应用数学和力学，第16卷 第6期（1995年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

奇摄动非线性状态调节器问题的渐近解*

林苏榕　　林宗池

（福建省电视大学数学科 福州 350003）　（福建师范大学数学系 福州 350007）

（1994年10月21日收到）

摘　要

我们将寻求最优控制和奇摄动非线性状态调节器问题的相应轨道．在适当的假设下将有可能去完成当$\varepsilon\to0$时一致有效的渐近解．

关键词　奇异摄动　非线性状态调节器　最优控制　对角化技巧

一、引　　言

我们研究非线性状态调节器问题．它由在区间$0\leqslant t\leqslant1$上的方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,\varepsilon z,\varepsilon)+b_1u,\qquad \varepsilon\frac{dz}{dt}=g(t,x,\varepsilon z,\varepsilon)b_2u \tag{1.1}$$

初始条件

$$x(0,\varepsilon)=x^0(\varepsilon),\quad z(0,\varepsilon)=z^0(\varepsilon) \tag{1.2}$$

以及二次性能指标泛函

$$J(\varepsilon)=\frac{1}{2}(E_1x^2(1,\varepsilon)+2\varepsilon E_2x(1,\varepsilon)z(1,\varepsilon)+\varepsilon E_3z^2(1,\varepsilon))$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1[q_1x^2(t,\varepsilon)+2q_2x(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon)+q_3z^2(t,\varepsilon)+u^2(t,\varepsilon)r]dt \tag{1.3}$$

其中ε是一个正的小参数，E_i和$q_i(i=1,2,3)$是常数，r是正常数．

假设$(\mathrm{H})_1$：函数f，g对每一个变量都是充分光滑的和在$0\leqslant t\leqslant1$内当$\varepsilon\to0$时均有一致的渐近幂级数展开式．

为了得到最优控制的充要条件，我们引进 Hamilton 函数

$$H(x,z,u,p_1,p_2)=(q_1x^2+2q_2xz+q_3z^2+ru^2)/2$$
$$+p_1f(t,x,\varepsilon z,\varepsilon)+p_2g(t,x,\varepsilon z,\varepsilon)$$

其中共态p_1和p_2满足方程

$$dp_1/dt=-\partial H/\partial x=-q_1x-q_2z-f_x(t,x,\varepsilon z,\varepsilon)p_1-g_x(t,x,\varepsilon z,\varepsilon)p_2$$
$$\varepsilon dp_2/dt=-\partial H/\partial z=-q_2x-q_3z-f_z(t,x,\varepsilon z,\varepsilon)p_1\varepsilon+g_z(t,x,\varepsilon z,\varepsilon)p_2\varepsilon$$

和终点条件

* 国家自然科学基金和福建省自然科学基金资助课题

$$p_1(1,\varepsilon)=E_1x(1,\varepsilon)+\varepsilon E_2z(1,\varepsilon),\quad p_2(1,\varepsilon)=E_2x(1,\varepsilon)+E_3z(1,\varepsilon) \tag{1.4}$$

则沿着最优轨道我们有

$$\partial H/\partial u=ru+b_1p_1+b_2p_2=0$$

这就意味着控制关系

$$u=-b_1p_1/r-b_2p_2/r \tag{1.5}$$

又因$\partial^2H/\partial u^2=r>0$，此最优控制使$J(\varepsilon)$达到极小．把(1.5)代入状态方程(1.1)给出非线性方程组

$$\left.\begin{aligned}&dx/dt=f(t,x,\varepsilon z,\varepsilon)-p_1b_1^2/r-p_2b_2b_1/r\\&dp_1/dt=-q_1x-q_2z-f_x(t,x,\varepsilon z,\varepsilon)p_1-g_x(t,x,\varepsilon z,\varepsilon)p_2\\&\varepsilon dz/dt=g(t,x,\varepsilon z,\varepsilon)-p_1b_1b_2/r-p_2b_2^2/r\\&\varepsilon dp_2/dt=-q_2x-q_3z-f_z(t,x,\varepsilon z,\varepsilon)p_1\varepsilon-g_z(t,x,\varepsilon z,\varepsilon)p_2\varepsilon\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

它们必须满足两个初始条件(1.2)和两个终点条件(1.4)．

二、渐近展开

由于过去经验的启发，我们将寻求(1.6)式的一致有效渐近解为如下形式

$$\left.\begin{aligned}&x(t,\varepsilon)=X(t,\varepsilon)+\varepsilon m_1(k,\varepsilon)+\varepsilon n_1(h,\varepsilon)\\&z(t,\varepsilon)=Z(t,\varepsilon)+m_2(k,\varepsilon)+n_2(h,\varepsilon)\\&p_1(t,\varepsilon)=P_1(t,\varepsilon)+\varepsilon v_1(k,\varepsilon)+\varepsilon r_1(h,\varepsilon)\\&p_2(t,\varepsilon)=P_2(t,\varepsilon)+v_2(k,\varepsilon)+r_2(h,\varepsilon)\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

其中，$(X(t,\varepsilon),\ Z(t,\varepsilon),\ P_1(t,\varepsilon),\ P_2(t,\varepsilon))$，$(\varepsilon m_1(k,\varepsilon),\ m_2(k,\varepsilon),\ \varepsilon v_1(k,\varepsilon),\ v_2(k,\varepsilon))$和$(\varepsilon n_1(h,\varepsilon),\ n_2(h,\varepsilon),\ \varepsilon r_1(h,\varepsilon),\ r_2(h,\varepsilon))$分别是外解和左、右边界层函数，它们都有$\varepsilon$幂的渐近展开式．这里的$k=t/\varepsilon$，$h=(1-t)/\varepsilon$是伸长变量．

借助于把外部渐近展开式代入方程组(1.6)和令$\varepsilon\to0$外展开的首项必须满足退化方程组

$$\left.\begin{aligned}&dX_0/dt=f(t,X_0,0,0)-P_{10}b_1^2/r-P_{20}b_1b_2/r\\&dP_{10}/dt=-q_1X_0-q_2Z_0-f_x(t,X_0,0,0)P_{10}-g_x(t,X_0,0,0)P_{20}\\&g(t,X_0,0,0)-b_1b_2P_{10}/r-b_2^2P_{20}/r=0\\&q_2X_0+q_3Z_0=0\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

和边界条件：

$$X_0(0)=x_0^0,\quad P_{10}(1)=E_1X_0(1) \tag{2.3}$$

假设$(\mathrm{H})_2$：退化问题(2.2)、(2.3)在整个$0<t<1$内有唯一的解$(X_0(t),Z_0(t),P_{10}(t),P_{20}(t))$．

外部展开式的高阶项$(X_j(t),\ Z_j(t),\ P_{1j}(t),\ P_{2j}(t))$，$(j=1,2,3,\cdots)$，满足(2.2)、(2.3)的非齐次形式，只要$X_j(0)$和$P_{1j}(1)-E_1X_j(1)$已确定，它们就能逐次地唯一地解出．

左边界层的首项必须满足方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dm_{10}}{dk}=-\frac{b_1b_2v_{20}}{r},\quad \frac{dv_{10}}{dk}=-q_2m_{20}-g_x(0,X_0,0,0)v_{20}\\&\frac{dm_{20}}{dk}=-\frac{b_2^2v_{20}}{r},\quad \frac{dv_{20}}{dk}=-q_3m_{20}\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

连同初始条件

$$m_{20}(0)=z_0^0-Z_0(0) \tag{2.5}$$

假设(H)$_3$：2×2矩阵行列式

$$G(t)=\begin{vmatrix}\lambda & -b_2^2/r\\ -q_3 & \lambda\end{vmatrix}$$

在整个$0\leqslant t\leqslant 1$上有一个具有负实部的特征值$\lambda_1(t)$和一个具有正实部的特征值$\lambda_2(t)$，因此，两个线性方程组(2.4)式的最后两个方程具有唯一的指数型衰减的解（当$k\to\infty$时）如下：

$$m_{20}(k)=m_{20}(0)\exp(-\lambda_1 k),\quad v_{20}(k)=r\lambda_1 m_{20}(k)/b_2^2$$

这里的$\lambda_1=b_2(q_3/r)^{1/2}$。

又因m_{10}和v_{10}当$k\to\infty$时两个都趋于0，方程组(2.4)的前两个方程含有

$$m_{10}(k)=(b_1/b_2)m_{20}(k)$$

$$v_{10}(k)=(q_2/\lambda_1-rg_z(0,X_0,0,0)/b_2^2)m_{20}(k)$$

最后，左边界层校正的高阶项能够用通常的方法逐次求得.

右边界层校正项是用类似的方法得到.

得到了共态p_1和p_2的唯一的渐近展开式后，关系式(1.5)意味着最优控制$u(t,\varepsilon)$有下面形式的类似的展开式

$$u(t,\varepsilon)=U(t,\varepsilon)+v(k,\varepsilon)+w(h,\varepsilon) \tag{2.6}$$

这里的U，v和w均有关于ε的渐近级数的展开式和v（或w）项当k（或h）趋于无穷时而趋于零. 因此，在(0,1)内，最优控制是渐近地由外展开式$U(t,\varepsilon)$给出，其首项是

$$U_0(t)=-b_1P_{10}(t)/r-b_2P_{20}(t)/r$$

可是，在端点$u(t,\varepsilon)$一般地具有非一致收敛的性质.同样地，把最优轨道x和z的展开式(2.1)和最优控制u的展开式(2.6)代入性能指标泛函(1.3)，我们有最小性能指标的渐近展开式$J^*(\varepsilon)\sim J_0^*+J_1^*\varepsilon+J_2^*\varepsilon^2+\cdots$. 这里的首项

$$J_0^*=\frac{1}{2}E_1X_0^2(1)+\frac{1}{2}\int_0^1[q_1X_0^2(t)+2q_2X_0(t)Z_0(t)+q_3Z_0^2(t)+rU_0^2(t)]dt$$

只要由退化问题的解(X_0,P_{10},Z_0,P_{20})确定.而高阶项则是由边界层校正项的影响来确定.

三、余 项 估 计

我们构造函数

$$\bar{X}_N=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i(X_i+\varepsilon m_{1i}+\varepsilon n_{1i}),\quad \bar{Z}_N=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i(Z_i+m_{1i}+m_{2i})$$

$$\bar{P}_{1N}=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i(P_{1i}+\varepsilon v_{1i}+\varepsilon r_{1i}),\quad \bar{P}_{2i}=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i(P_{2i}+v_{2i}+r_{2i})$$

记及递推方程和边界条件(2.2)～(2.5)，我们得到：

$$\left.\begin{aligned}
&d\bar{X}_N/dt=f(t,\bar{X}_N,\ \varepsilon\bar{Z}_N,\varepsilon)-b_1^2\bar{P}_{1N}/r-b_1b_2\bar{P}_{2N}/r+O(\varepsilon^{N+1})\\
&d\bar{P}_{1N}/dt=-q_1\bar{X}_N-q_2\bar{Z}_N-f_x(t,\bar{X}_N,\varepsilon\bar{Z}_N,\varepsilon)\bar{P}_{1N}-g_x(t,\bar{X}_N,\varepsilon\bar{Z}_N,\varepsilon)\bar{P}_{2N}+O(\varepsilon^{N+1})\\
&\varepsilon d\bar{Z}_N/dt=g(t,\bar{X}_N,\varepsilon\bar{Z}_N,\varepsilon)-b_2b_1\bar{P}_{1N}/r-b_2^2\bar{P}_{2N}/r+O(\varepsilon^{N+1})\\
&\varepsilon d\bar{P}_{2N}/dt=-q_2\bar{X}_N-q_3\bar{Z}_N-f_z(t,\bar{X}_N,\varepsilon\bar{Z}_N,\varepsilon)\bar{P}_{1N}\varepsilon-g_z(t,\bar{X}_N,\varepsilon\bar{Z}_N,\varepsilon)\bar{P}_{2N}\varepsilon+O(\varepsilon^{N+1})
\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\overline{X}_N(0,\varepsilon)=x^0+O(\varepsilon^{N+1}),\ \overline{Z}_N(0,\varepsilon)=z^0+O(\varepsilon^{N+1})\\&\overline{P}_{1N}(1,\varepsilon)=E_1x(1,\varepsilon)+\varepsilon E_2z(1,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1})\\&\overline{P}_{2N}(1,\varepsilon)=E_2x(1,\varepsilon)+E_3z(1,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1})\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

令

$$u_1=\begin{bmatrix}x-\overline{X}_N\\ \varepsilon(z-\overline{Z}_N)\end{bmatrix},\quad v=\begin{bmatrix}p_1-\overline{P}_{1N}\\ \varepsilon(p_2-\overline{P}_{2N})\end{bmatrix}$$

则我们能够改变问题(3.1)、(3.2)、(1.6)、(1.2)和(1.4)为下列形式：

$$\frac{du_1}{dt}=A_1(t,\varepsilon)u_1+A_2(t,\varepsilon)v+F,\quad \varepsilon\frac{dv}{dt}=B_1(t,\varepsilon)u_1+B_2(t,\varepsilon)v+G\tag{3.3}$$

$$u_1|_{t=0}=O(\varepsilon^{N+1}),\quad v|_{t=1}=O(\varepsilon^{N+1})\tag{3.4}$$

其中

$$A_1(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ r & \delta\end{bmatrix},\quad A_2(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix}-b_1^2/r & -b_1b_2/r\\ -b_1b_2/r & -b_2^2/r\varepsilon\end{bmatrix}$$

$$B_1(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix}-q_1 & -q_2\\ -q_2 & -q_3/\varepsilon\end{bmatrix},\quad B_2(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix}-\alpha & -r\\ -\beta & -\delta\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}F_1\\ F_2\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}G_1\\ G_2\end{bmatrix}$$

$$F_1=f(t,\ x,\ \varepsilon z,\ \varepsilon)-f(t,\ \overline{X}_N,\ \varepsilon\overline{Z}_N,\varepsilon)-\alpha(t,\varepsilon)(x-\overline{X}_N)-\beta(t,\varepsilon)\varepsilon(z-\overline{Z}_N)+O(\varepsilon^{N+1})$$

F_2，G_1和G_2是类似的。

我们做变量变换：$\nu=u_1+\varepsilon sw$，$w=v+Yu_1$，则借助于引理1[1]我们能够转变问题(3.3)、(3.4)为对角化系统：

$$\nu'=(A_1-A_2Y)\nu+\overline{F},\quad \nu(0,\varepsilon)=\sigma(\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})\tag{3.5}$$

$$\varepsilon w'=(B_2+\varepsilon YA_2)w+\overline{G},\quad w(1,\varepsilon)=\Delta(\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})\tag{3.6}$$

其中 $\overline{F}=\overline{F}(t,\varepsilon,\nu,w)=F+sG+\varepsilon YF$

$\overline{F}(t,\varepsilon,0,0)=O(\varepsilon^{N+1})$

$\overline{G}=\overline{G}(t,\varepsilon,\nu,w)=\overline{G}+\varepsilon YF$

$\overline{G}(t,\varepsilon,0,0)=O(\varepsilon^{N+1})$

我们容易知道，方程(3.5)、(3.6)等价于下列积分方程：

$$\nu(t,\varepsilon)=\Gamma(t)\sigma(\varepsilon)-\int_0^t\Gamma(t)\Gamma^{-1}(\tau)\overline{F}(\tau,\varepsilon,\nu(\tau,\varepsilon),\ w(\tau,\varepsilon))d\tau\tag{3.7}$$

$$\varepsilon w(t,\varepsilon)=W(t)\Delta(\varepsilon)-\int_t^1W(t)W^{-1}(\tau)\overline{G}(\tau,\varepsilon,\nu(\tau,\varepsilon),\ w(\tau,\varepsilon))d\tau\tag{3.8}$$

其中$\Gamma(t)$和$W(t)$分别是满足$\Gamma(0,\varepsilon)=I$，$W(1,\varepsilon)=I$的$\nu'=(A_1-A_2Y)$，$\varepsilon w'=(B_2+\varepsilon YA_2)w$的解的基本阵。

最后，利用逐步逼近法和 Coppel[2] 的指数二分法我们证明了(3.7)、(3.8)分别有解$\nu(t,\varepsilon)$和$w(t,\varepsilon)$，同时，$\nu(t,\varepsilon)=w(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$。从此，我们有

$$x(t,\varepsilon)=\overline{X}_N(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}),\quad z(t,\varepsilon)=\overline{Z}_N(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1})$$

$$p_1(t,\varepsilon)=\overline{P}_{1N}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}),\quad p_2(t,\varepsilon)=\overline{P}_{2N}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1})$$

因此，我们有下列主要结果：

定理1 如果假设$(\mathrm{H})_1\sim(\mathrm{H})_3$成立，则最优控制问题(1.1)～(1.3)对于充分小的ε有唯一解，使得对于每一个整数$N\geqslant0$，最优控制$u(t,\varepsilon)$和相应的轨道$x(t,\varepsilon)$和$z(t,\varepsilon)$，当$\varepsilon\to0$时，

在$0\leqslant t\leqslant 1$上一致地满足

$$u(t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j[U_j(t)+v_j(k)+w_j(h)]+O(\varepsilon^{N+1})$$

$$x(t,\varepsilon)=X_0(t)+\sum_{j=1}^{N}[X_j(t)+m_{1,j-1}(k)+n_{1,j-1}(h)]\varepsilon^j+O(\varepsilon^{N+1})$$

$$z(t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}[Z_j(t)+m_{2j}(k)+n_{2j}(h)]\varepsilon^j+O(\varepsilon^{N+1})$$

同时，最优性能指标有如此的渐近展开式

$$J^*(\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}J_i^*\varepsilon^i+O(\varepsilon^{N+1}),\qquad 当\varepsilon\to 0时$$

参 考 文 献

[1] 林宗池，非线性系统边值问题的奇摄动，福建师范大学学报（自然科学版），5(4) (1989), 1—8.

[2] W.A. Coppel, Dichotomies and reducibility, *J.Diff. Eqs.*,(3) (1967),500—521.

Asymptotic Solution of a Singularly Perturbed Nonlinear State Regulator Problem

Lin Surong

(*Section of Mathematics, Fujian Broadcasting TV University, Fuzhou* 350003)

Lin Zongchi

(*Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou* 350007)

Abstract

We shall seek the optimal control and corresponding trajectories of the singularly perturbed nonlinear state regulator problem. Under appropriate hypotheses, it will be possible to complete an asymptotic solution which is uniformly valid when $\varepsilon\to 0$.

Key words singular perturbation, nonlinear state regulator, optimal control, diagonalization technique