应用数学和力学，第16卷 第6期（1995年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Lipschitz局部强增殖算子的非线性方程的解的迭代构造*

曾六川

（上海师范大学数学系 上海 200234）

（钱伟长推荐，1994年7月4日收到）

摘　要

本文研究p—一致光滑Banach空间X中Ishikawa迭代法。设$T:X\to X$是Lipschitz局部强增殖算子，方程$Tx=f$的解集sol(T)非空。我们证明了sol(T)是一个单点集且Ishikawa序列强收敛到方程$Tx=f$的唯一解。另行，当T是从X的非空凸子集K到X的Lipschitz局部伪压缩映像且T的不动点集$F(T)$非空时，我们证明了$F(T)$是一个单点集且Ishikawa序列强收敛到T的唯一不动点。我们的结果改进和推广了[4]与[5]的结果。

关键词　局部强增殖　局部严格伪压缩　p—一致光滑Banach空间

一、引　言

最近，Tan，Xu[5]研究了p—一致光滑Banach空间X中Mann与Ishikawa迭代法。他们证明了，当T是从X到X的Lipschitz强增殖算子时，两种迭代法强收敛到方程$Tx=f$的唯一解；当T是从X的有界闭凸子集C到自身的Lipschitz伪压缩映像时，两种迭代法强收敛到T的唯一不动点。因此，Tan，Xu[5]分别给出了Chidume[2]的问题1与问题2以肯定的回答，并且也把Chidume[2]的一切结果推广到了p—一致光滑Banach空间的背景。另一方面，设K是一致光滑Banach空间X的非空子集。又设$T:K\to X$是Lipschitz局部严格伪压缩映像。邓、丁[4]给出了强收敛到T的唯一不动点的迭代序列，而且还给出了一个涉及Lipschitz局部强增殖映象T的非线性方程$Tx=f$的解的迭代逼近。因此，把[1]，[3]的结果推广到了一致光滑Banach空间中Lipschitz局部严格伪压缩映像的情形。本文，在p—一致光滑Banach空间的背景中，改进与推广了[4，5]的结果。

二、预　备　知　识

设X是Banach空间。如果对任意$x\in D(T)$，存在$t_x>1$使对一切$y\in D(T)$和$r>0$不等式

$$\|x-y\|\leqslant\|(1+r)(x-y)-rt_x(Tx-Ty)\| \tag{2.1}$$

成立，则称映像T为局部严格伪压缩的。

设X是Banach空间，$\|\cdot\|$为模，X^*是实的对偶空间。$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$X$和$X^*$的广义的对偶

对．映像J映X到2^{X^*}：

$$J(x)=\{x^*\in X^*:\langle x,x^*\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2\},\qquad x\in X$$

称为X上的正规对偶映像．

设X是Banach空间，如果对任意$x\in D(T)$，存在一个正数k_x使得对一切$y\in D(T)$有$j\in J(x-y)$使

$$\langle Tx-Ty,j\rangle\geqslant k_x\|x-y\|^2 \tag{2.2}$$

则称映像T为局部增殖的[3]．

引理2.1[3] 设K是Banach空间X的一个子集，$U:K\to X$，则U是局部严格伪压缩映像当且仅当$T=I-U$是局部强增殖映像．而且对任意$x\in K$、$k_x=(t_x-1)/t_x$，其中t_x和k_x是分别出现在(2.1)和(2.2)中的常数．

设X是Banach空间，如果光滑模$\rho_X(\tau)$：

$$\rho_X(\tau)=\sup\{(\|x+y\|+\|x-y\|)/2-1:x,y\in X,\ \|x\|=1,\ \|y\|\leqslant\tau\}\qquad \tau>0$$

满足$\lim\limits_{\tau\downarrow 0}\rho_X(\tau)/\tau=0$，则称$X$为一致光滑的．回忆到，对实数$1<p\leqslant 2$，Banach空间$X$称为$p$**一致**光滑的，如果$\rho_X(\tau)\leqslant d\tau^p$，$\tau>0$，其中，$d>0$是常数．众所周知（见[8]），对Hilbert空间H，$\rho_H(\tau)=(1+\tau^2)^{1/2}-1$．因此，$H$是2一致光滑．另外，当$1<p<2$时，$L^p$(或$l^p$)是$p$一致光滑的；当$2\leqslant p<\infty$，$L^p$(或$l^p$)是2一致光滑的．Xu[7]表征了$p$**一致**光滑Banach空间．

引理2.2 设X是光滑Banach空间，p是区间$(1,2]$中的固定数．则X是p一致光滑的，当且仅当存在常数$d_p>0$使得对一切$x,y\in X$，

$$\|x+y\|^p\leqslant\|x\|^p+p\langle y,J_p(x)\rangle+d_p\|y\|^p \tag{2.3}$$

其中，$J_p(x)$是泛函$p^{-1}\|\cdot\|^p$在x点的次微分．

我们知道，$J_p(x)=\|x\|^{p-2}J(x)$，$x\in X$，且$x\neq 0$，还有

$$J_p(x)=\{x^*\in X^*:\langle x,x^*\rangle=\|x\|^p,\ \|x^*\|=\|x\|^{p-1}\},\qquad x\in X$$

当X是L^p（或l^p）空间时，(2.3)中的常数d_p已经计算好了．

引理2.3[6][7] 设$X=L^p$(或l^p)，$1<p<\infty$，且$x,y\in X$．我们有下列结论：

(i) 如果$1<p<2$，则

$$\|x+y\|^p\leqslant\|x\|^p+p\langle y,\ J_p(x)\rangle+d_p\|y\|^p \tag{2.4}$$

其中$d_p=(1+b_p^{p-1})/(1+b_p)^{p-1}$，$b_p$是下列方程的唯一解：

$$(p-2)b^{p-1}+(p-1)b^{p-2}-1=0,\qquad 0<b<1$$

(ii) 如果$p\geqslant 2$，则

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,J(x)\rangle+(p-1)\|y\|^2 \tag{2.5}$$

三、Ishikawa 迭代逼近

本节，我们讨论Ishikawa迭代逼近．

定理3.1 设X是p一致光滑Banach空间，$1<p\leqslant 2$，$T:X\to X$是有Lipschitz常数L的Lipschitz局部强增殖算子．定义$S:X\to X$为$Sx=f-Tx+x$.设方程$Tx=f$的解集sol(T)非空．又设$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$，$\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$是$[0,1]$中满足下列条件的两个实数序列：

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$ 且 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$；

(ii) $0\leqslant\beta_n\leqslant\min\left\{t_p,\ \dfrac{k_q}{4p^2L_0(1+L_0^p)^{1/p}}\right\}, \qquad \forall n\geqslant 0$

其中L_0是满足$L_0\leqslant 1+L$的S的Lipschitz常数，t_p是下列方程的（较小）的解：

$$f(t)=p(p-1)(1-k_q)t-(1+d_pL_0^p)t^{p-1}+\frac{1}{2}pk_q=0 \qquad (t>0) \tag{3.1}$$

$q\in\mathrm{sol}(T)$，且$k_q\in(0,1)$，d_p是依次出现在(2.2)与(2.3)中的常数。则对每个$x_0\in X$，Ishikawa序列$\{x_n\}$：

$$\left.\begin{aligned}x_{n+1}&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nSy_n\\ y_n&=(1-\beta_n)x_n+\beta_nSx_n, \qquad n\geqslant 0\end{aligned}\right\}$$

强收敛到q且$\mathrm{sol}(T)$是单点集。

注3.1 如果$p=2$，则方程(3.1)的解是

$$t_2=k_q(d_2L_0^2+2k_q-1)^{-1}$$

此外，如果$X=L^p$(或l^p)，$p\geqslant 2$，则X是2—一致光滑的，且引理2.3(ii)中$d_2=p-1$；如果$1<p<2$，则(3.1)中的函数$f(t)$是在$(0,\infty)$上严格凸的。因为$f(0)=pk_q/2>0$且$f(\infty)=\infty$，所以，对方程(3.1)的解的存在性，只有三种可能。图示如下，(a)方程(3.1)无解，函数$f(t)>0$，$\forall t\geqslant 0$；(b)方程(3.1)仅有一解；(c)方程(3.1)有两个解。

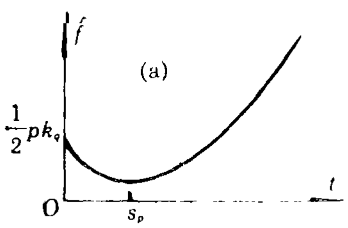

图 1

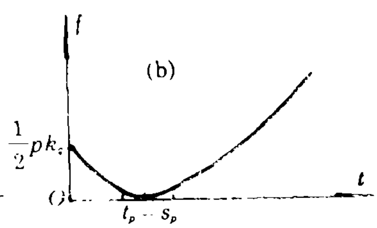

图 2

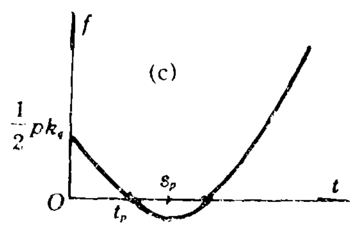

图 3

函数$f(t)$的导数$f'(t)$的零点是

$$s_p=\left[\frac{1+d_pL_0^p}{p(1-k_q)}\right]^{1/(2-p)}$$

且f在点s_p的值是

$$f(s_p)=-(2-p)(1+d_pL_0^p)^{1/(2-p)}(p(1-k_q))^{-(p-1)/(2-p)}+\frac{1}{2}pk_q$$

由此推得，如果$k_q>0$是足够的小，则$f(s_p)\leqslant 0$（因此，方程(3.1)至少有一个解）。如无明显规定，本文一直作这种假设，因为不然的话，$f(t)>0$，$\forall t\geqslant 0$，且对任何$t_p>0$定理3.1成立。

定理3.1的证明 设$q\in\mathrm{sol}(T)$。因为T是Lipschitz局部强增殖算子，所以存在正数k_q使得对每个$x\in X$，不等式

$$\mathrm{Re}\langle Tx-Tq,j(x-q)\rangle\geqslant k_q\|x-q\|^2$$

成立。我们也注意到，对每个$x\in X$，

$$\begin{aligned}\langle Sx-q,J_p(x-q)\rangle&=-\langle Tx-Tq,J_p(x-q)\rangle+\|x-q\|^p\\&=-\|x-q\|^{p-2}\langle Tx-Tq,J(x-q)\rangle+\|x-q\|^p\end{aligned}$$

$$\leqslant -k_q\|x-q\|^{p-2}\|x-q\|^2+\|x-q\|^p$$
$$=(1-k_q)\|x-q\|^p$$

考虑到，

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-q\|^p\\&=\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(Sy_n-q)\|^p\\&\leqslant(1-\alpha_n)^p\|x_n-q\|^p+p\alpha_n(1-\alpha_n)^{p-1}\langle Sy_n-q,J_p(x_n-q)\rangle\\&\quad+d_p\alpha_n^p\|Sy_n-q\|^p\end{aligned}\tag{3.2}$$

因为

$$\|Sy_n-q\|^p\leqslant L_0^p\|y_n-q\|^p$$
$$\langle Sx_n-q,J_p(x_n-q)\rangle\leqslant(1-k_q)\|x_n-q\|^p$$
$$\begin{aligned}\|y_n-q\|^p&=\|(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(Sx_n-q)\|^p\\&\leqslant(1-\beta_n)^p\|x_n-q\|^p+p\beta_n(1-\beta_n)^{p-1}\langle Sx_n-q,\ J_p(x_n-q)\rangle\\&\quad+d_p\beta_n^p\|Sx_n-q\|^p\\&\leqslant((1-\beta_n)^p+p(1-k_q)\beta_n(1-\beta_n)^{p-1}\\&\quad+d_pL_0^p\beta_n^p)\|x_n-q\|^p\\&=t_n\|x_n-q\|^p\end{aligned}$$

其中

$$t_n=(1-\beta_n)^p+p(1-k_q)\beta_n(1-\beta_n)^{p-1}+d_pL_0^p\beta_n^p$$
$$\begin{aligned}\|y_n-x_n\|^p&=\beta_n^p\|x_n-Sx_n\|^p=\beta_n^p\|(x_n-q)+(q-Sx_n)\|^p\\&\leqslant2^p\beta_n^p(\|x_n-q\|^p+\|Sx_n-q\|^p)\\&\leqslant2^p(1+L_0^p)\beta_n^p\|x_n-q\|^p\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\langle Sy_n-Sx_n,J_p(x_n-q)\rangle&\leqslant L_0\|y_n-x_n\|\cdot\|x_n-q\|^{p-1}\\&\leqslant2L_0\beta_n(1+L_0^p)^{1/p}\|x_n-q\|^p\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}&\langle Sy_n-q,J_p(x_n-q)\rangle\\&=\langle Sy_n-Sx_n,J_p(x_n-q)\rangle+\langle Sx_n-q,J_p(x_n-q)\rangle\\&\leqslant(2L_0\beta_n(1+L_0^p)^{1/p}+(1-k_q))\|x_n-q\|^p\end{aligned}$$

据(3.2)，我们得到

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-q\|^p\\&\leqslant((1-\alpha_n)^p+p\alpha_n(1-\alpha_n)^{p-1}(1-k_q+2L_0\beta_n(1+L_0^p)^{1/p})\\&\quad+d_pL_0^p\alpha_n^pt_n)\|x_n-q\|^p\end{aligned}$$

因为$1<p\leqslant2$，我们有$(1-t)^p\leqslant1-pt+t^p$ 且 $(1-t)^{p-1}\leqslant1(p-1)t$ 对 $0\leqslant t\leqslant1$ 成立，所以得到

$$\begin{aligned}t_n&=(1-\beta_n)^p+p(1-k_q)\beta_n(1-\beta_n)^{p-1}+d_pL_0^p\beta_n^p\\&\leqslant1-pk_q\beta_n-p(p-1)(1-k_q)\beta_n^2+(1+d_pL_0^p)\beta_n^p\end{aligned}\tag{3.3}$$

因为$\beta_n\leqslant t_p$，$\forall n\geqslant0$，故据(3.1)，有

$$p(p-1)(1-k_q)\beta_n^2-(1+d_pL_0^p)\beta_n^p\geqslant-\frac{1}{2}pk_q\beta_n$$

从而推得

$$t_n \leqslant 1-\frac{1}{2} p k_q \beta_n, \qquad \forall n \geqslant 0$$

另一方面，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，故存在正整数$N$使得

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant t_p, \qquad \forall n \geqslant N$$

这就推得

$$\begin{aligned} t_n' &= (1-\alpha_n)^p + p(1-k_q)\alpha_n(1-\alpha_n)^{p-1} + d_p L_0^p \alpha_n^p \\ &\leqslant 1-\frac{1}{2} p k_q \alpha_n, \qquad \forall n \geqslant N \end{aligned}$$

所以，我们得到，对每个$n\geqslant N$，

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1}-q\|^p \\ &\leqslant \Big[(1-\alpha_n)^p + p\alpha_n(1-\alpha_n)^{p-1}(1-k_q) \\ &\quad + p\alpha_n(1-\alpha_n)^{p-1}\cdot 2L_0\beta_n(1+L_0^p)^{1/p} + d_p L_0^p \alpha_0^p\Big(1-\frac{1}{2} p k_q \beta_n\Big)\Big] \\ &\quad \|x_n-q\|^p \\ &\leqslant \Big[t_n' + p(\alpha_n-(p-1)\alpha_n^2)\cdot 2L_0\beta_n(1+L_0^p)^{1/p} - \frac{1}{2} p k_q d_p L_0^p \alpha_n^p \beta_n\Big] \\ &\quad \cdot\|x_n-q\|^p \\ &\leqslant \Big[1-\frac{1}{2} p k_q \alpha_n + 2pL_0(1+L_0^p)^{1/p}\alpha_n\beta_n - 2p(p-1)L_0(1+L_0^p)^{1/p}\alpha_n^2\beta_n \\ &\quad -\frac{1}{2} p k_q d_p L_0^p \alpha_n^p \beta_n\Big]\|x_n-q\|^p \end{aligned}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$推得$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\beta_n=0$，所以有

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha_n\beta_n}\Big[2pL_0(1+L_0^p)^{1/p}\alpha_n\beta_n - 2p(p-1)L_0(1+L_0^p)^{1/p}\alpha_n^2\beta_n \\ &\quad -\frac{1}{2} p k_q d_p L_0^p \alpha_n^p \beta_n\Big] \\ &= 2pL_0(1+L_0^p)^{1/p} < 2p^2 L_0(1+L_0^p)^{1/p} \end{aligned}$$

据此及条件(ii)，我们推得，存在正整数$N_0>N$使得对每个$n\geqslant N_0$，

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1}-q\|^p \\ &\leqslant \Big[1-\frac{1}{2} p k_q \alpha_n + 2p^2 L_0(1+L_0^p)^{1/p}\alpha_n\beta_n\Big]\|x_n-q\|^p \\ &= \Big[1-\frac{1}{2} p k_q \alpha_n + 2p^2 L_0(1+L_0^p)^{1/p}\beta_n\alpha_n\Big]\|x_n-q\|^p \\ &\leqslant \Big[1-\frac{1}{2} p k_q \alpha_n + 2p^2 L_0(1+L_0^p)^{1/p}\cdot\frac{k_q}{4p^2 L_0(1+L_0^p)^{1/p}}\cdot\alpha_n\Big]\|x_n-q\|^p \\ &\leqslant \Big[1-\frac{1}{2}(p-1)k_q\alpha_n\Big]\|x_n-q\|^p \\ &\leqslant \Big[\exp\Big(-\frac{1}{2}(p-1)k_q\alpha_n\Big)\Big]\|x_n-q\|^p \end{aligned}$$

$$\leqslant\left[\exp\left(-\left(\frac{1}{2}(p-1)k_q\right)\sum_{j=N_0}^{n}\alpha_j\right)\right]\|x_{N_0}-q\|^p$$

由此及$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$发散，推得，$\{x_n\}$强收敛$q$。

注3.2 若定理3.1中的条件(ii)由下列条件取代

$$0\leqslant\beta_n\leqslant\min\left\{t_p,\frac{k_q}{4p^2L_0(1+L_0^p)^{1/p}}\right\},\qquad n\geqslant N$$

其中，N是某正整数，则定理3.1仍真。据此，定理3.1是邓，丁[4]的定理2与Tan, Xu[5]的定理4.1的改进和推广。

回顾定理3.1的证明，我们可看到下列结论为真。

定理3.2 假设在定理3.1中，由闭区间$[0,1]$中的两个实数列$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$，$\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$满足的条件(i)、(ii)替换成下列条件：

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$且$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$;

(ii) $0\leqslant\alpha_n$，$\beta_n\leqslant t_p$，$\forall n\geqslant0$.

则对每个$x_0\in X$，Ishikawa序列$\{x_n\}$：

$$\left.\begin{aligned}x_{n+1}&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nSy_n\\ y_n&=(1-\beta_n)x_n+\beta_nSx_n,\qquad n\geqslant0\end{aligned}\right\}$$

强收敛到q且$\mathrm{sol}(T)$是一个单点集。而且，如果$\alpha_n=\beta_n=t_p$，$\forall n\geqslant0$，则

$$\|x_{n+1}-q\|\leqslant\rho^{n/p}\|x_1-q\|$$

其中

$$\rho=1-\frac{1}{2}pk_qt_p+2pL_0(1+L_0^p)^{1/p}t_p^2-2p(p-1)L_0(1+L_0^p)^{1/p}+t_p^3\in(0,1)$$

且L_0是S的满足$L_0\leqslant1+L$的Lipschitz常数。

定理3.3 设K是p一致光滑 Banach空间X $(1<p\leqslant2)$的非空凸子集，$T:K\to X$是有Lipschitz常数L的Lipschitz局部严格伪压缩映像。又设T的不动点集$F(T)$非空。假设$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$，$\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$是$[0,1]$中两个实数列且满足

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$且$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$;

(ii) $0\leqslant\beta_n\leqslant\min\left\{t_p,\frac{k_q}{4p^2L(1+L^p)^{1/p}}\right\}$, $\qquad\forall n\geqslant0$

其中t_p是下列方程的（较小）解：

$$f(t)=p(p-1)(1-k_q)t-(1+d_pL^p)t^{p-1}+\frac{1}{2}pk_q=0\qquad(t>0)$$

$q\in F(T)$，$k_q=(t_q-1)/t_q$，且$t_q\in(1,\infty)$。d_p分别为出现在(2.1)与(2.3)中的常数，那么，对每个$x_0\in K$，Ishikawa序列$\{x_n\}$：

$$\left.\begin{aligned}x_{n+1}&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTy_n\\ y_n&=(1-\beta_n)x_n+\beta_nTx_n,\qquad n\geqslant0\end{aligned}\right\}$$

强收敛到q且$F(T)$是单点集。

证明 设$q\in F(T)$。因为T是局部严格伪压缩的，由引理2.1，$U=I-T$是局部强增殖的。因此，存在正数k_q使得对每个$x\in K$，下列不等式

$$\mathrm{Re}\langle (I-T)x-(I-T)q,j(x-q)\rangle\geqslant k_q\|x-q\|^2$$

成立。我们也看到，对每个$x\in X$，

$$\begin{aligned}&\langle Tx-q,J_p(x-q)\rangle\\&\quad=-\langle (I-T)x-(I-T)q,J_p(x-q)\rangle+\langle x-q,J_p(x-q)\rangle\\&\quad\leqslant -k_q\|x-q\|^{p-2}\|x-q\|^2+\|x-q\|^p\\&\quad=(1-k_q)\|x-q\|^p\end{aligned}$$

注意到，

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^p&=\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(Ty_n-q)\|^p\\&\leqslant(1-\alpha_n)^p\|x_n-q\|^p+p\alpha_n(1-\alpha_n)^{p-1}\langle Ty_n-q,J_p(x_n-q)\rangle\\&\quad+d_p\alpha_n^p\|Ty_n-q\|^p\end{aligned}$$

因为

$$\|Ty_n-q\|^p\leqslant L^p\|y_n-q\|^p$$

$$\langle Tx_n-q,J_p(x_n-q)\rangle\leqslant(1-k_q)\|x_n-q\|^p$$

$$\begin{aligned}\|y_n-q\|^p&=\|(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(Tx_n-q)\|^p\\&\leqslant(1-\beta_n)^p\|x_n-q\|^p+p\beta_n(1-\beta_n)^{p-1}\langle Tx_n-q,J_p(x_n-q)\rangle\\&\quad+d_p\beta_n^p\|Tx_n-q\|^p\\&\leqslant((1-\beta_n)^p+p(1-k_q)\beta_n(1-\beta_n)^{p-1}+d_pL^p\beta_n^p)\|x_n-q\|^p\\&=t_n\|x_n-q\|^p\end{aligned}$$

其中，

$$t_n=(1-\beta_n)^p+p(1-k_q)\beta_n(1-\beta_n)^{p-1}+d_pL^p\beta_n^p$$

$$\begin{aligned}\|y_n-x_n\|^p&=\beta_n^p\|x_n-Tx_n\|^p=\beta_n^p\|(x_n-q)+(q-Tx_n)\|^p\\&\leqslant 2^p\beta_n^p(\|x_n-q\|^p+\|Tx_n-q\|^p)\\&\leqslant 2^p(1+L^p)\beta_n^p\|x_n-q\|^p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle Ty_n-Tx_n,J_p(x_n-q)\rangle&\leqslant L\|y_n-x_n\|\cdot\|x_n-q\|^{p-1}\\&\leqslant 2L\beta_n(1+L^p)^{1/p}\|x_n-q\|^p\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}&\langle Ty_n-q,J_p(x_n-q)\rangle\\&\quad=\langle Ty_n-Tx_n,J_p(x_n-q)\rangle+\langle Tx_n-q,J_p(x_n-q)\rangle\\&\quad\leqslant(2L\beta_n(1+L^p)^{1/p}+(1-k_q))\|x_n-q\|^p\end{aligned}$$

由(3.1)即得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^p\leqslant&((1-\alpha_n)^p+p\alpha_n(1-\alpha_n)^{p-1}(1-k_q+2L\beta_n(1+L^p)^{1/p})\\&+d_pL^p\alpha_n^pt_n)\|x_n-q\|^p\end{aligned}$$

证明的其余部分类似于定理3.1中的证明。

注3.3 定理3.3是邓，丁[4]的定理1和Tan，Xu[5]的定理4.2的改进与推广。

下面，我们提出一个平行于定理3.2的结果。

定理3.4 假设在定理3.3中，由[0,1]中两个实数列$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$，$\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$满足的条件(1)、

(ii)替换成下列条件：

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$且$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$；

(ii) $0\leqslant\alpha_n,\ \beta_n\leqslant t_p,\ \forall n\geqslant 0$.

则对每个$x_0\in K$，Ishikawa序列$\{x_n\}$：

$$\left.\begin{aligned}x_{n+1}&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTy_n\\ y_n&=(1-\beta_n)x_n+\beta_nTx_n,\qquad n\geqslant 0\end{aligned}\right\}$$

强收敛到q且$F(T)$是一个单点集．而且，如果$\alpha_n=\beta_n=t_p$，$\forall n\geqslant 0$，则

$$\|x_{n+1}-q\|\leqslant\rho^{n/p}\|x_1-q\|$$

其中

$$\rho=1-\frac{1}{2}pk_qt_p+2pL(1+L^p)^{1/p}t_p^2-2p(p-1)L(1+L^p)^{1/p}t_p^3\in(0,1)$$

因为L^p(或l^p)空间$(1<p<\infty)$是$\min(2,p)$一致光滑的，我们有下列推论．

推论3.1 设$X=L^p$(或l^p)，$1<p<2$，$T:X\to X$是有Lipschitz常数L的Lipschitz局部强增殖算子．定义 $S:X\to X$ 为 $Sx=f-Tx+x$．设方程 $Tx=f$ 的解集 $\mathrm{sol}(T)$ 非空．又设$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$，$\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$是$[0,1]$中两个实数列且满足

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$且$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$；

(ii) $0\leqslant\beta_n\leqslant\min\left\{t_p,\ \frac{k_q}{4p^2L_0(1+L_0^p)^{1/p}}\right\},\qquad\forall n\geqslant 0$

其中L_0是满足$L_0\leqslant 1+L$的Lipschitz常数，t_p是下列方程的（较小）解：

$$f(t)=p(p-1)(1-k_q)t-(1+d_pL_0^p)t^{p-1}+\frac{1}{2}pk_q=0\qquad(t>0)$$

$q\in\mathrm{sol}(T)$，且$k_q\in(0,1)$；d_p是分别出现在(2.2)与(2.4)中的常数．则对每个 $x_0\in X$，Ishikawa序列$\{x_n\}$：

$$\left.\begin{aligned}x_{n+1}&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nSy_n\\ y_n&=(1-\beta_n)x_n+\beta_nSx_n,\qquad n\geqslant 0\end{aligned}\right\}$$

强收敛到q且$\mathrm{sol}(T)$是一个单点集．

推论3.2 设$X=L^p$(或l^p)，$1<p\leqslant 2$，K是X的非空凸子集，$T:K\to X$是有Lipschitz常数 L 的 Lipschitz 局部严格伪压缩映像．设 T 的不动点集 $F(T)$ 非空．又设 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$，$\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$是$[0,1]$中两个实数列，且满足

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$且$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$；

(ii) $0\leqslant\beta_n\leqslant\min\left\{t_p,\ \frac{k_q}{4p^2L(1+L^p)^{1/p}}\right\},\qquad\forall n\geqslant 0$

其中t_p是下列方程的（较小）的解：

$$f(t)=p(p-1)(1-k_q)t-(1+d_pL^p)t^{p-1}+\frac{1}{2}pk_q=0\qquad(t>0)$$

$q\in F(T)$，$k_q=(t_q-1)/t_q$，且$t_q\in(1,\infty)$，d_p分别为出现在(2.1)与(2.4)中的常数，则对每

个$x_0 \in K$，Ishikawa序列$\{x_n\}$：

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \qquad n \geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$

强收敛到q且$F(T)$是一个单点集。

注3.4 (i)至于$X = L^p$(或l^p)，$p \geqslant 2$的情况，只要作适当的修改，我们就可以得到类似于推论3.1与推论3.2的结果。(ii)显然，对于$X = L^p$(或l^p)，$1 < p < \infty$，我们可以得到相应于定理3.2和定理3.4的推论。

参 考 文 献

[1] C. E. Chidume, Iterative approximation of fixed points of Lipschitzian strictly pseudocontractive mappings, *Proc. Amer. Math Soc*, 99 (1987), 283—288.

[2] C. E. Chidume, An iterative process for nonlinear Lipschitzian strongly accretive mappings in L_p spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 151 (1990), 453—461.

[3] X. Weng, Fixed point iteration for local strictly pseudocontractive mapping, *Proc. Amer. Math. Poc.*, 113 (1991), 727—731.

[4] 邓磊，丁协平，Lipschitz局部严格伪压缩映象的迭代逼近，应用数学和力学，15(2) (1994)，115—119.

[5] K. K Tan. and H. K. Xu, Iterative solutions to nonlinear equations of strongly accretive operators in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 178 (1993), 9—21.

[6] T. C. Lim, H. K. Xu and Z. B. Xu, Some L^p inequalities and their applications to fixed point theory and approximation theory, in *Progress in Approximation Theory*, Eds. by P. Nevai and A. Pinkus, Academic Press (1991), 609—624.

[7] H. K. Xu, Inequalities in Banach spaces with applications, *Nonlinear Anal.*, 16 (1991), 1127—1138.

[8] J. Diestel, Ceometry of Banach Space-Selected Topics, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol.485, Springer-Verlag (1975).

Iterative Construction of Solutions to Nonlinear Equations of Lipschitzian and Local Strongly Accretive Operators

Zeng Luchuan

(*Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai* 200234)

Abstract

In this paper, we investigate the Ishikawa iteration process in a p-uniformly smooth Banach space X. Let $T: X \to X$ be a Lipschitzian and local strongly accretive operator and the set sol(T) of solutions of the equation $Tx=f$ be nonempty. We show that sol(T) is a singletion and the Ishikawa sequence converges strongly to the unique solution of the equation $Tx=f$. In addition, whenever T is a Lipschitzian and local pseudocontractive mapping from a nonempty convex subset K of X into X and the set $F(T)$ of fixed points of T is nonempty, we prove that $F(T)$ is a singletion and the Ishikawa sequence converges strongly to the unique fixed point of T. Our results are the improvements and extension of the results of Deng and Ding[4] and Tan and Xu[5].

Key words local strongly accretive, local strictly pseudocontractive, p-uniformly smooth Banach space