

# 纯弯曲矩形截面梁 I 型单边裂纹端部的 应力应变场及裂纹失稳扩展 临界应力的计算\*

刘 汉 池

(陕西燎原航空机械制造公司 723313)

(钱伟长推荐, 1994年12月22日收到)

## 摘 要

本文应用文[1]的分析方法, 研究了纯弯曲矩形截面梁 I 型单边裂纹端部的应力应变场, 给出了裂纹尖端的应力应变分量和计算裂纹端部弹性变形区和变形强化区宽度的公式以及计算裂纹失稳扩展临界应力的方程组。最后用计算实例对裂纹失稳扩展临界应力方程组进行了验证, 最大误差不超过0.18%。

**关键词** 裂纹扩展临界应力 裂纹端部塑弹比 转换比

## 一、序 言

文[1]对单向拉伸弹塑性 I 型裂纹的研究, 不仅指出了以往断裂力学研究中存在的问题, 分析了裂纹失稳扩展的原因和机理, 而且首先给出了计算裂纹失稳扩展临界应力可用的方程组。用临界应力预测裂纹的失稳扩展, 是直接而又可靠的有效方法。就像传统的强度计算那样, 只要使最大的工作应力  $\sigma_{max}$  小于裂纹失稳扩展的临界应力  $\sigma_c$ , 裂纹体就是安全的。即

$$\sigma_{max} < \sigma_c \quad (1.1)$$

若引进安全系数  $n_k$  和许用应力, 则为

$$\sigma_{max} \leq \sigma_c / n_k = [\sigma_c] \quad (1.2)$$

因此, 准确计算各种变形弹塑性体裂纹失稳扩展的临界应力, 则是解决弹塑性体裂纹失稳扩展的重要途径。众所周知, 单向拉伸变形是四种基本变形中最为简单的一种, 要解决弹塑性体 I 型裂纹的失稳扩展问题, 还须对各种变形的弹塑性体 I 型裂纹进行研究, 进而解决弹塑性体 I 型裂纹的失稳扩展问题。正如文[2]所指出, I 型单边裂纹是引起弹塑性体脆断最危险的裂纹之一, 也是引起广泛注意的问题。为此, 本文应用文[1]的分析方法, 对纯弯曲矩形截面梁 I 型单边裂纹进行研究, 并给出裂纹尖端的应力应变分量, 计算裂纹端部弹性变形区和变形强化区宽度的公式以及计算裂纹失稳扩展临界应力的方程组。最后应用计算实

\* 1994年5月7日第一次收到。

例对给出的计算裂纹失稳扩展临界应力的方程组进行验证。

## 二、裂纹端部的应力应变分析

纯弯矩形截面梁 I 型单边裂纹如图 1 所示。矩形截面梁在弯矩作用下，离中性轴最远的侧面弯曲应力最大。当裂纹处于承受拉应力的一侧时，由于裂纹面处横截面积突然变化，因变形不均匀造成应力集中，在裂纹端部形成高应力区，裂纹尖端的应力最大。

根据静力学平衡原理，裂纹端部的高应力区不可能凭空产生，它只能由外加弯矩引起。也即，只能由裂纹区承受的外加弯曲应力的合力向裂纹端部高应力区合力作用点简化所得的力和力矩以及该处的外加弯曲应力三者共同引起。

根据文[1]的分析，在裂纹端部未产生塑性变形时，裂纹端部高应力区均为弹性应力。此时，裂纹端部的应力分布为一条曲线。若沿裂纹面将梁切开，切断面上沿裂纹线的垂线在外加应力的方向应力分布如图 2 所示。

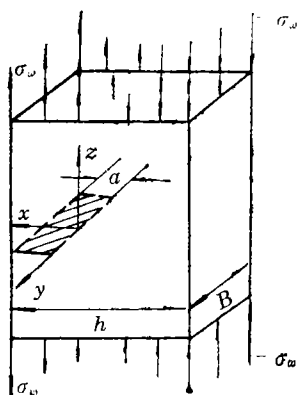


图1 纯弯矩形梁的单边裂纹

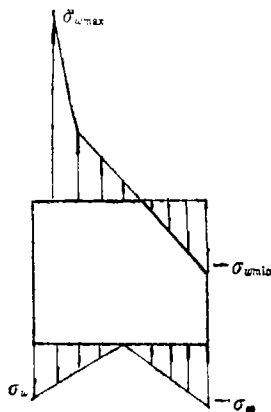


图2 裂纹端部弹性应力分布

当外加弯矩达到使裂纹失稳扩展时，根据文[1]的分析，裂纹端部产生塑性变形的区域变形强化，并引起变形强化应力。因而，裂纹端部高应力区分为弹性变形区和变形强化区。此时，裂纹端部高应力区的应力分布为两条曲线。切断面上的应力分布如图 3 所示。裂纹尖端的应力最大，其值为材料的真实强度极限  $s_k$ 。

在图 3， $b$  为裂纹端部高应力区宽度； $b_1$  为裂纹端部弹性变形区宽度； $b_2$  为裂纹端部变形强化区宽度； $a$  为裂纹深度； $s_k$  为材料的真实强度极限， $\sigma_s$  为材料的屈服极限； $\sigma_{w0}$  为外加弯矩产生的最大弯曲应力； $\sigma_{w0}$  为外加弯矩在裂纹尖端产生的弯曲应力； $\sigma'_w$  为附加弯矩产生的最大弯曲应力； $\sigma'_l$  为裂纹端部高应力区的最小应力； $c$  为裂纹端部高应力区的合力作用点； $c_1$  为裂纹区承受外加弯曲应力的合力作用点。

现在分析裂纹尖端的应力和应变。裂纹尖端的应力应变分量可用广义虎克定律求得。从图 1 可以看出，由于梁有一定的宽度，所以沿梁宽度方向的变形并不是自由的。严格讲来，裂纹线均处于三向应力状态。当裂纹失稳扩展时， $\sigma_x = s_k$ ， $\varepsilon_x = 0$ ，其应力应变分量分别为

$$\sigma_x = \mu(\sigma_y + s_k), \quad \sigma_y = \sigma_x / \mu - s_k, \quad \sigma_z = s_k \quad (2.1)$$

及

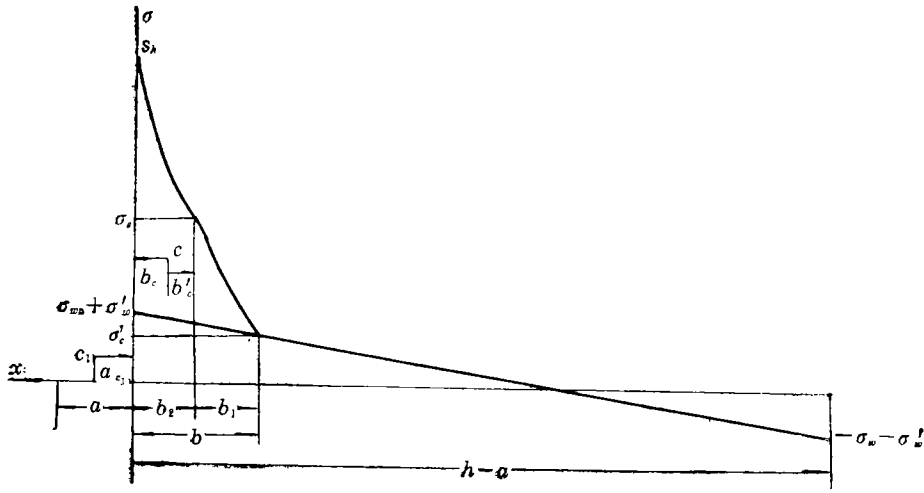


图3 裂纹扩展时裂纹端部的应力分布

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= 0 \\ \varepsilon_y &= [\sigma_y - \mu(\sigma_x + s_k)]/E \\ \varepsilon_z &= [s_k - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]/E \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

应指出，以上给出的裂纹尖端的应力应变分量，都是变形强化之后的弹性应力和应变。

### 三、裂纹失稳扩展临界应力方程组

在数值上，设裂纹端部高应力区弹性应力分布为弹性变形区宽度  $b_1$  的指数函数  $b_1^n$ ，变形强化应力分布为变形强化区宽度  $b_2$  的指数函数  $b_2^n$ 。这里  $b_1$ 、 $b_2$  和  $n$  都是未知数。实际上，两个指数函数的指数不一定相等。虽然用近似计算可以分开，但对临界应力  $\sigma_{wc}$  的计算影响不大<sup>[1]</sup>，这从计算实例也可以看出。为便于计算，可近似认为两个指数函数的指数一样，即为  $n$ 。

从图3有

$$\begin{aligned} \sigma_s - \sigma'_s &= b_1^n \\ b_1 &= \exp\left[\frac{1}{n} \ln(\sigma_s - \sigma'_s)\right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} s_k - \sigma_s &= b_2^n \\ b_2 &= \exp\left[\frac{1}{n} \ln(s_k - \sigma_s)\right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

现在求裂纹区承受外加弯曲应力的合力及其向裂纹端部高应力区合力作用点简化的附加弯矩。裂纹区单位裂纹长度上承受的外加弯曲应力的合力为

$$N = \int_{h/2-a}^{h/2} \frac{2\sigma_{wc}}{h} x dx = \frac{a(h-a)}{h} \sigma_{wc} \quad (3.3)$$

为求附加弯矩，必须确定这合力作用的距离。为此，须首先求裂纹区合力作用点  $c_1$  和裂纹端部高应力区合力作用点  $c$  的位置。从图3可知， $a_{c_1}$  由下式决定

$$a_{c1} = \frac{\int_0^a \frac{2\sigma_{w0}}{h} \left[ \frac{h}{2} - (a-x) \right] x dx}{\int_{h/2-a}^{h/2} \frac{2\sigma_{w0}}{h} x dx} = \frac{a(3h-2a)}{6(h-a)} \quad (3.4)$$

同样, 由图3可知,  $b'_c$  由下式决定

$$b'_c = \frac{\int_0^{b_2} x^n x dx - \int_0^{b_1} (b_1-x)^n x dx + (\sigma_s - \sigma'_c) \frac{b_2^2}{2}}{\int_0^{b_1} x^n dx + \int_0^{b_2} x^n dx + (\sigma_s - \sigma'_c) b_2} \quad (3.5)$$

为简化计算, 可近似认为  $b_1 = b_2$ , 于是积分式(3.5), 得

$$b'_c = \frac{n^2 + 5n + 2}{2(n+2)(n+3)} b_2 \quad (3.6)$$

从图3可知

$$b_0 = b_2 - b'_c = \left[ 1 - \frac{n^2 + 5n + 2}{2(n+2)(n+3)} \right] b_2 = \frac{n^2 + 5n + 10}{2(n+2)(n+3)} b_2 \quad (3.7)$$

附加弯矩  $M'$  为

$$M' = (a_{c1} + b_0) \cdot NB = Ba(h-a)\sigma_{w0}/h \cdot \left[ \frac{a(3h-2a)}{6(h-a)} + \frac{n^2 + 5n + 10}{2(n+2)(n+3)} b_2 \right] \quad (3.8)$$

附加弯矩引起的最大弯曲应力  $\sigma'_w$  为

$$\sigma'_w = \frac{6}{B(h-a)^2} M' = \frac{6a\sigma_{w0}}{h(h-a)} \cdot \left[ \frac{a(3h-2a)}{6(h-a)} + \frac{n^2 + 5n + 10}{2(n+2)(n+3)} b_2 \right] \quad (3.9)$$

附加弯矩在裂纹端部高应力区最小应力点引起的弯曲应力  $\sigma'_{wb}$  为

$$\sigma'_{wb} = \frac{6a(h-a-2b_1-2b_2)}{h(h-a)^2} M' = \frac{6a(h-a-2b_1-2b_2)\sigma_{w0}}{h(h-a)^2} \cdot \left[ \frac{a(3h-2a)}{6(h-a)} + \frac{n^2 + 5n + 10}{2(n+2)(n+3)} b_2 \right] \quad (3.10)$$

裂纹端部高应力区的最小应力  $\sigma'_c$  为

$$\begin{aligned} \sigma'_c &= \sigma_{wb} + \sigma'_{wb} \\ &= \frac{\sigma_{w0}}{h} \left\{ h - 2a - 2b_1 - 2b_2 + \frac{a(h-a-2b_1-2b_2)}{(h-a)^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[ \frac{a(3h-2a)}{6(h-a)} + \frac{n^2 + 5n + 10}{2(n+2)(n+3)} b_2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

将  $b_1, b_2$  的关系代入式(3.11), 得

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma_{w0}}{h(h-a)^2} \left\{ (h-a)^2 \left[ h - 2a - 2 \exp \left[ \frac{1}{n} \ln(\sigma_s - \sigma'_c) \right] - 2 \exp \left[ \frac{1}{n} \ln(s_k - \sigma_s) \right] \right] \right. \\ &\quad \left. + 6a \left[ h - a - 2 \exp \left[ \frac{1}{n} \ln(\sigma_s - \sigma'_c) \right] - 2 \exp \left[ \frac{1}{n} \ln(s_k - \sigma_s) \right] \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[ \frac{a(3h-2a)}{6(h-a)} + \frac{n^2 + 5n + 10}{2(n+2)(n+3)} \exp \left[ \frac{1}{n} \ln(s_k - \sigma_s) \right] \right] \right\} \\ &= \sigma'_c \end{aligned} \quad (3.12)$$

从图3的静力平衡条件, 得

$$\int_0^{b_1} x^n dx + \int_0^{b_2} x^n dx + (\sigma_s - \sigma'_c) b_2 - (\sigma'_w - \sigma'_{wb}) \frac{b_1 + b_2}{2} - (\sigma_{wa} - \sigma_{wb}) \frac{b_1 + b_2}{2} - N = 0 \tag{3.13}$$

积分式(3.13)并将 $b_1, b_2$ 的关系代入, 便得平衡方程. 即

$$\frac{\exp[(n+1)/n \ln(\sigma_s - \sigma'_c)]}{n+1} + \frac{\exp[(n+1)/n \ln(s_k - \sigma_s)]}{n+1} + (\sigma_s - \sigma'_c) \exp\left[\frac{1}{n} \ln(s_k - \sigma_s)\right] - \frac{\sigma_{wo}}{h} \left[ \exp\left[\frac{1}{n} \ln(\sigma_s - \sigma'_c)\right] + \exp\left[\frac{1}{n} \ln(s_k - \sigma_s)\right] \right]^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{6a}{(h-a)^2} \left[ \frac{a(3h-2a)}{6(h-a)} + \frac{n^2+5n+10}{2(n+2)(n+3)} \exp\left[\frac{1}{n} \ln(s_k - \sigma_s)\right] \right] \right\} - \frac{a(h-a)}{h} \sigma_{wc} = 0 \tag{3.14}$$

以上得到两个方程, 即式(3.12)和式(3.14), 但三个未知数 $\sigma_{wo}, \sigma'_c$ 和 $n$ . 因此, 还须建立一个方程. 现在利用裂纹端部的变形条件, 建立补充方程. 裂纹端部高应力区的弹性变形区和变形强化区并不是固定不变的. 它们随裂纹的大小而变化. 所以, 弹性变形区和变形强化区的宽度也是随裂纹大小而变化的. 但是, 不管裂纹大小, 在其失稳扩展时, 弹性变形区和变形强化区的宽度之间应有一定的关系. 由此, 便可建立补充方程. 令

$$R = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\exp[(1/n) \ln(s_k - \sigma_s)]}{\exp[(1/n) \ln(\sigma_s - \sigma'_c)]} \tag{3.15}$$

式中,  $R$ 称为裂纹端部的塑弹比.

用实验确定 $R-a$ 曲线后, 指定 $a$ 的 $R$ 值就可由 $R-a$ 曲线确定. 这样, 即可用式(3.12)、式(3.14)和式(3.15)求解指定 $a$ 的临界应力 $\sigma_{wo}$ . 但为了得到便于应用的方程, 须对式(3.15)进行变换. 现在用转轴公式变换式(3.15)的坐标轴, 就得到两个彼此独立的便于应用的数值方程. 若两个新方程的有关系数仍由式(3.12)和式(3.14)根据实测临界应力 $\sigma_{wc}$ 值求得的 $\sigma_c$ 和 $n$ 确定, 则两个新方程与式(3.12)和式(3.14)有共同解. 用新坐标表示旧坐标的公式为

$$n = n' \cos \alpha - \sigma'_c \sin \alpha, \quad \sigma'_c = n' \sin \alpha + \sigma'_c \cos \alpha \tag{3.16}$$

若顺时针转 $\pi/2$ , 则有

$$n = \sigma'_c, \quad \sigma'_c = -n' \tag{3.17}$$

若逆时针转 $\pi/2$ , 则有

$$n = -\sigma'_c, \quad \sigma'_c = n' \tag{3.18}$$

将式(3.17)和式(3.18)的关系分别代入式(3.16), 并考虑到应用方便, 写为

$$n = (s_k - \sigma_s) Q_1 \sigma'_c - \sigma_s \tag{3.19}$$

和

$$n = \sigma_s - (s_k - \sigma_s) Q_2 \sigma'_c \tag{3.20}$$

式中,  $Q_1$ 和 $Q_2$ 称为转换比.

为避免试算, 式(3.19)和式(3.20)不须合并. 可以看出, 式(3.19)和式(3.20)具有普遍意义.

以上, 式(3.12)、式(3.14)、式(3.19)和式(3.20)都是求解裂纹失稳扩展临界应力  $\sigma_{wc}$  的方程。  $Q_1$ 和 $Q_2$ 分别由 $Q_1-a$ 和 $Q_2-a$ 曲线确定, 而 $Q_1-a$ 和 $Q_2-a$ 曲线须由实验测定。

在实际计算时, 可应用式(3.14)、式(3.19)和式(3.12)或式(3.14)、式(3.20)和式(3.12)或式(3.19)、式(3.20)和式(3.12)三组方程中任何一组。但是, 式(3.19)、式(3.20)和式(3.12)这一组最为简单。因此, 用式(3.19)、式(3.20)和式(3.12)这一组求解临界应力  $\sigma_{wc}$ 最方便。

#### 四、计算实例

本文选用高强度钢40CrMnSiMoVA为实例进行计算。计算时, 首先根据实测数据  $K_{1c}$ 算出不同 $a$ 值的 $\sigma_{wc}$ , 然后再利用求得的 $\sigma_{wc}$ 确定 $Q_1-a$ 和 $Q_2-a$ 曲线。待 $Q_1-a$ 和 $Q_2-a$ 曲线确定之后, 便可利用以上三组方程求解裂纹失稳扩展的临界应力。

根据手册<sup>[5]</sup>提供的数据, 可以认为高强度钢40CrMnSiMoVA的 $s_k$ ,  $\sigma_s$ 和 $K_{1c}$ 分别为

$$s_k \quad 2393 \text{ MPa}, \quad \sigma_s \quad 1501 \text{ MPa}, \quad K_{1c} \quad 72.6 \text{ MN/m}^{3/2}$$

若矩形截面梁的宽度满足以下条件<sup>[3]</sup>

$$B \geq 2.5(K_{1c}/\sigma_s)^2$$

这样, 便可以认为 $K_1 = K_{1c}$ 。对纯弯曲矩形截面梁 I 型单边裂纹, 裂纹失稳扩展的临界应力  $\sigma_{wc}$ 可用下式计算<sup>[4]</sup>

$$K_1 = \sigma_{wc} \sqrt{a} [1.99 - 2.47(a/h) + 12.97(a/h)^2 - 23.17(a/h)^3 + 24.80(a/h)^4] \quad (4.1)$$

式中,  $\sigma_{wc} = 6M/Bh^2$

本文取梁的高度 $h = 100 \text{ mm}$ 。

应该指出, 有实际意义的是中小裂纹, 特别是小裂纹。考虑到式(4.1)对小裂纹的准确度, 本文没有计算更小的裂纹。只计算了 $a/h$ 值从0.02到0.15范围内的裂纹。不同 $a$ 值相应的 $\sigma_{wc}$ 值给在表1。

表1  $a/h$ 相应的 $a$ ,  $K_1/\sigma_{wc}\sqrt{a}$ 和 $\sigma_{wc}$

$a/h$	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15
$a \text{ mm}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$K_1/\sigma_{wc}\sqrt{a}$	1.9456	1.9270	1.9105	1.8962	1.8836	1.8733	1.8643	1.8575	1.8520	1.8480	1.8455	1.8443	1.8441	1.8457
$\sigma_{wc}/10 \text{ MPa}$	83.44	68.79	60.08	54.15	49.75	46.32	43.53	41.20	39.20	37.46	35.91	34.52	33.27	32.12

现在确定 $Q_1-a$ 和 $Q_2-a$ 曲线。将 $a$ 及相应的 $\sigma_{wc}$ 值代入式(3.12)和式(3.14), 便求得相应的 $\sigma_1^*$ 和 $n$ 。再将不同 $a$ 值相应的 $\sigma_1^*$ 和 $n$ 代入式(3.19)和式(3.20), 即可求出不同 $a$ 值相应的 $Q_1$ 和 $Q_2$ 。由这些不同 $a$ 值的 $Q_1$ 和 $Q_2$ , 便可确定 $Q_1-a$ 和 $Q_2-a$ 曲线。

在求 $Q_1$ 和 $Q_2$ 时, 为减小计算误差, 先估计 $\sigma_1^*$ 的大小, 再围绕 $\sigma_1^*$ 设 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ , 并使 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 尽量靠近。求得 $\sigma_1^*$ 和 $n$ 之后, 最好代回式(3.12)和式(3.14)验算, 若不满足方程应重新计算。

在计算 $Q_1$ ,  $Q_2$ 及 $\sigma_{wc}$ 的过程中, 求解 $\sigma_1^*$ 和 $n$ , 均可应用解析法和图解法。若用解析法, 可根据 $n_1$ 和 $n_2$ 的不同情况, 选用以下相应的公式进行计算。

对于图4(a)

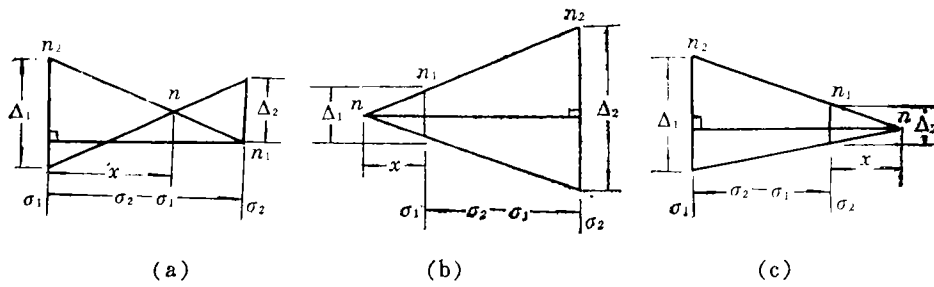


图4 计算 $\sigma'_c$ 和 $n$ 的三种类型

$$\sigma'_c = \sigma_1 + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}, \quad n = n_2 - \frac{|n_2 - n_1| \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \quad (4.2)$$

对于图4(b)

$$\sigma'_c = \sigma_1 - \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}, \quad n = n_1 - \frac{|n_2 - n_1| \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1} \quad (4.3)$$

对于图4(c)

$$\sigma'_c = \sigma_2 + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) \Delta_2}{\Delta_1 - \Delta_2}, \quad n = n_1 - \frac{|n_2 - n_1| \Delta_2}{\Delta_1 - \Delta_2} \quad (4.4)$$

这儿,  $\Delta_1$ 和 $\Delta_2$ 分别为所用两方程相应于 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 求得的 $n$ 之差绝对值。

若用图解法, 根据求得的 $n_1$ 和 $n_2$ 值直接作图, 便可求出 $\sigma'_c$ 和 $n$ 。

求得不同 $a$ 值的 $\sigma_{wc}$ ,  $\sigma'_c$ ,  $n$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b$ ,  $Q_1$ 和 $Q_2$ 给在表 2。测定的 $Q_1$ - $a$ 和 $Q_2$ - $a$ 曲线给在图5。

从表 2 可以看出, 指数 $n$ 是随裂纹深度 $a$ 而变化的。因此, 裂纹端部高应力区的应力分布不是一个固定不变的函数。同时, 裂纹端部高应力区弹性变形区宽度 $b_1$ 和变形强化区宽度 $b_2$ 也是随 $a$ 变化的。

表2  $a$ 相应的 $\sigma_{wc}$ ,  $\sigma'_c$ ,  $n$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b$ ,  $Q_1$ 和 $Q_2$

$a$ mm	2	3	4	6	8	10	12	14	15
$\sigma_{wc}$ 10 MPa	83.44	68.79	60.08	49.75	43.53	39.20	35.91	33.27	32.12
$\sigma'_c$ 10 MPa	74.22	59.93	50.99	40.23	33.74	29.08	25.73	23.02	21.89
$n$	7.4213	7.1665	6.7652	6.0744	5.6198	5.3092	5.0876	4.9340	4.8754
$b_1$ mm	1.7920	1.8742	1.9727	2.1676	2.3313	2.4678	2.5807	2.6696	2.7062
$b_2$ mm	1.8315	1.8713	1.9422	2.0945	2.2236	2.3300	2.4174	2.4848	2.5121
$b$ mm	3.6235	3.7455	3.9149	4.2621	4.5549	4.7978	4.9981	5.1544	5.2183
$Q_1$	1.007691	1.009506	1.011132	1.014020	1.016651	1.019275	1.021754	1.024303	1.025560
$Q_2$	1.006349	1.007898	1.009345	1.011981	1.014396	1.016797	1.019065	1.021380	1.022516

从图5可以看出,  $Q_1$ - $a$ 和 $Q_2$ - $a$ 曲线是十分近似的直线。为测定和应用方便, 可以用折线表示 $Q_1$ - $a$ 和 $Q_2$ - $a$ 曲线。这样,  $Q_1$ - $a$ 和 $Q_2$ - $a$ 曲线的 $Q$ 值便可用下面的近似公式进行计算。即

$$Q = Q_n - (a_n - a) \operatorname{tg} \alpha_n - \sum_{0 < i < n} (a_i - a) (\operatorname{tg} \alpha_i - \operatorname{tg} \alpha_{i+1})$$

$$(a_1 \leq a \leq a_n, \quad 0 \leq a_i - a) \quad (4.5)$$

其中 
$$\operatorname{tg} \alpha_{i+1} = \frac{Q_{i+1} - Q_i}{a_{i+1} - a_i}$$

在用式(4.5)时,  $\alpha$  变化很小的邻项可合并。

对于  $Q_1-a$  曲线为

$$Q_{1j} = [1025590 - 1271(15-a) - 64(8-a) - 100(6-a) - 205(4-a) - 170(3-a)] \times 10^{-6}$$

$$\left( 2 \leq a \leq 15, 0 \leq \begin{cases} 15-a \\ 8-a \\ 6-a \\ 4-a \\ 3-a \end{cases} \right) \quad (4.6)$$

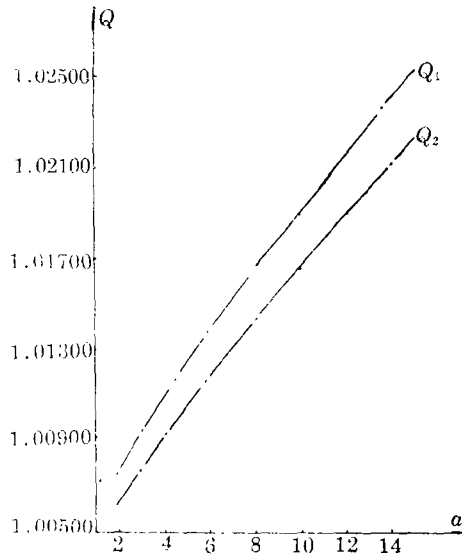


图5  $Q_1-a$ 和 $Q_2-a$ 曲线

对于  $Q_2-a$  曲线为

$$Q_{2j} = [1022550 - 1159(15-a) - 71(8-a) - 80(6-a) - 140(4-a) - 100(3-a)] \times 10^{-6}$$

$$\left( 2 \leq a \leq 15, 0 \leq \begin{cases} 15-a \\ 8-a \\ 6-a \\ 4-a \\ 3-a \end{cases} \right) \quad (4.7)$$

求得的相应于  $a$  的  $\sigma_{wc}$ ,  $\sigma'_c$ ,  $n$ ,  $Q_1$ ,  $Q_{1j}$  和  $\Delta Q$  以及相应于  $a$  的  $\sigma_{wc}$ ,  $\sigma'_c$ ,  $n$ ,  $Q_2$ ,  $Q_{2j}$  和  $\Delta Q$  分别给在表3和表4。从表3和表4可以看出,  $Q_1-a$  和  $Q_2-a$  曲线用折线表示后, 引起的误差很小。因为  $Q_1-a$  和  $Q_2-a$  曲线是近于直线的曲线, 所以这两曲线的测定和应用都很方便。尤其是测定, 不仅测定的临界点少, 而且对试样没有特殊要求。显然, 这些优点是现用法测定断裂韧度无法比拟的<sup>[3]</sup>。

在求解临界应力  $\sigma_{wc}$  时, 虽然有三组方程可供选用, 但为减少计算量, 最好用式(3.19), 式(3.20)和式(3.12)这一组求解。

由式(3.19)、式(3.20)和式(3.12)用  $Q$  的计算值  $Q_{1j}$  和  $Q_{2j}$  求得的临界应力  $\sigma_{wcj}$  给在表5。从表5可以看出, 临界应力的计算值  $\sigma_{wcj}$  和测定值  $\sigma_{wc}$  非常接近, 最大误差不超过 0.18%。计

表3  $a$  相应的  $\sigma_{wc}$ ,  $\sigma'_c$ ,  $n$ ,  $Q_1$ ,  $Q_{1j}$  和  $\Delta Q$

$a$ mm	2	3	4	6	8	10	12	14	15
$\sigma_{c10}$ MPa	83.44	68.79	60.08	49.75	43.53	39.20	35.91	33.27	32.12
$\sigma'_c$ 10 MPa	74.22	59.93	50.99	40.23	33.74	29.08	25.73	23.02	21.89
$n$	7.4213	7.1665	6.7652	6.0744	5.6198	5.3092	5.0876	4.9340	4.8754
$Q_1$	1.007691	1.009506	1.011132	1.014020	1.016651	1.019275	1.021754	1.024303	1.025560
$Q_{1j}$	1.007703	1.009513	1.011153	1.014023	1.016693	1.019235	1.021771	1.024319	1.025590
$\Delta Q$	0.000012	0.000007	0.000021	0.000003	0.000042	0.000040	0.000017	0.000016	0.000030



表4 a 相应的  $\sigma_{wc}$ ,  $\sigma_c'$ ,  $n$ ,  $Q_2$ ,  $Q_{2f}$  和  $\Delta Q$

a mm	2	3	4	6	8	10	12	14	15
$\sigma_{wc}10$ MPa	83.44	68.79	60.08	49.75	43.53	39.20	35.91	33.27	32.12
$\sigma_c'10$ MPa	74.22	59.93	50.99	40.23	33.74	29.08	25.73	23.02	21.89
n	7.4213	7.1665	6.7652	6.0744	5.6198	5.3092	5.0876	4.9340	4.8754
$Q_2$	1.006349	1.007898	1.009345	1.011981	1.014396	1.016797	1.019065	1.021380	1.022516
$Q_{2f}$	1.006357	1.007907	1.009357	1.011977	1.014437	1.016755	1.019073	1.021391	1.022550
$\Delta Q$	0.000008	0.000009	0.000012	0.000004	0.000041	0.000042	0.000008	0.000011	0.000034

表5 临界应力  $\sigma_{wc}$  的计算结果

a mm	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n	7.4286	7.1497	6.7878	6.4008	6.0877	5.8296	5.6077	5.4572	5.3267	5.2124	5.1114	5.0228	4.9409	4.8684
$\sigma_c'10$ MPa	74.12	59.88	50.91	44.94	40.23	36.65	33.65	31.23	29.15	27.32	25.71	24.29	23.01	21.86
$\sigma_{wc}10$ MPa	83.30	68.68	59.97	54.23	49.70	46.33	43.50	41.22	39.25	37.50	35.94	34.54	33.25	32.06
$\sigma_{wc}10$ MPa	83.44	68.79	60.08	54.15	49.75	46.32	43.53	41.20	39.20	37.46	35.91	34.52	33.27	32.12
$\Delta \%$	0.17	0.16	0.18	0.15	0.09	0.02	0.08	0.05	0.14	0.11	0.09	0.07	0.05	0.18

算结果表明, Q 值用近似公式(4.5)计算是可行的, 也是很准确的。

### 五、讨 论

本文为计算裂纹失稳扩展的临界应力  $\sigma_{wc}$ , 共给出了5个独立方程, 即式(3.12)、式(3.14)、式(3.15)、式(3.19)和式(3.20)。在求解  $\sigma_{wc}$  时, 除式(3.12)必用之外, 其它方程可以选用。式(3.14)是由静力平衡条件导出的严格方程。因较复杂, 不便于直接应用。但是, 它是测定  $Q_1-a$  和  $Q_2-a$  曲线的基本方程。式(3.15)虽然并不复杂, 也是严格方程, 但  $R-a$  曲线的曲率较大。因  $R-a$  曲线的测定和应用都不方便, 所以也不宜直接应用。由于它是导出式(3.19)和式(3.20)的中间方程, 所以也是不可缺少的。式(3.19)和式(3.20), 即

$$n = (s_k - \sigma_s) Q_1^{\sigma_c'} - \sigma_s, \quad n = \sigma_s - (s_k - \sigma_s) Q_2^{\sigma_c'}$$

是具有普遍意义的方程。它不仅计算简单准确, 而且不受裂纹大小的限制。不论何种裂纹, 也不管裂纹大小, 只要材料能反映出来并能确定  $Q_1$  和  $Q_2$ , 便可应用。同时, 由于  $Q_1-a$  和  $Q_2-a$  曲线测定方便及由近似公式(4.5)计算 Q 值也准确。因此, 裂纹扩展临界应力  $\sigma_{wc}$  的计算也变得容易了。

准确的裂纹扩展临界应力的计算结果表明, 根据文[1]的分析方法得出的计算裂纹扩展临界应力  $\sigma_{wc}$  的方程组不仅可信, 而且可用。

### 参 考 文 献

[1] Liu Hanchi, Stress-strain field near crack tip and calculation of critical stress of crack propagation in a single tension finite width thin sheet with central mode I piercing crack, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics in China*, 4, IAP (1992), 171-184.

- [ 2 ] Liu Hanchi, Stress-strain field near crack tip and calculation of critical stress of crack propagation in a single tension finite sheet with one-sided mode I crack, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics in China*, 4, IAP (1992), 135—146.
- [ 3 ] 陈箴等, 《工程断裂力学》, 国防工业出版社 (1977).
- [ 4 ] 单辉祖主编, 《材料力学教程》, 国防工业出版社 (1965).
- [ 5 ] 工程材料实用手册编辑委员会, 《工程材料实用手册》, 1, 中国标准出版社 (1988).

## Stress-Strain Field near Crack Tip and Calculation of Critical Stress of Crack Propagation in a Pure Bending Beam of Rectangular Section with One-Sided Mode I Crack

Liu Hanchi

(*Liaoyuan Aviation Machine Building Company, Shannxi 723313, P.R. China*)

### Abstract

This paper studies the stress-strain field near crack tip in a pure bending beam of rectangular section with one-sided mode I crack by the analytic method of Ref. [1], then it gives the stress and strain components at the crack tip when the crack propagates, and further it obtains the formulas of calculating the elastic deformed area width, the deformed intensity area width and the equation groups of calculating the critical stress of crack propagation, last the equation group of calculating critical stress of crack propagation is verified by calculating instance. The maximum error is 0.18%.

**Key words** critical stress of crack propagations, plastic-elastic rate near crack tip, transforming rate