanh s-68\text{sech}^2s\tanh r \\
& +104\text{sech}^2s\tanh s+24\text{sech}^4r\tanh r-85\text{sech}^4r\tanh s \\
& +85\text{sech}^4s\tanh r-24\text{sech}^4s\tanh s \\
& +27\text{sech}^2r\text{sech}^2s(\tanh r-\tanh s)]+O(\varepsilon^5)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

式中 r 和 s 为经变形的特征坐标, 其表达式如下:

$$\begin{aligned}
r &= x-t-\frac{1}{4}\varepsilon t\text{sech}^2(x-t) \\
& +\frac{1}{196}\varepsilon^2t\{24\text{sech}^2(x-t)[1-\tanh(x-t)\tanh(x+t)] \\
& -4\text{sech}^4(x-t)[7+9\tanh(x-t)] \\
& -3\text{sech}^2(x+t)[\text{sech}^2(x-t)+\text{sech}^2(x+t)]\} \\
& +\frac{1}{1536}\varepsilon^3t\{-176\text{sech}^2(x-t)+72\text{sech}^4(x-t)+232\text{sech}^6(x-t) \\
& -72\text{sech}^4(x+t)+92\text{sech}^6(x+t) \\
& +\text{sech}^2(x-t)\text{sech}^2(x+t)[24-24\text{sech}^2(x-t)-31\text{sech}^2(x+t)] \\
& +4\tanh(x-t)\tanh(x+t)[44\text{sech}^2(x-t)+4\text{sech}^4(x-t) \\
& -7\text{sech}^2(x-t)\text{sech}^2(x+t)-5\text{sech}^4(x+t)] \\
& +t\text{sech}^2(x-t)\tanh(x-t)[288\text{sech}^2(x-t) \\
& -488\text{sech}^4(x-t)-30\text{sech}^2(x-t)\text{sech}^2(x+t)-60\text{sech}^4(x+t)] \\
& -72t\text{sech}^4(x-t)\tanh(x+t)[4-5\text{sech}^2(x-t)] \\
& -352t^2\text{sech}^6(x-t)+408t^2\text{sech}^8(x-t)\}+O(\varepsilon^4)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
s &= x+t+\frac{1}{4}\varepsilon t\text{sech}^2(x+t) \\
& +\frac{1}{196}\varepsilon^2t\{-24\text{sech}^2(x+t)[1-\tanh(x-t)\tanh(x+t)] \\
& +4\text{sech}^4(x+t)[7-9\tanh(x+t)] \\
& -3\text{sech}^2(x-t)[\text{sech}^2(x-t)+\text{sech}^2(x+t)]\} \\
& -\frac{1}{1536}\varepsilon^3t\{-176\text{sech}^2(x+t)+72\text{sech}^4(x+t)+232\text{sech}^6(x+t) \\
& -72\text{sech}^4(x-t)+92\text{sech}^6(x-t) \\
& +\text{sech}^2(x+t)\text{sech}^2(x-t)[24-24\text{sech}^2(x+t)-31\text{sech}^2(x-t)] \\
& +4\tanh(x+t)\tanh(x-t)[44\text{sech}^2(x+t)+4\text{sech}^4(x+t) \\
& -7\text{sech}^2(x+t)\text{sech}^2(x-t)-5\text{sech}^4(x-t)] \\
& -t\text{sech}^2(x+t)\tanh(x+t)[288\text{sech}^2(x+t)-488\text{sech}^4(x+t) \\
& -30\text{sech}^2(x+t)\text{sech}^2(x-t)-60\text{sech}^4(x-t)] \\
& +72t\text{sech}^4(x+t)\tanh(x-t)[4-5\text{sech}^2(x+t)] \\
& -352t^2\text{sech}^6(x+t)+408t^2\text{sech}^8(x+t)\}+O(\varepsilon^4)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

令(3.2)、(3.3)式中的 $r=\text{const}$ 和 $s=\text{const}$, 就得到了三阶近似下, 问题(1.1)的两族特征线的解析表达式。

上述结果在微机上通过利用 MATHEMATICA 系统求得, 在符号运算过程中, 我们充分调用了该系统的微分、积分运算的功能。由于问题涉及双曲函数的积分, 我们编制了有

关运算的子程序, 尽可能减少运算步骤. 为了避免出现 M. van Dyke 指出的“中间表达式膨胀”问题, 我们采取了一系列特殊的措施:

(1) 将求解过程分为三个步骤, 即求直接展开解, 通过 Taylor 展开消除长期项, 确定 $\xi(r, s)$ 与 $\eta(r, s)$ 的渐近表达式; 求反函数 $r(\xi, \eta)$ 与 $s(\xi, \eta)$ 的渐近表达式;

(2) 逐项求解, 例如, 求第三项解时, 将前两项解存入文件, 待需要时再调用该文件, 而且暂时不列出具体的中间表达式, 定义一些微分、积分的函数表达式, 只是到最后阶段才利用已定义的双曲函数微积分性质.

采用了这些做法之后, 我们有效地解决了内存问题, 避免了运算过程中的溢出.

四、结果析分

为了检验所得到的渐近解的准确性, 我们用有限差分法对问题(1.1)进行了数值计算, 采用了迎风格式, 为了保证计算精度, 采取了预测-校正步骤, ε 取值为 0.1 和 0.25. 在图 1~4 中, 我们画出了摄动解与数值解给出的特征曲线和波形. 图 1, 3 对应于 $\varepsilon=0.1$ 的情形, 由图可见, 两者吻合; 图 2, 4 对应于 $\varepsilon=0.25$ 的情形, 尽管这时小参数 ε 的值较大, 两者也相当符合.

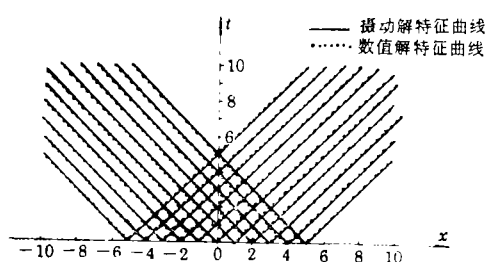


图1 特征线的比较($\varepsilon=0.1$)

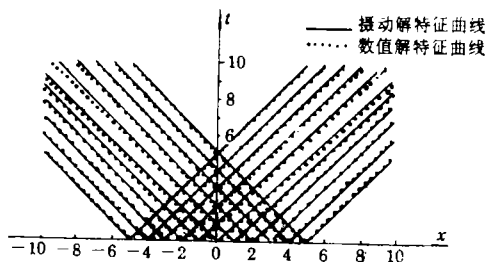


图2 特征线的比较($\varepsilon=0.25$)

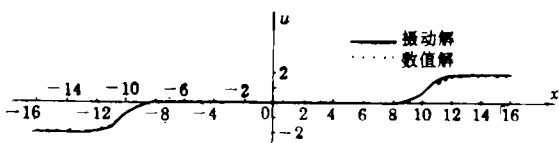


图3 波形的比较($\varepsilon=0.1, t=5$)

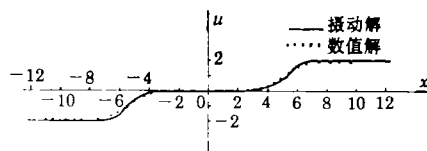


图4 波形的比较($\varepsilon=0.25, t=5$)

五、结束语

本文采用重整化解析特征线法与计算代数相结合的技巧, 成功地求解了一个非线性波动模型方程, 结果表明, 符号运算与摄动分析相结合是解决数学物理问题的有效工具. 我们正在探索用微机进行符号运算、解决复杂问题的途径, 上述工作只是其中的初步尝试, 有关算法还有待于系统化、完整化.

致谢 北京大学力学系陈耀松教授允许作者使用他们引进的 MATHEMATICA 系统(2.0版本), 并鼓励作者进行探索, 谨向他表示深切的谢意.

参 考 文 献

- [1] 钱伟长主编, 《奇异摄动理论及其在力学中的应用》, 科学出版社, 北京(1981).
- [2] Nayfeh, A. H., *An Introduction to perturbation Techniques*, John Wiley & Sone, New York (1981). 中译本: 《摄动方法导引》(宋家骥译), 上海翻译出版公司(1990).
- [3] Kevorkian, J. and J. D. Cole, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York(1980).
- [4] Rand, R. H. and H. Armbruster, *Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Computer Algebra*, Springer-Verlag, New York(1987).
- [5] 藏宏鸣, 若干力学问题的摄动-计算机代数研究, 上海工业大学硕士学位论文(1993).
- [6] 袁仁保, 《计算机代数》, 国防科技大学出版社, 长沙(1989).
- [7] 藏宏鸣、戴世强, 一个非线性摄动方程的计算机代数解, 上海工业大学学报, 14 (3) (1993), 189—197.
- [8] 王明祺、戴世强, Duffng方程摄动解的计算机延伸, 上海工业大学学报, 15(4)(1994).
- [9] Zang Hong-ming and Dai Shi-qiang, Higher-order solutions for interfacial solitary waves in a two-fluid system, *Proc. Int. Conf. on Hydrodyn.*, Ocean Press, Beijing(1994)
- [10] van Dyke, M., Computer-extended series, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 16(1984), 287—309.
- [11] 戴世强, PLK方法, 见[1], 33—86.

Computer Algebra-Perturbation Solution to a Nonlinear Wave Equation

Wang Ming-qi Dai Shi-qiang

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072)

Abstract

In this paper, the higher-order asymptotic solution to the Cauchy problem of a nonlinear wave equation is found by using a computer algebra-perturbation method. The secular terms in the solution from straightforward expansions are eliminated with the straining of characteristic coordinates and the use of the renormalization technique, and the four-term uniformly valid solution is obtained with the symbolic computation using a computer algebra system. The comparison of the derived asymptotic solution and the numerical solution shows that they coincide with each other for smaller ε and agree quite well for larger ε (e.g., $\varepsilon=0.25$).

Key words nonlinear wave, perturbation, computer algebra, renormalization technique, approximate analytical method of characteristics