

轴向冲击下理想塑性直杆动态屈曲 的过应力简化分析模型*

揭 敏

(华中理工大学力学系 武汉 430074)
(杨桂通推荐, 1994年8月10日收到)

摘 要

本文在理想塑性直杆的动态屈曲分析中引入应变率效应, 得到相应的动力学微分方程。求出了屈曲半波长, 临界载荷和屈曲时间的表达式。讨论了应变率效应对杆的塑性动态屈曲的影响。并与文[4]的理论和试验结果作了比较。

关键词 应变率效应 理想塑性 杆 动态屈曲

一、引 言

应变率敏感材料在动态载荷下其单轴屈服强度会有显著改变^[1], 故在结构的塑性动态屈曲分析中应该计入应变率效应^[2]。本文在直杆的塑性动态屈曲分析中将 Malvern 的过应力模型^[3]应用于理想塑性材料, 导出了杆的横向挠度的动力学微分方程, 由放大函数法^[4]求出了最优屈曲模态、临界载荷和屈曲时间。分析中采用如下基本假定:

- (1) 轴向冲击载荷为阶梯脉冲。
- (2) 杆在屈曲时服从 Shanley 定律, 即塑性状态下不卸载^[2]。
- (3) 忽略应力波传播对屈曲的影响。
- (4) 忽略弹性应变率。

二、基本公式和基本方程

对于理想塑性材料, 若忽略弹性应变率, Malvern 的单轴动态应力应变关系的线性近似式为^[3]

$$E\dot{\epsilon} = D(\sigma - \sigma_s) \quad (2.1)$$

其中 E 为弹性模量, D 为材料常数, σ_s 为静态屈服极限。

考虑图 1 所示的等截面, 长 l 的直杆, 其横向挠度为 $[y(x, t) + y_0(x)]$, $y_0(x)$ 为初始几

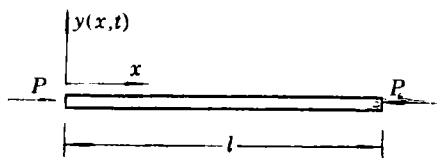


图 1

* 华中理工大学青年科学基金资助课题。1993年9月1日第一次收到。

何缺陷。\$x\$ 为轴向坐标，\$t\$ 为时间。设阶梯脉冲载荷大小为 \$P\$，则杆的动力学平衡方程为

$$\rho A \ddot{y} = -M'' - P(y'' + y_0'') \quad (2.2)$$

其中“·”=“\$\partial/\partial t\$”，“'”=“\$\partial/\partial x\$”。\$\rho\$ 为杆的密度，\$A\$ 为横截面积，\$M = \int_A \sigma z dA\$ 为横截面上的弯矩，\$z\$ 为横截面高度方向的坐标。将 (2.1) 式代入，利用 Shanley 假定，得 \$M = EI \dot{y}''/D\$，其中 \$I\$ 为横截面惯性矩。令 \$y = kw\$，\$y_0 = kw_0\$，\$x = k\xi\$，\$t = k\tau/c\$，\$k = \sqrt{I/A}\$ 为横截面惯性半径，\$c = \sqrt{E/P}\$ 为弹性纵波波速。将 (2.2) 式改写为

$$\dot{w}'''' + \gamma \varepsilon w'' + \gamma \dot{w} = -\gamma \varepsilon w_0'' \quad (2.3)$$

其中 “·” = “\$\frac{\partial}{\partial \tau}\$”，“'” = “\$\frac{\partial}{\partial \xi}\$”，\$\gamma = \frac{kD}{c}\$，\$\varepsilon = \frac{P}{EA}\$

三、屈曲模态、临界载荷和屈曲时间

(2.3) 式中，令

$$w(\xi, \tau) = \int_0^\infty g(\eta, \tau) \sin \eta \xi d\eta, \quad w_0(\xi) = \int_0^\infty g_0(\eta) \sin \eta \xi d\eta$$

\$\eta\$ 为无量纲波数，有

$$\gamma \dot{g} + \eta^4 \dot{g} - \gamma \varepsilon \eta^2 g = \gamma \varepsilon \eta^2 g_0 \quad (3.1)$$

利用初始条件 \$g(\eta, 0) = 0\$ 及 \$\dot{g}(\eta, 0) = 0\$，解得

$$\frac{g(\eta, \tau)}{g_0(\eta)} = \frac{\theta_2}{\theta_2 - \theta_1} \exp[\theta_1 \tau] - \frac{\theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \exp[\theta_2 \tau] - 1 \quad (3.2)$$

其中，

$$\theta_1 = (-\eta^4 + \sqrt{\eta^8 + 4\gamma^2 \varepsilon \eta^2}) / (2\gamma) > 0$$

$$\theta_2 = (-\eta^4 - \sqrt{\eta^8 + 4\gamma^2 \varepsilon \eta^2}) / (2\gamma) < 0$$

故 (3.2) 式右端第一项为屈曲项，它随 \$\tau\$ 趋于无穷的速度取决于 \$\theta_1\$。认为最优的屈曲模态使 \$\theta_1\$ 取最大值。令 \$d\theta_1/d\eta = 0\$，得 \$\eta = (\gamma^2 \varepsilon / 2)^{1/6}\$。不难证明

$$\left. \frac{d^2 \theta_1}{d\eta^2} \right|_{\eta = (\gamma^2 \varepsilon / 2)^{1/6}} < 0$$

故最优屈曲模态无量纲半波长为

$$\frac{\lambda}{2} = \pi \left(\frac{2}{\gamma^2 \varepsilon} \right)^{\frac{1}{6}} \quad (3.3)$$

若为两端铰支的情形，应有 \$\lambda/2 \leq \xi_l\$，\$\xi_l = l/k\$。故由 (3.3) 式 \$\varepsilon \geq (2/\gamma^2) (\pi/\xi_l)^6\$。屈曲时的临界 \$\varepsilon\$ 值为

$$\varepsilon_{cr} = (2/\gamma^2) (\pi/\xi_l)^6 \quad (3.4)$$

认为模态峰值 \$g(\eta, \tau)\$ 达一定值时杆发生屈曲，其大小取决于屈曲项。故屈曲判据为 \$\theta_1 \Big|_{\eta = (\gamma^2 \varepsilon / 2)^{1/6}} \tau_{cr} = a\$，\$a\$ 为定值，由实际情况规定。无量纲屈曲时间为

$$\tau_{cr} = a / (\gamma \varepsilon^2)^{1/3} \quad (3.5)$$

四、讨 论

由 (3.3)、(3.4)、(3.5) 三式知，计入应变率效应时有 \$\lambda/2 \propto \varepsilon^{-1/6}\$，\$\tau_{cr} \propto \varepsilon^{-2/3}\$，\$\varepsilon_{cr} \propto \xi_l^{-6}\$，

而以往不考虑应变率效应的结果(如文[4])给出 $\lambda/2 \propto \varepsilon^{-1/2}$, $\tau_{cr} \propto \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon_{cr} \propto \xi l^{-2}$.说明应变率效应使屈曲半波长和屈曲时间随冲击载荷增大而减小的趋势得到缓解,而使临界载荷随杆长增加而减小的趋势得到增强.此外,应变率效应使得 $\lambda/2$, ε_{cr} , τ_{cr} 三量均与材料密度 ρ 有关,这是忽略了应变率效应时所未有的特征^[4].由(2.1)式知,材料常数 D 和应变率效应的大小成反比,故 $\lambda/2$, ε_{cr} , τ_{cr} 三量均随应变率效应的增大而增加.图2比较了本文的 $\lambda k/2$ 理论结果和文[4]的理论与试验 $\lambda k/2$ 值,其中采用了杆端冲击应力 σ 和冲击速度 v 之间在塑性状态下的关系^[1]

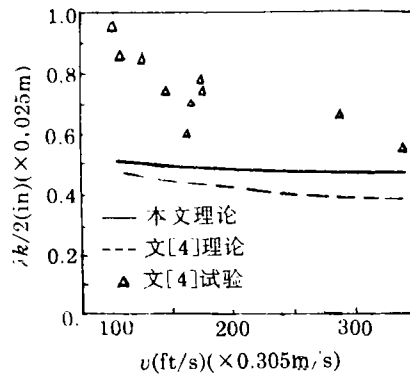


图 2

$$\sigma = \sigma_0 + \rho c_1 (v - v_0) \tag{4.1}$$

其中 σ_0 为材料屈服极限, $v_0 = \sigma_0 / \rho c_1$, $c_1 = \sqrt{E_1 / \rho}$ 为塑性纵波波速, E_1 为材料强化模量.

计算中设 $D = 10^8 \text{ s}^{-1}$, Malvern^[3]认为这对大多数金属材料都适合.试件为文[4]中的6061—T6铝杆,横截面直径为0.209in(0.53cm), $E = 7.5 \times 10^6 \text{ psi}$ (51.7GPa), $E_1 = 0.18 \times 10^6 \text{ psi}$ (1.2GPa), $\sigma_0 = 0.45 \times 10^5 \text{ psi}$ (310MPa).图2表明计入应变率效应使理论结果与试验值更为接近,因此文[4]中三组试件(直径0.454in, 0.209in实心圆截面6061—T6铝杆和2024—T3铝管)试验得到的屈曲半波长平均高于其理论预测值,可认为与应变率效应有一定关系.

参 考 文 献

[1] 杨桂通、熊祝华编著,《塑性动力学》,清华大学出版社(1984).
 [2] 王仁,冲击载荷下结构塑性稳定性的研究,《冲击动力学进展》,中国科技大学出版社(1992), 157.
 [3] L. E. Malvern, Plastic wave propagation in a bar as material exhibiting a strain-rate effect, *Q. Appl. Math.*, 8 (1951), 405.
 —, The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect, *J. Appl. Mech.*, June (1951), 203—208.
 [4] R. Abrahamson and J. N. Goodier, Dynamic flexural buckling of rods within an axial plastic compression wave, *ASME, J. Appl. Mech.*, 33 (1966), 241—247.

A Simplified Over-Stress Analytical Model of the Dynamic Buckling of a Perfectly Plastic Column under Axial Impact

Jie Min

(Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Abstract

This paper introduces the strain-rate effects in the analysis of dynamic buckling of a perfectly plastic column. The corresponding differential equation of dynamics is deduced. The expressions of half-wave length of buckling mode, critical load and time of buckling are obtained. Discussion on the strain-rate effect on the plastic dynamic buckling of a column is presented. The results of this paper are compared with those of the theory and experiment in [4].

Key words strain rate effect, perfectly plastic, column, dynamic buckling