应用数学和力学，第16卷 第7期（1995年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

分析结构非线性问题的杂交可变基Galerkin方法*

赵 琪

（上海市应用数学和力学研究所，上海大学，上海 200072）

叶天麒

（西北工业大学飞机工程系，西安 710072）

摘 要

基于渐近摄动理论和 Galerkin 方法，本文提出分析结构非线性问题的杂交可变基 Galerkin 方法。本文方法首次引入可变基函数的概念，可大幅度降低计算量，而且在有限元法等数值方法中易于推广应用，在解决非线性问题领域有广泛应用前景。最后本文分析圆板大挠度问题和扁球壳大挠度问题，以验证本文方法的有效性。

关键词 非线性 可变基 渐近摄动理论 Galerkin方法

一、前 言

摄动法和 Galerkin 方法是分析结构非线性问题的重要手段。但这两种方法都有不足之处，摄动法小参数要求限制其在大参数范围中的应用，而 Galerkin 方法选择基函数具有很大盲目性，针对具体问题如何选择合适基函数是其解决问题成败的关键。

针对上述问题，Noor 等人在系列文章[3~10]中采用含小参数方程解的摄动展开项做 Galerkin 方法的基函数应用在一些热传导、结构问题上效果明显，在参数较大时仍能获得允许精度的解。其离散方式就是所谓的缩减基方法。上述方法尽管延拓了参数范围，但未考虑结构非线性响应历程中参数对基函数本身的影响，在大参数范围所构造基函数的有效性降低了，解误差增大，说明这时应寻求更高效率的基函数。Geer等人改进了上述方法[2,11,12]，由大、小参数的摄动展开项共同组成基函数，由于考虑了大参数的因素，大参数范围的解精度提高很多，但对一些控制方程而言，大参数时的零阶方程不存在而无法实施。上述方法都未摆脱传统固定基函数的模式，都忽略了结构非线性响应历程中参数对基函数本身的影响，因为在大参数范围内这种影响尤其明显，成为降低固定基函数有效性的主要因素。

在前人工作基础上，基于渐近摄动理论和 Galerkin 方法，本文提出杂交可变基 Galerkin 方法，首次引入可变基函数的概念，有效考虑参数对基函数本身的影响，完全消

* 赵兴华推荐。1994年6月30日收到。

除上述方法的不足之处，通过减缩基函数，可大幅度降低计算量．本文方法具有广泛通用性．最后，本文结合B样条函数分析了圆板大挠度问题和扁球壳大挠度问题，以验证本文方法的有效性．

二、杂交可变基Galerkin方法

假设结构非线性响应用下述方程描述：

$$\bar{\alpha}(\bar{x})=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.1}$$

$$\bar{\beta}(\bar{x})=0 \qquad (\text{在}\Gamma\text{上}) \tag{2.2}$$

这里$\bar{x}$表示基本未知量，$\bar{\alpha},\bar{\beta}$是微分算子，$\bar{\alpha}$是非线性算子，Ω是结构所占区域，Γ是其边界．

为计算方便，对控制方程(2.1)、(2.2)无量纲化，得到如下内含物理参数λ的控制方程：

$$\alpha(x,\lambda)=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.3}$$

$$\beta(x)=0 \qquad (\text{在}\Gamma\text{上}) \tag{2.4}$$

首先将参数λ分成M_λ段，假定结构非线性响应前$p-1$段已求出，现在确定p段$[\lambda_p,\lambda_{p+1}]$结构非线性响应，实施下列步骤可确定该段的基函数．

在p段$[\lambda_p,\lambda_{p+1}]$上，将未知量$x$在该段初始点$\lambda_p$处按正则摄动级数展开：

$$x=x_0^p+\sum_{i=1}^{N-1}\Delta\lambda^i x_i^p \tag{2.5}$$

这里$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_p(\lambda_p\leqslant\lambda\leqslant\lambda_{p+1})$表示摄动参数，$x_0^p$，$x_i^p$是$\lambda_p$处各阶摄动函数．

将x摄动展开式(2.5)代入控制方程(2.3)中，令摄动参数$\Delta\lambda$的同次幂系数为零，得到如下系列递归摄动方程：

$$\alpha_0(x_0^p)=R_0 \tag{2.6}$$

$$\alpha_i(x_i^p)=R_i \tag{2.7}$$

这里　R_i仅依赖低于i阶的各阶摄动函数，因此上述方程理论上是可解的．零阶摄动方程(2.6)与控制方程(2.3)形式相同，是非线性方程，其解x_0^p就是p段初始点λ_p处的解$x(\lambda_p)$，已知或在前段中已求出，无需求解．其余各阶摄动方程(2.7)比控制方程(2.3)简单，是线性方程，解是未知的，需要求解．一般情况下上述摄动方程很难找到封闭解，可采用满足边界条件(2.4)的任一完备函数系列$\{\phi_k\}$(本文称为初级基函数)和Galerkin方法进行求解．

将各阶摄动函数x_i^p表示成初级基函数$\{\phi_k\}$的线性组合：

$$x_i^p=\sum_{k=1}^{M}a_k^i\phi_k \qquad (i=1,2,\cdots,N-1) \tag{2.8}$$

将(2.8)式代入各阶摄动方程(2.7)的Galerkin表达式中递归求解：

$$\int_\Omega\left[\alpha_i\left(\sum_{k=1}^{M}a_k^i\phi_k\right)-R_i\right]\phi_l d\Omega=0 \tag{2.9}$$

$$(i=1,2,\cdots,N-1)$$

于是得到非零阶各阶摄动函数x_i^p，与零阶摄动函数x_0^p共同组成p段结构非线性响应的N维基函数$\{x_\beta^p\}$．

其次，确定p段结构非线性响应．将未知量x表示成N维基函数$\{x_\beta^p\}$的线性组合：

$$x=\sum_{\beta=0}^{N-1}b_\beta x_\beta^p \tag{2.10}$$

代入控制方程(2.3)的 Galerkin 表达式：

$$\int_\Omega \alpha\left(\sum_{\beta=0}^{N-1}b_\beta x_\beta^p,\lambda\right)x_\alpha d\Omega=0 \qquad (\lambda_p\leqslant\lambda\leqslant\lambda_{p+1}) \tag{2.11}$$

(2.11)式构成p段结构非线性响应的非线性代数方程组，取p段初始点λ_p处的解 x_0^p 做初值，通过牛顿法等迭代方法就可求出 p 段结构非线性响应。在所有段中重复上述过程就能确定整个结构非线性响应历程。

三、本文方法的若干特点

（1） 本文方法对参数无任何限制，适用解决大参数范围的结构非线性问题。

（2） 可变基函数之间是线性无关的，总是在所求点附近展开解空间，因此只需少量可变基函数就能充分描述附近各点的结构非线性响应。为 Galerkin 方法提供了系统地构造高效基函数的方法。

（3） 确定可变基函数的递归摄动方程是线性的，而且齐次部分相同。意味着相应的递归摄动代数方程组的系数矩阵相同，因此确定基函数的计算量是比较小的。

（4） 用数目少的可变基函数代替数目多的初级基函数，可大幅度降低计算量，因此本文方法实质是缩减基方法。

四、实 例

为验证本文方法的有效性，本文分析了两个典型结构非线性问题，初级基函数均采用 B 样条函数，关于B样条函数理论参阅文献[13]。

（1） 均布载荷作用下圆板大挠度问题

图1给出圆板的材料性质及几何特征。采用 Van Kármán 混合型控制方程[14]，挠度y和径向力S_r摄动级数展开如下：

$$y=y_0+y_1\Delta Q+y_2\Delta Q^3+y_3\Delta Q^5+\cdots$$
$$S_r=S_{r0}+S_{r1}\Delta Q^2+S_{r2}\Delta Q^4+S_{r3}\Delta Q^6+\cdots$$

可变基函数均由三阶摄动函数组成，具体实施过程见文献[15]。

图 2 给出圆板固定夹紧情况的本文解和样条函数解。本文解采用二次改变基函数的方案，样条函数解也采用16网格上的B样条函数计算。可变基函数具有很高效率，具有 8 个可变基函数的本文解与具有37个基函数的样条函数解吻合一致。

图 3 给出圆板固定夹紧情况的本文解和摄动解。本文解仍采用二次改变基函数的方案。0线、Ⅰ线、Ⅱ线分别表示 $Q=0$，8，16 时的各级摄动解。从中可以看出：（1）当载荷增量ΔQ较大时，各级摄动解与真解误差较大，经过 Galerkin 方法修正后的解即本文解与真解吻合一致，消除了差距，说明本文方法消除了摄动法的小参数限制，延拓了摄动法的应用范

围. (2)当ΔQ较小时，各级摄动解与真解差距较小，从侧面说明在所求点附近构造的基函数比远离该点处构造的基函数更能充分描述该点的性态，即表明可变基函数比固定基函数效率要高，能进一步提高 Galerkin 方法的有效性.

表 1 给出圆板固定夹紧情况下采用不同次数改变基函数的方案计算的本文解与样条函数

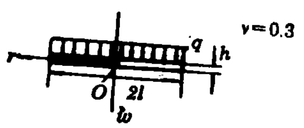

图 1

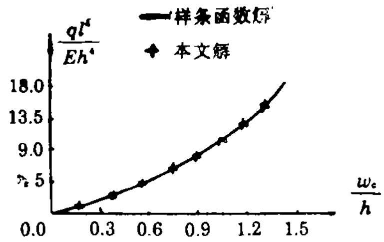

图2　本文解和样条函数解的比较

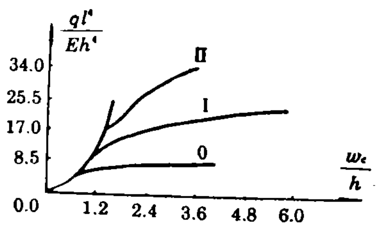

图3　本文解与各级摄动解的关系

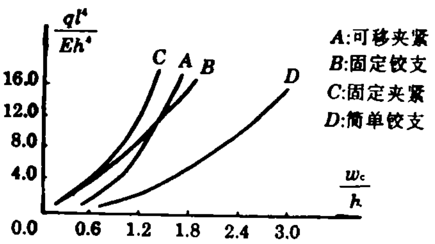

图4　四种边界情况圆板中心挠度与载荷的关系

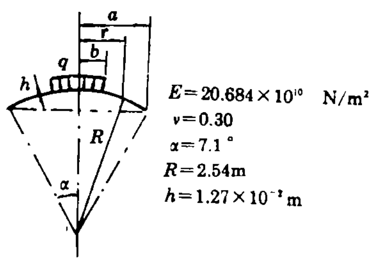

图 5

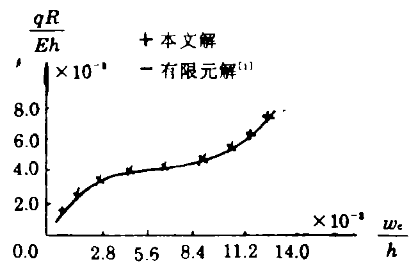

图6　固定夹紧均布载荷情况的本文解和有限元解

表 1　　　　　　　　基函数改变次数对本文解的影响

载荷 $\frac{ql^4}{Eh^4}$	圆板中心挠度 w_c/h			
	杂交可变基 Galerkin 方法			样条函数解
	1 次	2 次	3 次	
4.0	*0.57674	*0.57674	*0.57674	0.57678
8.0	0.92377	0.92377	0.92377	0.92414
12.0	1.16053	1.16053	*1.16156	1.16157
16.0	1.34208	1.34208	1.34398	1.34401
20.0	1.49088	*1.49378	*1.49380	1.49380
24.0	1.61794	1.62186	1.62214	1.62214

* 表示构造基函数处

解．随着改变基函数次数的增加，本文解精度逐渐增高，逐渐逼近样条函数解．

图 4 给出圆板在简单铰支、固定铰支、固定夹紧和可移夹紧四种边界情况的中心挠度与载荷的关系．

（2） 中心分布压力作用下圆底扁球壳的大挠度问题

该问题是一高度非线性问题，其非线性响应包含先软化后硬化的屈曲过程．图 5 给出圆底扁球壳的材料性质和几何特征．仍采用混合型的控制方程[17]，挠度y和径向力S_r按正则摄动级数展开如下：

$$y=y_0+y_1\Delta Q+y_2\Delta Q^2+y_3\Delta Q^3+\cdots$$

$$S_r=S_{r0}+S_{r1}\Delta Q+S_{r2}\Delta Q^2+S_{r3}\Delta Q^3+\cdots$$

可变基函数均采用三阶摄动函数组成，具体求解过程见文献[16]．下面计算结果均采用三次改变基函数的方案．

图6给出均布压力、固定夹紧情况的本文解和有限元解[17]．本文解精度很高，与有限元解吻合一致．

图7、8、9分别给出简单铰支、固定夹紧、可移夹紧三种边界情况下圆底扁球壳在不同载荷作用半径$\left(\lambda=\frac{r}{a}=1,\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$情况下的中心挠度与载荷的关系．

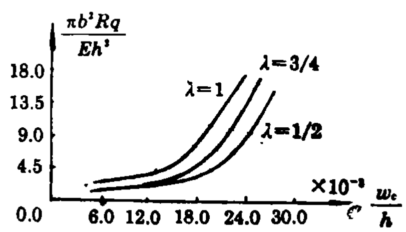

图7 简单铰支不同λ值的壳中心挠度与载荷的关系

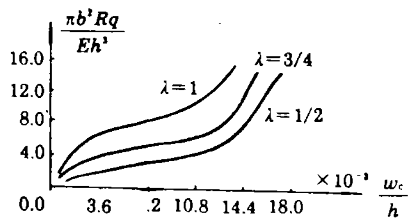

图8 固定夹紧不同λ值的壳中心挠度与载荷的关系

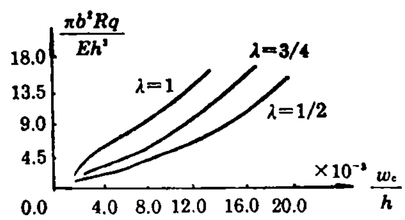

图9 可移夹紧不同λ值的壳中心挠度与载荷的关系

五、结　　论

本文提出求解结构非线性问题的杂交可变基 Galerkin 方法，首次引入了可变基函数的概念，可大幅度降低计算量，并且易于推广应用．该方法拓宽了摄动法应用范围，提高了 Galerkin 方法的有效性，在求解结构非线性问题领域有很大的实用价值和发展前景．

（1） 利用渐近摄动法提供了系统构造基函数的一般方法，首次提出可变基函数的概念．

（2） 该方法是解析方法与数值方法的有机结合，可消除摄动法的小参数限制和Galerkin 方法盲目选择基函数的不足之处。

（3） 本文方法可以毫不困难地推广到直接从泛函出发的其它离散数值方法中去。如从最小位能原理或最小余能原理出发构造可变基函数，并用它们确定量级大小。

（4） 通过选择不同的初级基函数，诸如有限元、边界元等，本文方法很容易在求解大型结构非线性问题的有限元法、边界元法等数值方法中应用，形成通用缩减基计算方法。

参 考 文 献

[1] A. K. Noor, Hybrid analytical technique for nonlinear analysis of structures, *AIAA J.*, 23(1985), 938—946.

[2] J. F. Geer, A hybrid perturbation-Galerkin method for differential equations containing parameters, *Appl. Mech. Rev.*, 42 (11) Part 2, Nov. (1989).

[3] A. K. Noor, Recent advances in reduction problems for nonlinear problems, *Computers and Structures*, 13 (1981), 31—44.

[4] A. K. Noor, C. M. Andersen and J. M. Peters, Reduced basis technique for collapse analysis of shell, *AIAA J.*, 19(1981), 393—397.

[5] A. K. Noor and J. M. Peters, Bifurcation and post-buckling analysis of laminated composite plates via reduced basis technique, *Comp. Meth. Appl. Mach. Eng.*, 29 (1981), 271—295.

[6] A. K. Noor, and J. M. Peters, Multiple-parameter reduced basis technique for bifurcation and post-buckling analysis of composite plates, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 19(1983), 1783—1803.

[7] A. K. Noor and J. M. Peters, Recent advances in reduction methods for instability analysis of structures, *Computers and Structures*, 10(1983), 67—80.

[8] A. K. Noor and J. M. Peters, Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures, *AIAA J.*, 18 (1980), 455—462.

[9] A. K. Noor, and C. D. Balch, Hybrid perturbation/Bubnov-Galerkin technique for nonlinear thermal analysis, *AIAA J.*, 22(1984), 287—294.

[10] A. K. Noor, C. D. Balch and M. A. Shibut, Reduction methods for nonlinear steady-state thermal analysis, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 20 (1984), 1323—1348.

[11] J. F. Geer and C. M. Anderson, A hybrid perturbation Galerkin technique with applications to slender body theory, *SIAM J. Appl. Mach.*, 49(1989), 344—356.

[12] J. F. Geer and C. M. Anderson, A hybrid perturbation Galerkin method which combines mutiple expansions, *NASA Langley Research Center ICASE Report*, 89(8), (1989).

[13] 石钟慈，样条有限元，计算数学，1 (1979), 50—72.

[14] 钱伟长等，《奇异摄动理论及其在力学中的应用》，科学出版社，北京 (1981).

[15] 赵琪，叶天麒，杂交可变基 Galerkin 方法在圆板大挠度问题中的应用，航空学报，A版（已收录）.

[16] Zhao Qi and Ye Tianqi, The large deflection of spherical caps under centrally distributed pressures, 7th Brazilian Symposium on Piping and Pressure Vessels

Florianpolis, 07—09 De Outubro De (1992).
[17] 叶开沅，宋卫平，中心分布压力作用下圆底扁球壳的变形和稳定性，应用数学和力学，9 (10) (1988), 857—864.

Hybrid Changeable Basis Galerkin Technique for Nonlinear Analysis of Structures

Zhao Qi

(Shanghai Institute of Applied Methematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072)

Ye Tianqi

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract

Based on the asymptotical perturbation method and the Galerkin technique, the hybrid changeable basis Galerkin technique is presented for predicting the nonlinear response of structures. By the idea of changeable basis functions first proposed, it greatly reduces calculation and is easily used in other numerical discretization techniques, such as finite element method etc. It appears to have high potential for solution of nonlinear structural problems. Finally, the effectiveness of this technique is demonstrated by means of two numerical examples: the large deflection of circular plates objected to uniform normal load and the large deflection of spherical caps under centrally distributed pressures.

Key words nonlinear, changeable basis function, asymptotical perturbation method, Galerkin technique