

# 弹塑性结构在外载和温度 作用下的安定分析\*

杜森田 刘寒冰\*\* 陈塑寰 连建设

(吉林工业大学工程力学系 长春 130025)

(杨桂通推荐, 1994年5月3日收到)

## 摘 要

本文在考虑外载和温度的缓慢变化下, 提出了一个新的运动安定定理。同时, 在此基础上, 又导出了既简单又适用的增量破坏准则。文末也以实例说明了它的应用。

**关键词** 塑性变形 增量破坏 运动安定定理

## 一、引 言

一个弹塑性结构, 在外载荷和温度的交变作用下, 可能会导致两种塑性破坏, 即塑性累积破坏(增量破坏)和低周疲劳破坏<sup>[1]</sup>, 此时我们称结构为不“安定的”。反之, 当结构承受在一定范围内变化的外载和温度作用时, 如果引起了一个有利的残余应力分布, 致使结构在经历一定的循环次数之后, 其响应变为完全弹性的, 即塑性变形保持为常值, 这时的结构便称为“安定的”。

在文献[2]中, 我们提出了一个运动安定定理, 当时是通过建立虚设屈服面而导出的, 在那里温度被隐含在定理的表达式中; 现在我们导出的运动安定定理, 虽然在同样条件下, 但并没有首先要建立虚设屈服面的概念, 而是根据经典的运动安定定理的数学表达式中各项的力学意义, 借助于载荷—温度系数, 直接提出来的, 温度也被显含于公式中。尤其重要的是, 文中在考虑了屈服应力随温度变化的情况下, 又导出了既简单又适用的增量破坏准则(见文中式(4.9))。此外, 还应指出的是, 在应用本文的结果求解问题时, 再不必如文献[2]那样, 还得借助于较复杂的数学规划方法了。因而, 本文的方法和结果均具有更大的实用价值。

## 二、基 本 方 程

设有一理想弹塑性材料构成的物体, 基体积为 $V$ , 在给定面力 $p_i$ 和位移 $u_i$ 的表面分别设

\* 国家自然科学基金和吉林省科委应用基础基金资助课题

1993年10月12日第一次收到。

\*\*河海大学工程力学系, 南京

为  $S_p$  和  $S_u$ , 而体力设为  $F_i$ , 则基本方程和边界条件为

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (V \text{内}) \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (V \text{内}) \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \hat{p}_i \quad (S_p \text{上}) \quad (2.3)$$

$$u_i = \hat{u}_i \quad (S_u \text{上}) \quad (2.4)$$

设在整体变形过程中, 忽略粘性效应(蠕变, 应力松弛), 全部应变  $\varepsilon_{ij}$  由以下三部分组成, 即

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^P + \varepsilon_{ij}^T \quad (2.5a)$$

其中  $\varepsilon_{ij}^E = A_{ijkl} \sigma_{kl}$  为弹性应变,  $A_{ijkl}$  为对称正定的弹性张量;  $\varepsilon_{ij}^P$  为塑性应变;  $\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij} T$  为热应变,  $T$  为温度, 它是从没有变形时量起的,  $\alpha_{ij}$  是热膨胀系数张量。

屈服条件与流动法则: 屈服面方程为

$$F = f(\sigma_{ij}) - K(T) = 0 \quad (2.6)$$

它是应力空间的凸曲面,  $f(\sigma_{ij})$  为  $\sigma_{ij}$  的一次齐次函数,  $K(T)$  为屈服应力。而流动法则为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^P &= \dot{\lambda} \partial F / \partial \sigma_{ij} \\ \text{当 } F=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{dK}{dT} \dot{T} &= 0 \text{ 时, } \dot{\lambda} \geq 0 \\ \text{当 } F < 0 \text{ 或 } F=0 \text{ 但 } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial K}{\partial T} \dot{T} < 0 \text{ 时 } \dot{\lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7a)$$

即有

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} F = 0 \quad (2.7b)$$

而塑性比功率为

$$D = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^P = D(\dot{\varepsilon}_{ij}^P, T) \quad (2.8a)$$

令

$$K(T) = K_0 h(T), \quad K_0 = K(0), \quad h(0) = 1 \quad (2.9)$$

则根据(2.8a)、(2.7a)、(2.7b)、(2.6)与(2.9)式可得

$$D = D_0(\dot{\varepsilon}_{ij}^P) h(T) \quad (2.8b)$$

此处,  $D_0$  是相应于  $T=0$  时的塑性比功率。根据实验结果, 多数金属在大多数温度段呈现  $\partial h / \partial T < 0$  的特性。

全部应力  $\sigma_{ij}$  可分解如下:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E + \rho_{ij} \quad (2.10a)$$

此处,  $\sigma_{ij}^E$  是热弹性应力, 它是原结构承受同样的外载和温度作用时, 把结构视为完全弹性的情况下所引起的。而  $\rho_{ij}$  为残余应力, 是一个自我平衡的应力, 它由结构内的瞬时塑性应变场所唯一确定

$$\rho_{ij} = L(\varepsilon_{ij}^P) \quad (2.10b)$$

其中  $L$  为某一确定的线性积分算子。

为使问题简单起见, 我们仅考虑准静态过程, 且假定载荷和温度场是载荷—温度系数  $a_s^{[3]}$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ) 的线性化形式, 于是有

$$\sigma_{ij}^E(\mathbf{x}, t) = \sum_{s=1}^n a_s(t) \sigma_{ij}^{E0}(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

其中  $\sigma_{ij}^{ES}(\mathbf{x})$  为当以  $a_s = 1, a_j = 0 (j \neq s)$  时的热弹性应力场, 而  $\mathbf{x}$  是空间坐标,  $t$  为时间. 于是总应变  $\epsilon_{ij}$  又可写为

$$\epsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl}^E + \epsilon_{ij}^T + \epsilon_{ij}^P + A_{ijkl} \rho_{kl} \quad (2.5b)$$

其中

$$A_{ijkl} \sigma_{kl}^E + \epsilon_{ij}^T = (u_{i,j}^E + u_{j,i}^E) / 2 \quad (2.12)$$

$$\epsilon_{ij}^P + A_{ijkl} \rho_{kl} = (u_{i,j}^R + u_{j,i}^R) / 2 \quad (2.13)$$

$$u_i = u_i^E + u_i^R \quad (2.14)$$

式(2.14)中各项位移的力学意义分别类似于对式(2.10a)中各项的解释.

位移场  $u_i^E$  是热弹性问题的解, 它也可表示为

$$u_i^E(\mathbf{x}, t) = \sum_{s=1}^n a_s(t) u_i^{ES}(\mathbf{x}) \quad (2.15)$$

此处  $u_i^{ES}(\mathbf{x})$  为当  $a_s = 1, a_j = 0 (j \neq s)$  时的热弹性位移场.

总之, 采用这样一种描述, 系数  $a_s$  的变化范围不仅规定了外载的变化界限, 而且也规定了温度的变化界限, 即

$$p_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{s=1}^n a_s(t) p_i^s(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_p \quad (2.16)$$

$$F_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{s=1}^n a_s(t) F_i^s(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \quad (2.17)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{s=1}^n a_s(t) T^s(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \quad (2.18)$$

### 三、运动安定定理

现设在周期性外载和温度作用下,  $\dot{\epsilon}_{ij}^{*P}$  为运动许可的塑性应变率循环, 它是在一个周期  $(t_0, t_0 + \tau)$  内的塑性应变率, 而在此周期内的塑性应变增量

$$\Delta \dot{\epsilon}_{ij}^{*P} = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \dot{\epsilon}_{ij}^{*P} dt = \frac{1}{2} (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) \quad (3.1)$$

其中  $u_i^* = 0$  ( $S_u$ 上)

运动安定定理可叙述为: 如果在  $(t_0, t_0 + \tau)$  内存在某个载荷—温度路径  $a_s(t) \in G$  和塑性应变率循环  $\dot{\epsilon}_{ij}^{*P}$ , 使得

(a) 式(3.1)成立,

$$(b) \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \left\{ \sum_{s=1}^n a_s(t) \left[ \int_V F_i^s \dot{u}_i^* dV + \int_{S_p} \hat{p}_i^s \dot{u}_i^* dS \right] + \int_V \alpha_{ij} T \dot{\rho}_{ij}^* dV \right\} dt > \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}^{*P}, T) dV dt \quad (3.2)$$

则结构将不可能安定.

其中:  $G$ 为 $n$ 维空间内所给定的载荷—温度系数 $a_s$ 的变化区域,  $\rho_{ij}^{*P}$ 表示与塑性应变场 $\varepsilon_{ij}^{*P}$ 相关联的残余应力场。

此定理的证明可参考文献[4]或其它有关文献, 在此从略。值得指出的是, 不等式(3.2)的左端已明显的含有表明存在热作用的附加项。

下面将式(3.2)进一步化简, 为此先将(2.11)式写成

$$\sigma_{ij}^E = \sigma_{ij}^{EE} + \rho_{ij}^T = \sum_{s=1}^n a_s(t) [\sigma_{ij}^{EEs}(\mathbf{x}) + \rho_{ij}^{Ts}(\mathbf{x})] \quad (3.3)$$

此处 $\sigma_{ij}^{EE}$ 是弹性的(注意是非热弹性的)应力, 它是由外载 $\hat{p}_i$ ,  $F_i$ 通过式(2.16)与(2.17)所唯一的确定, 而热应力 $\rho_{ij}^T$ (对应于 $\hat{p}_i$ ,  $F_i$ 等于零)由式(2.10b)来计算, 即

$$\rho_{ij}^T = L(\varepsilon_{ij}^T) = L(a_{ij}T)$$

式(3.3)中的 $\sigma_{ij}^{EEs}$ 是由于外载 $\hat{p}_i$ ,  $F_i$ 所引起的, 在 $a_s=1$ ,  $a_j=0(j \neq s)$ 时所确定的弹性应力场 $\sigma_{ij}^{EEs}$ , 而 $\rho_{ij}^{Ts}(\mathbf{x})$ 是由温度 $T$ 引起的在 $a_s=1$ ,  $a_j=0(j \neq s)$ 时所确定的残余应力场 $\rho_{ij}^{Ts}$ 。

借助于虚功率原理, 式(3.2)左端第三项可变为如下形式

$$\int_V a_{ij}T \hat{\rho}_{ij}^* dV = \int_V \varepsilon_{ij}^T \hat{\rho}_{ij}^* dV = - \int_V \rho_{ij}^T A_{ijkl} \hat{\rho}_{kl}^* dV = \int_V \rho_{ij}^T \dot{\varepsilon}_{ij}^{*P} dV \quad (3.4)$$

而式(3.2)中, 左端前两项也通过虚功率原理, 并注意到式(2.8a)、(3.3)和(3.4), 于是式(3.2)可写为

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_V \sigma_{ij}^E(\mathbf{x}, t) \dot{\varepsilon}_{ij}^{*P}(\mathbf{x}, t) dV dt > \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_V D(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*P}, T) dV dt \quad (3.5)$$

注意到式(2.8b), 并为简单起见, 仅考虑 $h(T)$ 为 $T$ 的线性函数, 即令

$$h(T) = 1 - BT \quad (3.6)$$

此处 $B > 0$ 为材料常数。则

$$D(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*P}, T) = D_0(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*P})h(T) = D_0(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*P}) - BT D_0(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*P})$$

于是, 利用式(3.5), 式(3.2)最后变为

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_V [\sigma_{ij}^E(\mathbf{x}, t) \dot{\varepsilon}_{ij}^{*P}(\mathbf{x}, t) + BT D_0(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*P})] dV dt > \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_V D_0(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*P}) dV dt \quad (3.7)$$

从上述安定定理, 立即可得结构安定的必要条件, 即如结构实现安定, 则对任一个 $a_s \in G$ 和 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{*P}$ , 都有

$$\eta \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_V [\sigma_{ij}^E(\mathbf{x}, t) \dot{\varepsilon}_{ij}^{*P}(\mathbf{x}, t) + BT D_0(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*P})] dV dt \leq \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_V D_0(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*P}) dV dt \quad (3.8)$$

其中 $\eta > 1$ 为安全系数<sup>[6]</sup>。

#### 四、增量破坏准则

根据式(3.1), 显然

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x}, t_0 + \tau) - \varepsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x}, t_0) \quad (4.1)$$

根据增量破坏的过程, 按其概念, 如果存在标量函数 $\lambda(\mathbf{x}, t)$ , 使得

$$\varepsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x}, t) = \lambda(\mathbf{x}, t) \Delta \varepsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x}) \quad (4.2)$$

其中,

$$\dot{\lambda}(\mathbf{x}, t) \geq 0, \lambda(\mathbf{x}, t_0) = 0, \lambda(\mathbf{x}, t_0 + \tau) = 1 \quad (4.3)$$

我们注意到塑性比功率  $D_0(\dot{\epsilon}_{ij}^{*P})$  是塑性应变率  $\dot{\epsilon}_{ij}^{*P}$  的一次齐次函数<sup>[6]</sup>, 并利用式 (4.2) 和式 (4.3), 于是

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} D_0(\dot{\epsilon}_{ij}^{*P}) dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} D_0(\dot{\lambda} \Delta \epsilon_{ij}^{*P}) dt = D_0(\Delta \epsilon_{ij}^{*P}) \quad (4.4)$$

根据式 (2.11)、(2.18) 及 (4.4), 并取  $\eta = 1$ , 式 (3.8) 可写成

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_V \sum_{s=1}^n a_s(t) [\sigma_{ij}^{*s}(\mathbf{x}) \dot{\epsilon}_{ij}^{*P}(\mathbf{x}, t) + BT^s(\mathbf{x}) D_0(\dot{\epsilon}_{ij}^{*P})] dV dt \leq \int_V D_0(\Delta \epsilon_{ij}^{*P}) dV \quad (4.5)$$

考虑到式 (4.2)、(4.3) 与  $D_0(\Delta \epsilon_{ij}^{*P}) = \dot{\lambda} D_0(\Delta \epsilon_{ij}^{*P})$ , 则式 (4.5) 左端积分可写成

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_V \sum_{s=1}^n a_s(t) [\sigma_{ij}^{*s}(\mathbf{x}) \dot{\lambda}(\mathbf{x}, t) \Delta \epsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x}) + BT^s(\mathbf{x}) \dot{\lambda}(\mathbf{x}, t) D_0(\Delta \epsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x}))] dV dt \quad (4.6)$$

另一方面, 对于给定的增量破坏机构  $\Delta \epsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x})$ , 如函数  $\lambda(\mathbf{x}, t)$  按以下方式选取, 即在  $a_s(t)$  的变化区域  $G$  内, 仅仅使当表达式

$$\sum_{s=1}^n a_s(t) [\sigma_{ij}^{*s}(\mathbf{x}) \Delta \epsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x}) + BT^s(\mathbf{x}) D_0(\Delta \epsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x}))] \quad (4.7)$$

获取可能的极大值的那些时刻, 方有  $\dot{\lambda}(\mathbf{x}, t) \neq 0$ , 则式 (4.5) 的左端, 就可取得其最大值, 于是, 令

$$f(\mathbf{x}) = \max_{a_s \in G} \left\{ \sum_{s=1}^n a_s(t) [\sigma_{ij}^{*s}(\mathbf{x}) \Delta \epsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x}) + BT^s(\mathbf{x}) D_0(\Delta \epsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x}))] \right\} \quad (4.8)$$

与  $D_0(\Delta \epsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x}))$  相等, 就得到了增量破坏准则, 从而增量破坏准则最终可表示为如下形式

$$\int_V f(\mathbf{x}) dV = \int_V D_0(\Delta \epsilon_{ij}^{*P}) dV \quad (4.9)$$

现把给定的载荷—温度系数  $a_s$  的变化区域  $G$  定义为一组不等式

$$a_s^- \leq a_s \leq a_s^+ \quad (4.10)$$

那么, 式 (4.9) 可被写为如下形式

$$\int_V \sum_{s=1}^n \beta_s(\mathbf{x}) y_s(\mathbf{x}) dV = \int_V D_0(\Delta \epsilon_{ij}^{*P}) dV \quad (4.11)$$

式中  $\beta_s(\mathbf{x})$  与  $y_s(\mathbf{x})$  分别由下式给出, 即

$$\left. \begin{aligned} \beta_s(\mathbf{x}) &= \begin{cases} a_s^+, & \text{当 } y_s(\mathbf{x}) > 0 \\ a_s^-, & \text{当 } y_s(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \\ y_s(\mathbf{x}) &= \sigma_{ij}^{*s}(\mathbf{x}) \Delta \epsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x}) + BT^s(\mathbf{x}) D_0(\Delta \epsilon_{ij}^{*P}(\mathbf{x})) \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

## 五、实 例

一厚壁圆筒, 其内外半径分别为  $a, b$ , 承受内压为  $p$ , 内温度化为  $\theta$ , 考虑其增量破坏的情况。设筒身很长, 两端用刚板封闭, 其轴向应力由下式给出

$$\sigma_z = pa^2/(b^2 - a^2) \quad (5.1)$$

两边界条件写为

$$\sigma_r^p \Big|_{r=a} = -p, \quad \sigma_r^p \Big|_{r=b} = 0, \quad \sigma_r^T \Big|_{r=a} = 0, \quad \sigma_r^T \Big|_{r=b} = 0 \quad (5.2)$$

如果温度变化是缓慢的, 那么, 瞬时温度场可由下式给出

$$T(r) = \theta \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)} \quad (5.3)$$

而热弹性应力<sup>[7]</sup>为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^E(r) &= \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{Ea^2\theta\alpha}{2(1-\nu)(b^2 - a^2)} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} + \frac{(b^2 - a^2)\ln(r/b)}{a^2\ln(a/b)}\right] \\ \sigma_\varphi^E(r) &= \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{Ea^2\theta\alpha}{2(1-\nu)(b^2 - a^2)} \left[1 + \frac{b^2}{r^2} + \frac{(b^2 - a^2)(1 + \ln(r/b))}{a^2\ln(a/b)}\right] \\ \sigma_z^E(r) &= \frac{pa^2}{b^2 - a^2} - \frac{Ea^2\theta\alpha}{(1-\nu)(b^2 - a^2)} \left[1 + \frac{(b^2 - a^2)(1/2 + \ln(r/b))}{a^2\ln(a/b)}\right] \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

其中 $\nu$ 和 $\alpha$ 分别为泊松比和热胀系数。

设材料服从 Tresca 屈服条件, 且屈服应力随温度线性减少, 即

$$\max\{|\sigma_r|, |\sigma_\varphi|, |\sigma_\varphi - \sigma_r|\} = 2K(T), \quad (K = \sigma_s/2) \quad (5.5)$$

$$K(T) = K_0(1 - BT) \quad (5.6)$$

其中 $K_0$ 和 $B$ 为材料常数。

现令 $p$ 和 $\theta$ 在以下范围内独立地变化

$$0 \leq p \leq \bar{p}, \quad 0 \leq \theta \leq \bar{\theta} \quad (5.7)$$

为简单起见, 我们设(a) $\nu = 1/2$ , (b)小变形, (c) $\varepsilon_z = 0$ 。于是, 可得轴对称状态下的径向速度 $\dot{u}(r) = \dot{c}/r$ 。从而在考虑增量破坏情况下, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varepsilon_r &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} \dot{\varepsilon}_r dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} dt = -\frac{\Delta c}{r^2} \\ \Delta\varepsilon_\varphi &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} \dot{\varepsilon}_\varphi dt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{\dot{u}}{r} dt = \frac{\Delta c}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

其中 $\Delta c > 0$ 。而相应于上述塑性变形状态的 $D_0(\Delta\varepsilon_{ij}^p)$ 为

$$D_0 = \sigma_r \left(-\frac{\Delta c}{r^2}\right) + \sigma_\varphi \left(\frac{\Delta c}{r^2}\right) = \frac{\Delta c}{r^2} (\sigma_\varphi - \sigma_r) = 2K_0 \frac{\Delta c}{r^2} \quad (5.9)$$

上式是在考虑到变形状态(5.8)式与屈服六边形的一边 $\sigma_\varphi - \sigma_r = 2K_0$ 相关联情况下而获得的。

为计算增量破坏准则(4.11)的左端, 我们须计算函数 $y_r(r)$ 与 $y_\theta(r)$ , 经简单计算并稍加整理得:

$$\left. \begin{aligned} y_r(r) &= \frac{\Delta c}{r^4} \cdot \frac{2a^2b^2}{b^2 - a^2} \\ y_\theta(r) &= \frac{\Delta c}{r^2} \left\{ \frac{Ea^2\alpha}{2(1-\nu)(b^2 - a^2)} \left[ \frac{b^2 - a^2}{a^2\ln(b/a)} - \frac{2b^2}{r^2} \right] + 2BK_0 \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

不难看出

$$y_r(r) > 0, \quad \text{当 } a \leq r \leq b; \quad y_\theta(r) < 0, \quad \text{当 } a \leq r < r_0; \quad y_\theta(r) > 0, \quad \text{当 } r_0 < r \leq b \quad (5.11)$$

此处, 半径 $r_0$ 满足以下方程

$$-\frac{2b^2}{r_0^2} + \frac{b^2 - a^2}{a^2 \ln(b/a)} + \frac{4BK_0(1-\nu)(b^2 - a^2) \ln(b/r_0)}{Ea^2 \ln(b/a)} = 0 \quad (5.12)$$

根据式(4.12),

$$\beta_r(r) = \bar{p}, \quad \beta_\theta(r) = \begin{cases} 0, & \text{当 } a \leq r < r_0 \\ \bar{\theta}, & \text{当 } r_0 < r \leq b \end{cases}$$

于是增量破坏条件(4.11)在目前情况下的具体形式为

$$\bar{p} \int_a^b y_r(r) \cdot r dr + \bar{\theta} \int_{r_0}^b y_\theta(r) \cdot r dr = \int_a^b D_0(r) r dr \quad (5.13)$$

将式(5.9)、(5.10)代入, 经简单计算和整理可得

$$\bar{p} + \bar{\theta} \left\{ \frac{Ea^2}{2(1-\nu)(b^2 - a^2)} \left[ \frac{b^2 - a^2}{a^2 \ln(b/a)} \ln(b/r_0) - \frac{b^2}{r_0^2} + 1 \right] + \frac{BK_0(\ln(b/r_0))^2}{\ln(b/a)} \right\} = 2K_0 \ln \frac{b}{a} \quad (5.14)$$

引入无量纲参数

$$\xi = \frac{b}{a}, \quad \gamma = \frac{r_0}{a}, \quad \varepsilon = \frac{4BK_0(1-\nu)}{Ea} \quad (5.15)$$

后, 式(5.14)可写成

$$\bar{p} + \bar{\theta} \frac{Ea}{2(1-\nu)} \left[ \frac{\ln(\xi/\gamma)}{\ln \xi} + \frac{1}{\xi^2 - 1} - \frac{\xi^2}{\gamma^2(\xi^2 - 1)} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{(\ln(\xi/\gamma))^2}{\ln \xi} \right] = 2K_0 \ln \xi \quad (5.16)$$

而有关半径 $r_0$ 的方程(5.12)此时变为

$$-2\xi^2/\gamma^2 + (\xi^2 - 1)/\ln \xi + \varepsilon(\xi^2 - 1) \ln(\xi/\gamma)/\ln \xi = 0 \quad (5.17)$$

通常, 参数 $\varepsilon$ 是一个小量, 方程(5.4)的一个近似解为

$$\gamma_0 = \left( \frac{\xi^2 \ln \xi^2}{\xi^2 - 1} \right)^{1/2}, \quad \nu = \gamma_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \ln \frac{\xi}{\gamma_0} \right) \quad (5.18)$$

这个解在 $b/a < 3$ 的情况下是足够精确的.

对于低碳钢, 如材料常数取以下数值

$$2K_0 = 24525 \times 10^4 \text{ Pa}, \quad E = 20.6 \times 10^{10} \text{ Pa}, \quad \nu = 0.3, \quad \alpha = 2 \times 10^{-5} \text{ deg}^{-1}, \quad B = 2 \times 10^{-3} \text{ deg}^{-1},$$

当取 $b/a = 2$ 时, 式(5.16)给出的增量破坏准则为

$$\bar{p} + 5.492 \times 10^5 \bar{\theta} = 1.7 \times 10^8 \quad (5.19)$$

此处,  $\bar{p}$ 用Pa来度量,  $\bar{\theta}$ 用摄氏度数[ $^{\circ}\text{C}$ ]来度量.

如我们对 $B = 0$ , 即略去温度对屈服应力的影响, 重新计算, 此时我们获得

$$\bar{p} + 4.969 \times 10^5 \bar{\theta} = 1.7 \times 10^8 \quad (5.20)$$

两种情况分别通过实线和虚线画在图1上.

对高强度钢, 屈服应力的温度效应对增量破坏准则的影响将更为明显. 如取 $b/a = 1.5$ ,

$$2K_0 = 58.86 \times 10^7 \text{ Pa}, \quad E = 20.6 \times 10^{10} \text{ Pa}, \quad \alpha =$$

$$2 \times 10^{-5} \text{ deg}^{-1}, \quad B = 4 \times 10^{-3} \text{ deg}^{-1}, \quad \nu = 0.3.$$

相应的增量破坏准则(5.16)分别为

$$\bar{p} + 4.894 \times 10^5 \bar{\theta} = 2.39 \times 10^8 \quad (5.21)$$

$$\bar{p} + 2.956 \times 10^5 \bar{\theta} = 2.39 \times 10^8 \quad (5.22)$$

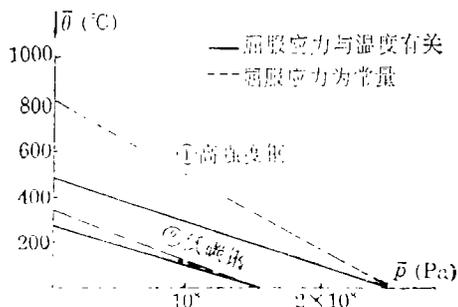


图1 厚壁圆筒的增量破坏极限

后者对应 $B=0$ 的情况。这两个 $p-\bar{c}$ 关系也被画在图1上。

**致谢** 本文曾得到清华大学徐秉业教授与宋军博士的热情帮助,在此向他们表示衷心的感谢!

### 参 考 文 献

- [ 1 ] 王仁等,《塑性力学基础》,科学出版社(1980).
- [ 2 ] 杜森田,徐秉业,考虑外载和温度的运动安定定理,固体力学学报,11(2)(1990).
- [ 3 ] J. A. Konig, On upper bounds to shakedown loads, *ZAMM*, 59 (1979), 349—354.
- [ 4 ] M. Kleiber and J. A. Konig, On a new method of shakedown analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33 (1982), 487—556.
- [ 5 ] W. T. Coiter, *Progress in Solid Mechanics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1 (1960), 202—213.
- [ 6 ] 熊祝华、洪善桃,《塑性力学》,上海科技出版社(1984), 149—152.
- [ 7 ] 徐芝纶,《弹性力学》,人民教育出版社(1982).
- [ 8 ] 杜森田、徐秉业、潘立功,用摄动法分析准静态载荷下弹塑性结构的安定问题,力学学报,23(6)(1991).

## Shakedown Analysis of Elasto-Plastic Structures Subjected to External Loading and Temperature Variation

Du Sentian

(*Jilin University of Technology, Changchun 130025, P. R. China*)

Liu Hanbing

(*Department of Engineering Mechanics, Hehai University, Nanjing, P. R. China*)

Chen Suhuan Lian Jianshe

(*Jilin University of Technology, Changchun 130025, P. R. China*)

### Abstract

A new kinematical shakedown theorem is presented under the consideration that external load and temperature change slowly. An incremental collapse criterion, which is simple and applicable, is also derived based on the theorem. In the end of this paper, its application is illustrated by an example.

**Key words** plastic deformation, incremental collapse, kinematical shakedown theorem