

非线性振动分析中的正交函数法

孙丕忠 唐乾刚 孙世贤

(国防科技大学, 长沙 410073)

(李骊推荐, 1994年9月13日收到)

要 要

本文根据谐波平衡法假设周期解的基本思想, 提出了一种分析非线性振动特性的正交函数法。将位移展开为谐波的级数形式, 根据线性模态和三角级数的正交性导出了一组形式简单的特征方程。有效地解决了平方非线性系统存在漂移项的困难。算例表明: 本文方法精度高, 收敛快, 工作量小。

关键词 正交函数 非线性 振动特性 特征方程

一、引 言

对于非线性振动特性的分析, 国内外科技工作者已进行了大量而深入的研究, 并取得了许多重要成果。如文献[1]提出的 Lindsted-Poincare 法、平均法、多尺度法等, 这些方法对分析单自由度系统弱非线性问题一般行之有效。对多自由系统问题, 人们一般求助于数值方法, 但迄今为止的所有数值方法都忽略了高次谐波的影响。这样处理存在两个方面的缺陷: 一是对强非线性问题误差较大, 二是根本不能处理带平方非线性项的系统。本文根据谐波平衡法假设周期解的基本思想, 将位移展开为谐波的级数形式, 根据振动系统的物理意义来确定谐波系数和振动频率, 本文方法不但适用于任意振幅任意系统, 而且计算工作量小, 精度高。

1. 谐波平衡法的回顾

对方程

$$x + \sum_{n=1}^N \alpha_n x^n = 0 \quad (1.1)$$

谐波平衡法的基本思想是: 程方程(1.1)的周期解设为

$$x = \sum_{m=0}^M A_m \cos m\varphi \quad (1.2)$$

的形式, 将(1.2)式代入(1.1)式, 并令最低的 $M+1$ 次谐波的每一系数为零, 得到有关 A_m 和 ω 的 $M+1$ 个代数方程构成的方程组, 将 A_0, A_1, \dots, A_m 和 ω 解为 A_1 的函数, 从而求得方程

(1.1)的周期解和频率。这个解的精度依赖于 A_1 值和假定的解(1.2)中的谐波的个数。

谐波平衡法实际上是一种纯数学方法,它存在如下缺点:

1. A_1 不能代表系统实际振幅;
2. 谐波数越多,推导运算越复杂。

2. 正交函数法的引入

正交函数法是根据实际物理意义而得到的一种方法。对一实际非线性保守系统,给一初始振幅,必有一相应的模态和频率与之对应。根据线性模态和三角级数的正交性导出一组形式简单的特征方程,将求解系统幅频关系问题化为求矩阵特征值问题。与谐波平衡法相比具有如下优点:

1. 所给振幅为实际振幅;
2. 精确考虑了周期解中所设各项的影响;
3. 免去了求解代数方程组的麻烦;
4. 有效地解决了多自由度系统问题。

二、基本方程推导

1. 单自由度系统

1. 基本方程

设方程形式为

$$\dot{U} + \alpha_1 U + \alpha_2 U^2 + \alpha_3 U^3 = 0 \quad (2.1)$$

对(2.1)进行如下迭代

$$\dot{U}^{(k+1)} + \alpha_1 U^{(k+1)} + (\alpha_2 U^{(k)}) U^{(k+1)} + (\alpha_3 U^{(k)2}) U^{(k+1)} = 0 \quad (2.2)$$

设

$$U^{(k)} = [H] \{A^{(k)}\} \quad (2.3)$$

其中

$$[H] = [1 \quad \cos\varphi \quad \dots \quad \cos m\varphi]$$

$$\{A^{(k)}\}^T = [A_0^{(k)} \quad A_1^{(k)} \quad \dots \quad A_m^{(k)}]$$

由(2.2)式可得

$$\int_0^T [H]^T (\dot{U}^{(k+1)} + \alpha_1 U^{(k+1)} + (\alpha_2 U^{(k)}) U^{(k+1)} + (\alpha_3 U^{(k)2}) U^{(k+1)}) dt = 0$$

即

$$\int_0^{2\pi} [H]^T (\dot{U}^{(k+1)} + \alpha_1 U^{(k+1)} + (\alpha_2 U^{(k)}) U^{(k+1)} + (\alpha_3 U^{(k)2}) U^{(k+1)}) d\varphi = 0 \quad (2.4)$$

将(2.3)式代入(2.4)式,则(2.4)式可化为

$$-\omega^2 [M^{(k)}] \{A^{(k+1)}\} + \alpha_1 [K_0^{(k)}] \{A^{(k+1)}\} + \alpha_2 [K_1^{(k)}] \{A^{(k+1)}\} + \alpha_3 [K_2^{(k)}] \{A^{(k+1)}\} = 0 \quad (2.5)$$

式中

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\begin{aligned}
 [M^{(K)}] &= \int_0^{2\pi} [H]^T [\ddot{H}] d\varphi \\
 &= \pi \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & m^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
 [K_0^{(K)}] &= \int_0^{2\pi} [H]^T [H] d\varphi \\
 &= \pi \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$[K_1^{(K)}] = \int_0^{2\pi} ([H]\{A^{(K)}\}) [H]^T [H] d\varphi \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
 K_{1ij}^{(K)} &= \sum_{r=0}^m A_r^{(K)} \int_0^{2\pi} \cos i\varphi \cos j\varphi \cos r\varphi d\varphi \\
 [K_2^{(K)}] &= \int_0^{2\pi} ([H]\{A^{(K)}\}) [H]\{A^{(K)}\}) [H]^T [H] d\varphi
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
 K_{2ij}^{(K)} &= \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^m A_r^{(K)} A_s^{(K)} \int_0^{2\pi} \cos i\varphi \cos j\varphi \cos r\varphi \cos s\varphi d\varphi \\
 &\quad (i, j = 0, 1, \dots, m)
 \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}
 [K_N^{(K)}] &= a_2 [K_1^{(K)}] + a_3 [K_2^{(K)}] \\
 K_{Nij}^{(K)} &= a_2 K_{1ij}^{(K)} + a_3 K_{2ij}^{(K)} \\
 &\quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, m)
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

将(2.6)、(2.7)、(2.10)代入(2.5)式, 则(2.5)式可表示为

$$\begin{aligned}
 &-\omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & m^2 \end{bmatrix} \{A^{(K+1)}\} + a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \{A^{(K+1)}\} \\
 &+ \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} K_{N00}^{(K)} & K_{N01}^{(K)} & \cdots & K_{N0m}^{(K)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{Nm0}^{(K)} & K_{Nm1}^{(K)} & \cdots & K_{Nmm}^{(K)} \end{bmatrix} \{A^{(K+1)}\} = 0
 \end{aligned} \quad (2.11)$$

记

$$\{\bar{A}^{(K+1)}\}^T = [A_1^{(K+1)} \dots A_m^{(K+1)}]$$

将(2.11)式按划线部分分块, 计算其乘积得

$$\left(\alpha_1 + \frac{K_{N00}^{(K)}}{\pi}\right) A_0^{(K+1)} = -\frac{1}{\pi} [K_{N01}^{(K)} \dots K_{N0m}^{(K)}] \{\bar{A}^{(K+1)}\} \quad (2.12)$$

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m^2 \end{bmatrix} \{\bar{A}^{(K+1)}\} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \{\bar{A}^{(K+1)}\} + \frac{A_0^{(K+1)}}{\pi} \begin{bmatrix} K_{N10}^{(K)} \\ \dots \\ K_{Nm0}^{(K)} \end{bmatrix} + \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} K_{N11}^{(K)} & K_{N12}^{(K)} & \dots & K_{N1m}^{(K)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{Nm1}^{(K)} & K_{Nm2}^{(K)} & \dots & K_{Nmm}^{(K)} \end{bmatrix} \{\bar{A}^{(K+1)}\} = 0 \quad (2.13)$$

由(2.12)式得

$$A_0^{(K+1)} = -\frac{1}{\alpha_1 \pi + K_{N00}^{(K)}} [K_{N01}^{(K)} \dots K_{N0m}^{(K)}] \{\bar{A}^{(K+1)}\} \quad (2.14)$$

将(2.14)式代入(2.13)式得特征方程为

$$-\omega^2 [\bar{M}^{(K)}] \{\bar{A}^{(K+1)}\} + [\bar{K}^{(K)}] \{\bar{A}^{(K+1)}\} + [\bar{K}_N^{(K)}] \{\bar{A}^{(K+1)}\} = 0 \quad (2.15)$$

式中

$$[\bar{M}^{(K)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m^2 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}^{(K)}] = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}_N^{(K)}] = \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} K_{N11}^{(K)} & K_{N12}^{(K)} & \dots & K_{N1m}^{(K)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{Nm1}^{(K)} & K_{Nm2}^{(K)} & \dots & K_{Nmm}^{(K)} \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{\pi(\alpha_1 \pi + K_{N00}^{(K)})} \begin{bmatrix} K_{N10}^{(K)} \\ \dots \\ K_{Nm0}^{(K)} \end{bmatrix} [K_{N01}^{(K)} \dots K_{N0m}^{(K)}]$$

于是求解(2.1)式频率问题就转化为求矩阵特征值问题。

2. 求解步骤

1. 给初向量 $\{A^{(0)}\}$, 按给定振幅规范化;
2. 求 $[\bar{K}_N^{(0)}]$, 由(2.15)式求出矩阵基频特征值 ω 及其对应的特征向量 $\{\bar{A}^{(1)}\}$;
3. 将 $\{\bar{A}^{(1)}\}$ 代入(2.14)式求出 $A_0^{(1)}$;
4. 将 $A_0^{(1)}$ 及特征向量 $\{\bar{A}^{(1)}\}$ 组成的向量规范化, 检查特征值是否收敛, 若收敛则停止计算, 否则, 由基频所对应的特征向量确定 $\{\bar{A}^{(K+1)}\}$, 重新计算, 直至收敛为止。

2. 多自由度系统

1. 基本方程

设方程为

$$[M]\{\delta\} + [K]\{\delta\} + [K_1]\{\delta\} + [K_2]\{\delta\} = 0 \quad (2.16)$$

其中 $[M]$ 、 $[K]$ 为常系统矩阵， $[K_1]$ 为含 $\{\delta\}$ 一次方矩阵， $[K_2]$ 为含 $\{\delta\}$ 二次方矩阵。

对(2.16)进行如下迭代

$$[M]\{\delta^{(K+1)}\} + [K]\{\delta^{(K+1)}\} + [K_{1\{\delta^{(K)}}}\}\{\delta^{(K+1)}\} + [K_{2\{\delta^{(K)}}}\}\{\delta^{(K+1)}\} = 0 \quad (2.17)$$

由 $[M]$ 、 $[K]$ 求出系统前 N_M 阶线性主模态记为 $[\Phi]$ ，及其对应的特征值记为 $[\lambda] = [\text{diag } \lambda_i]$ ，将位移表达成前 N_M 阶线性主模态的组合，设

$$\{\delta^{(K)}\} = [\Phi]\{q^{(K)}\} \quad (2.18)$$

将(2.18)式代入(2.17)式，由线性模态对质量阵和线性刚度阵的正交性有

$$[I]\{q^{(K+1)}\} + [\lambda]\{q^{(K+1)}\} + [\bar{K}_1^{(K)}]\{q^{(K+1)}\} + [\bar{K}_2^{(K)}]\{q^{(K+1)}\} = 0 \quad (2.19)$$

式中

$$[\bar{K}_1^{(K)}] = [\Phi]^T [K_{1\{\delta^{(K)}}}] [\Phi]$$

$$[\bar{K}_2^{(K)}] = [\Phi]^T [K_{2\{\delta^{(K)}}}] [\Phi]$$

根据振动的周期性， $\{q^{(K+1)}\}$ 可设成如下形式

$$\begin{aligned} \{q^{(K+1)}\} &= \{A^{(K+1)}\}_0 + \{A^{(K+1)}\}_1 \cos \varphi + \dots + \{A^{(K+1)}\}_m \cos m\varphi \\ &= \begin{bmatrix} [I] & [I] \cos \varphi & \dots & [I] \cos m\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{A^{(K+1)}\}_0 \\ \dots \\ \{A^{(K+1)}\}_m \end{bmatrix} \\ &\triangleq [N]\{A^{(K+1)}\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

由(2.19)式有

$$\int_0^{2\pi} [N]^T ([I]\{q^{(K+1)}\} + [\lambda]\{q^{(K+1)}\} + [\bar{K}_1^{(K)}]\{q^{(K+1)}\} + [\bar{K}_2^{(K)}]\{q^{(K+1)}\}) d\varphi = 0 \quad (2.21)$$

将(2.20)式代入(2.21)式得

$$-\omega^2 [\bar{M}]\{A^{(K+1)}\} + [\bar{K}]\{A^{(K+1)}\} + [\bar{K}_1^{(K)}]\{A^{(K+1)}\} + [\bar{K}_2^{(K)}]\{A^{(K+1)}\} = 0 \quad (2.22)$$

式中

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$[\bar{M}] = \pi \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [I] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m^2 [I] \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}] = \pi \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [\lambda] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [\lambda] \end{bmatrix}$$

$$[K_i^{(K)}] = \begin{pmatrix} [K_i^{(K)}]_{00} & [K_i^{(K)}]_{01} & \cdots & [K_i^{(K)}]_{0m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [K_i^{(K)}]_{m0} & [K_i^{(K)}]_{m1} & \cdots & [K_i^{(K)}]_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} [K_i^{(K)}]_{rs} &= \int_0^{2\pi} [\Phi]^T [K_1] [\Phi] \cos r\varphi \cos s\varphi d\varphi \\ &= \sum_{p=0}^m \int_0^{2\pi} [\Phi]^T [K(\{B\}_p)_1] [\Phi] \cos p\varphi \cos s\varphi \cos r\varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_i^{(K)}]_{rs} &= \int_0^{2\pi} [\Phi]^T [K_2] [\Phi] \cos r\varphi \cos s\varphi d\varphi \\ &= \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^m \int_0^{2\pi} [\Phi]^T [K(\{B\}_p\{B\}_q)_2] [\Phi] \cos p\varphi \cos q\varphi \cos s\varphi \cos r\varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$(r, s = 0, 1, \dots, m)$$

其中

$$\{B\}_i = [\Phi] \{A^{(K)}\}_i \quad (i = 0, 1, \dots, m)$$

记

$$\{\bar{A}^{(K+1)}\}^T = [\{A^{(K+1)}\}_1^T \cdots \{A^{(K+1)}\}_m^T]$$

$$[K_N^{(K)}] = [K_1^{(K)}] + [K_2^{(K)}]$$

$$[K_N^{(K)}]_m = [K_1^{(K)}]_{rs} + [K_2^{(K)}]_{rs}$$

将(2.22)式中矩阵按划线部分分块, 计算其乘积得

$$\begin{aligned} (\pi[\lambda] + [K_N^{(K)}]_{00}) \{A^{(K+1)}\}_0 \\ + [[K_N^{(K)}]_{01} \cdots [K_N^{(K)}]_{0m}] \{\bar{A}^{(K+1)}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 \pi \begin{bmatrix} [I] & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & m^2[I] \end{bmatrix} \{\bar{A}^{(K+1)}\} + \pi \begin{bmatrix} [\lambda] & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & [\lambda] \end{bmatrix} \{\bar{A}^{(K+1)}\} \\ + \begin{bmatrix} [K_N^{(K)}]_{11} & \cdots & [K_N^{(K)}]_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ [K_N^{(K)}]_{m1} & \cdots & [K_N^{(K)}]_{mm} \end{bmatrix} \{\bar{A}^{(K+1)}\} + \begin{bmatrix} [K_N^{(K)}]_{10} \\ + \\ [K_N^{(K)}]_{m0} \end{bmatrix} \{A^{(K+1)}\}_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

由(2.23)式得

$$\begin{aligned} \{A^{(K+1)}\}_0 &= -(\pi[\lambda] + [K_N^{(K)}]_{00})^{-1} \\ & \quad [[K_N^{(K)}]_{01} \cdots [K_N^{(K)}]_{0m}] \{\bar{A}^{(K+1)}\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

将(2.25)式代入(2.24)式可得特征方程为

$$(-\omega^2[M^*] + [K^*] + [K_N^{(K)}]) \{\bar{A}^{(K+1)}\} = 0 \quad (2.26)$$

式中

$$[M^*] = \pi \begin{bmatrix} [I] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4[I] & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & m^2[I] \end{bmatrix}$$

$$[K^*] = \pi \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [\lambda] & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & [\lambda] \end{bmatrix}$$

$$[K_N^{*(K)}] = \begin{bmatrix} [K_N^{(K)}]_{11} \cdots [K_N^{(K)}]_{1m} \\ \cdots \cdots \cdots \\ [K_N^{(K)}]_{m1} \cdots [K_N^{(K)}]_{mm} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} [K_N^{(K)}]_{10} \\ \cdots \\ [K_N^{(K)}]_{m0} \end{bmatrix} (\pi[\lambda] + [K_N^{(K)}]_{00})^{-1} [[K_N^{(K)}]_{01} \cdots [K_N^{(K)}]_{0m}]$$

于是求解多自由度系统非线性振动频率问题就已转化为求矩阵特征值问题。

2. 求解步骤

1. 给初向量 $\{A^{(0)}\}$ ，按给定振幅规范化；
2. 由(2.26)式求出所需特征值对，由基频所对应的特征向量确定 $\{\bar{A}^{(1)}\}$ ；
3. 将 $\{\bar{A}^{(1)}\}$ 代入(2.25)式求出 $\{A^{(1)}\}_0$ ；
4. 将 $\{A^{(1)}\}_0$ 及 $\{\bar{A}^{(1)}\}$ 组成的向量规范化，检查特征值是否收敛，若收敛则停止计算，否则，由基频所对应的特征向量确定 $\{\bar{A}^{(k+1)}\}$ ，重新计算，直至收敛为止。

三、算 例

1. 单自由度系统

考虑如下方程所控制的系统

$$\ddot{U} + a_1 U + a_2 U^2 + a_3 U^3 = 0$$

其解可设为

$$U = \sum_{i=0}^m A_i \cos i\varphi$$

分别取 $m=2$ 和 $m=3$ 进行计算，计算时取

$a_1=1$ ，所得结果列入表1中。其中 a 为振幅。

对方程

$$\ddot{U} + U + U^3 = 0$$

其频率精确解为1.318（参见文[2]），该解与用正交函数法取四个谐波计算所得结果精确一致。而当取三个谐波计算时，因为

$$\cos^3 \varphi = 0.75 \cos \varphi + 0.25 \cos^3 3\varphi$$

未考虑 $\cos 3\varphi$ 的影响，因而导致一定误差。表中文[1]所列结果是根据多尺度法所得幅频关系

$$\omega = \sqrt{a_1} \left(1 + \frac{9a_3 a_1 - 10a_2^2}{24a_1^2} \varepsilon^2 a^2 \right) + O(\varepsilon^3)$$

计算所得。该式只适用于弱非线性系统，而且其振幅 εa 为 $\cos \varphi$ 的振幅，并不能代表系统实际振幅，而我们所取的 a 为系统实际振幅，因此，该结果仅用作参考。

表 1

ω		$m=2$	$m=3$	[1]
$\ddot{U} + U + U^3 = 0$	$a=1.0$	1.323	1.318	1.375
	$a=0.05$	0.998	0.998	0.999
$\ddot{U} + U + U^2 = 0$	$a=0.1$	0.992	0.992	0.996
	$a=0.5$	0.849	0.850	0.896
	$a=0.05$	0.9988	0.9988	0.9998
$\ddot{U} + U + U^2 + U^3 = 0$	$a=0.1$	0.9957	0.9957	0.9996
	$a=0.5$	0.9600	0.9605	0.9896

2. 多自由度系统

考虑长为 L 的梁,如图1所示,设梁横截面积为 A ,材料弹性模量为 E , Ox 为梁的中性轴,梁中性轴上任一点的横向位移为 $W(x,t)$,忽略纵向位移,大挠度时应变能为(参看文献[3],第15页)

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^L W_{,xx}^2 dx + \frac{EA}{8L} \left(\int_0^L W_{,x}^2 dx \right)^2$$

其动能为

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \dot{W}^2 dx$$

用样条函数法离散,设

$$W(x,t) = \sum_{i=-1}^{M+1} \varphi_i(x) q_i(t) = [\varphi] \{q\}$$

由哈密顿原理可得离散型的运动微分方程

$$\rho A [B] \{\dot{q}\} + EI [A] \{q\} + \frac{EA}{2L} [C] \{q\} \{q\}^T [C] \{q\} = 0$$

其中 $[\varphi]$, $[A]$, $[B]$, $[C]$ 的表达式参考文献[4]。因其为立方非线性,故 $\{q\}$ 可设为

$$\{q\} = \{A\}_1 \cos \varphi + \dots + \{A\}_m \cos(2m-1)\varphi$$

计算时取两个谐波,分别对两端简支梁和两端固支梁进行计算,结果列于表2和表3中。 ω_L 是梁一阶线性频率, W_0 是梁中心处最大位移, r 是梁横截面回转半径。

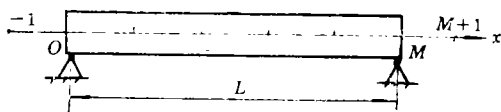


图 1

从表中结果可以看出:其它方法因忽略了高阶谐波的影响,所以随着振幅的增大,其计算结果与本法结果差异越大;又因为其它方法所取振幅大于系统实际振幅,所以数值结果普遍偏高。因此,本文结果更具有可信性。

四、方法评论

1. 该法不仅考虑了非线性振动频率和模态对振幅的依赖性,还考虑了高阶谐波的影响,因此计算精度高。

表2 两端简支梁

W_0/r	本文解法	时空有限条 [3]	伽辽金法 [5]
	ω/ω_L	ω/ω_L	ω/ω_L
0.6	1.0330	1.0333	1.0332
0.8	1.0579	1.0586	1.0583
1.0	1.0892	1.0903	1.0897
2.0	1.3180	1.3283	1.3229
3.0	1.6264	1.6452	1.6394

表3 两端固支梁

W_0/r	本文解法	有限元 [6]	伽辽金法 [5]
	ω/ω_L	ω/ω_L	ω/ω_L
0.5	1.0056	1.0056	1.0058
1.0	1.0222	1.0222	1.0232
2.0	1.0854	1.0855	1.0897
3.0	1.1821	1.1822	1.1924
4.0	1.3042	1.3045	1.3229

2. 该法利用了振动的周期性、线性模态的正交交、三角级数的正交性等优点, 因此计算时收敛快, 计算工作量小。
3. 该法适用范围广, 适用于任意振幅和任意带平方和立方项非线性系统。
4. 因为振动系统中, 一般都是低阶模态和低阶谐波起主要作用, 因此计算时线性主模态和谐波数取到 4 就够了, 所以用该法编程时矩阵阶数少, 带宽小, 需要的计算机内存少, 可在微机上计算。

参 考 文 献

- [1] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, A Wiley Interscience Publication, New York (1979).
- [2] T. D. Burton, On the amplitude decay of strongly nonlinear damped oscillation, *J. Sound and Vib*, **87**(4)(1983), 535—541.
- [3] Y. K. Cheng and S. L. Lau, Incremental time-space finite strip method for nonlinear structural dynamicals, *Earthquake Engineering and Structural Dynamicals*, **10**(1982), 239—253.
- [4] 秦荣, 《结构力学中的样条函数方法》, 广西人民出版社, 南宁(1985).
- [5] 唐乾刚、孙世贤, 多自由度系统及结构非线性自由振动的摄动谐波平衡法, 国防科技大学学报, **14**(4)(1992), 13—20.
- [6] G. V. Rao, et al, Finite element formulation for the large amplitude free vibrations of beams and orthotropic plates, *Computers Stru.*, **6**(1976), 169—172.

Nonlinear Oscillation Analysis by an Orthogonal Function Method

Sun Pizhong Tang Qiangang Sun Shixian

(National University of Defence Technology, Changsha 410073)

Abstract

In this paper, an orthogonal function method is presented based on the idea to suppose periodic solution with the method of harmonic balance. The displacement is expressed in the form of trigonometric functions, a group of simplified eigenequations are obtained by the use of orthogonarity of trigonometric functions and linear modes. The method overcomes the difficulty of a drift term existing in systems with quadratic nonlinearities. The calculation examples show that the method has the advantages of high calculation precision, high convergence speed and little calculation work.

Key words orthogonal function method, nonlinearity, oscillation characteristics, eigenequations

下期目录预告

- 钟万勰 朱建平 对差分法时程积分的反思
- 程尧舜 卢文达 方红 实心矩形截面杆的初始塑性后屈曲
- 威廉 H·包尔森 具有耗散接头的三维欧拉—伯努利杆系的特征频率
- J·巴德 孙博华 论演化方程的结构
- 张义民 陈塑寰 周振平 刘铁强 静力分析的一般随机摄动法
- 田根宝 一类半线性椭圆型方程衰减正整解的存在唯一性
- 刘汉池 纯弯曲矩形截面梁 I 型单边裂纹端部的应力应变场及裂纹失稳扩展临界应力的计算
- 杜森田 刘寒冰 陈塑寰 连建设 弹塑性结构在外载和温度作用下的安定分析
- 彭向和 陈元强 曾祥国 受轴向压缩圆柱壳塑性屈曲的内时分析