应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类半线性椭圆型方程衰减正整解的存在唯一性*

田 根 宝

（上海铁道学院 上海 200333）

（林宗池推荐，1994年5月13日收到）

摘 要

本文首先证明方程

$$\Delta u-m^2u+f(x,u)=0,\quad x\in R^n,\ n\geqslant 3,\ m>0$$

存在衰减的正整解，然后重点证明这种解的唯一性。

关键词 弱上解 弱下解 单调收敛定理 非增 非减 局部 Hölder 连续 强极值原理 局部 Lipschitz 连续

一、引 言

近年来许多中外学者对半线性椭圆型方程是否存在正的整体解（简称正整解）给予了很大关注，文献[1]～[4]讨论了这一问题。然而，关于这种方程正整解的唯一性的文章则不多见。本文则在文[5]的基础上首先使用另一种方法证明方程

$$\Delta u-m^2u+f(x,u)=0,\ x\in R^n,\ n\geqslant 3,\ m>0 \tag{1.1}$$

存在衰减的正整解。然后构造方程（1.1）的弱上解、弱下解运用广义的上下解方法导出这种解的唯一性。为此，先给出必要的预备知识。

引理1[5] 常微分方程

$$Lz=\frac{d^2z}{dt^2}+(n-1)t^{-1}\frac{dz}{dt}-m^2z=0,\qquad t>0 \tag{1.2}$$

存在两个线性无关解$\zeta(t)$，$\eta(t)$：

$$\zeta(t)=t^{-\nu}I_\nu(mt) \tag{1.3}$$

$$\eta(t)=2m\zeta(t)\int_t^\infty\frac{ds}{s^{n-1}\zeta^2(s)}\ [注1] \tag{1.4}$$

其中$m>0$，$\nu=n/2-1$，I_ν为ν阶修正了的Bessel函数。

$$I_\nu(t)=\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k} \tag{1.5}$$

其中Γ为Gamma函数。

引理2[5] 函数$\zeta(t)\in C^2[0,\infty)$，$\eta(t)\in C^2(0,\infty)$，且

$$\zeta(t)\sim(2\pi m)^{1/2}t^{-(n-1)/2}e^{mt},\qquad t\to\infty \tag{1.6}$$

$$\eta(t)\sim(2\pi m)^{1/2}t^{-(n-1)/2}e^{-mt},\qquad t\to\infty \tag{1.7}$$

$$\lim_{t\to\infty}\phi(t)t^{n-1}\zeta^2(t)=\lim_{t\to\infty}t^{n-1}\zeta(t)\eta(t)=1 \tag{1.8}$$

$$\lim_{t\to\infty}\phi(t)t^{n-1}\zeta(t)=\lim_{t\to\infty}t^{n-1}\eta(t)=0 \tag{1.9}$$

其中

$$\phi(t)=2m\int_t^\infty\frac{ds}{s^{n-1}\zeta^2(s)}\quad\text{[注2]} \tag{1.10}$$

引理3[5] 设$g(t)$是$[0,\ \infty)$上的连续函数，若

$$\int_0^\infty\phi(t)t^{n-1}\zeta(t)g(t)dt<\infty \tag{1.11}$$

并记

$$y(t)=\zeta(t)\left(\alpha+\int_0^\infty\chi_t(s)s^{n-1}\zeta(s)g(s)ds\right),\qquad t\geqslant0 \tag{1.12}$$

其中α为常数，且

$$\chi_t(s)=\begin{cases}\phi(t), & 0\leqslant s\leqslant t\\ \phi(s), & t<s<\infty\end{cases} \tag{1.13}$$

则$y(t)\in C^2[0,\ \infty)$，且满足

$$\begin{cases}d^2y/dt^2+(n-1)t^{-1}dy/dt-m^2y+g(t)=0, & t>0\\ y(0)=c,\ \ y'(0)=0\end{cases}$$

其中c为某一常数，进而函数$u(x)=y(|x|)$是下述偏微分方程

$$\Delta u-m^2u+g(|x|)=0,\qquad x\in R^n,\ \ n\geqslant3 \tag{1.14}$$

的解。

引理4[6] 设$f(x,u)$在$R^n\times(0,\ \infty)$上局部Hölder连续，且关于uLipschitz连续．若存在正的函数V，$W\in C^2(R^n)$满足

$$\Delta V-m^2V+f(x,\ V)\geqslant0,\qquad x\in R^n,\ \ n\geqslant3 \tag{1.15}$$

$$\Delta W-m^2W+f(x,\ W)\leqslant0,\qquad x\in R^n,\ \ n\geqslant3 \tag{1.16}$$

$$V(x)\leqslant W(x),\qquad x\in R^n \tag{1.17}$$

则方程（1.1）有解$u\in C^2(R^n)$，使得

$$V(x)\leqslant u(x)\leqslant W(x),\qquad x\in R^n \tag{1.18}$$

定义1 称满足(1.15)、(1.16)、(1.17)的$C^2(R^n)$函数V，W分别为方程(1.1)的下解、上解。

定义2 设$f(x,\ u)$在$R^n\times(0,\ \infty)$ 上连续，函数V，$W\in C^2(R^n)$，$V(x)\leqslant W(x)$ 且满足

$$\int_R[V\Delta\phi-m^2V\phi+f(x,\ V)\phi]dx\geqslant0,\ \ \forall\phi(\geqslant0)\in C_0^\infty(R^n) \tag{1.19}$$

$$\int_{R^n}[W\Delta\phi-m^2W\phi+f(x,\ W)\phi]dx\leqslant0,\qquad\forall W(\geqslant0)\in C_0^\infty(R^n) \tag{1.20}$$

[注1，2] 在文[5]中定义的$\eta(t)$，$\phi(t)$并不能推出文[5]的(8)、(9)两式．这是因为还相差一个常数因子。

则分别称V，W为方程（1.1）的弱下解、弱上解。

引理5[7]

(i) V是（1.1）的解$\Longrightarrow V$是（1.1）的下解$\Longrightarrow V$是（1.1）的弱下解；

(ii) W是(1.1)的解$\Longrightarrow W$是(1.1)的上解$\Longrightarrow W$是(1.1)的弱上解；

(iii) V_1，V_2是(1.1)的弱下解$\Longrightarrow \max(V_1, V_2)$也是(1.1)的弱下解；

(iv) V_1，V_2是(1.1)的弱上解$\Longrightarrow \min(V_1, V_2)$也是(1.1)的弱上解。

引理6[7] 设$f(x,u)$在$R^n\times(0,\infty)$上局部Hölder连续，且对$\forall x\in R^n$，$\forall\xi$，$\eta\in(0,\infty)$，$\xi\geqslant\eta$满足

$$[-m^2\xi+f(x,\xi)]-[-m^2\eta+f(x,\eta)]\geqslant -P(x)(\xi-\eta) \tag{1.21}$$

其中$P(x)$为R^n的任一紧子集上非负且有界的函数.若方程（1.1）存在弱下解V、弱上解W，它们在R^n上局部Hölder连续且$V(x)\leqslant W(x)$，$x\in R^n$，则方程（1.1）有解$u\in C^{2+\alpha}_{loc}(R^n)$使得

$$V(x)\leqslant u(x)\leqslant W(x), \qquad x\in R^n$$

其中$\alpha\in(0, 0)$。

定义3 设u是R^n上的可测函数，$1<p<\infty$，$1/p+1/p'=1$记

$$\|u\|_{M^p}=\min\left\{ c\in[0,\infty) \,\middle|\, \int_\Omega |u(x)|\,dx\leqslant c(\mathrm{meas}\Omega)^{1/p'} \right\}$$

其中$\Omega\subset R^n$且Ω是任一可测集，记

$$M^p(R^n)=\{u\,|\,\|u\|_{M^p}<\infty\}$$

可知$M^p(R^n)$是Banach空间。

引理7[8] 设$u\in L^1_{loc}(R^n)$，$\Delta u\in L^1(R^n)$，$n\geqslant 3$，且u满足

$$\lim_{j\to\infty}\int_{1\leqslant|x|\leqslant 2}|u(jx)|\,dx=0$$

则$|\nabla u|\in M^{n/(n-1)}(R^n)$。

二、结　　论

定理 方程（1.1）中的函数$f(x, u)$，若满足：

(A_1) $f(x,u)$在$R^n\times(0,\infty)$上局部Hölder连续，且关于u局部Lipschitz连续；

(A_2) 存在正的连续函数$F(t, u)$，$G(t, u)$，$(t, u)\in[0,\infty)\times(0,\infty)$，使得对每一$t\in[0,\infty)$，$F(t, u)$关于$u$非减，$G(t, u)$关于$u$非增，且满足

$$G(|x|, u)\leqslant f(x, u)\leqslant F(|x|, u), \qquad \forall (x, u)\in R^n\times(0,\infty)$$

(A_3) 对每一$t\in[0,\infty)$，$F(t, u)/u$关于u非增，且

$$\lim_{u\to\infty}F(t, u)/u=0 \tag{2.1}$$

而对每一$u\in(0,\infty)$有

$$\lim_{t\to\infty}F(t, u)=0 \tag{2.2}$$

(A_4) 对每一$x\in R^n$，$f(x, u)$关于u非减，$F(t, u)/u$关于u严格减，且对任一有界区域$\Omega\subset R^n$关于$x\in\Omega$一致地有

$$\lim_{u\to 0}f(t, u)/u=\infty \tag{2.3}$$

$$(\mathrm{A}_5) \qquad \int^{\infty} s^{n-1}F(s,\ c)ds<\infty \tag{2.4}$$

其中c为某一正常数。

则方程（1.1）存在唯一的正整解$u(x)$，且$\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x)=0$。

三、定理的证明

1．证明存在性

1）证明 $\int^{\infty} s^{n-1}F(s,\ \tau)ds<\infty, \qquad \forall\tau>0$ (3.1)

证 由(A_3)知

$$s^{n-1}F(s,\ \tau)\leqslant\frac{\tau}{c}s^{n-1}F(s,\ c), \qquad \tau\geqslant c$$

由(A_2)知

$$s^{n-1}F(s,\ \tau)\leqslant s^{n-1}F(s,\ c), \qquad 0<\tau\leqslant c$$

再由(A_5)知（3.1）式成立。从而得

$$\int^{\infty} F(s,\ \tau)ds<\infty, \qquad \forall\tau>0 \tag{3.2}$$

2）证明方程(1.1)存在正整解$u(x)$

证 令 $J(\tau)=\int^{\infty} F(s,\ \tau)ds, \qquad \tau>0$ (3.3)

由(A_2)，(A_3)易知$J(\tau)$在$0<\tau<\infty$上非减、连续，且

$$\lim_{\tau\to\infty}J(\tau)/\tau=0$$

由(1.8)、(1.9)两式知，存在正常数M_1，使得

$$M_1=\sup_{t>0}[\phi(t)t^{n-1}\zeta^2(t)]$$

取充分大的$\tau(\geqslant0)$使$J(\tau)\leqslant\tau/M_1$。

由（3.2）及（1.6）式$\Longrightarrow\int^{\infty}\zeta^{-1}(s)F(s,\ \tau)ds<\infty$，再由(1.8)式$\Longrightarrow$

$$\int^{\infty}\phi(s)s^{n-1}\zeta(s)F(s,\ \tau)ds<\infty \tag{3.4}$$

令

$$\left.\begin{aligned} y_1(t)&=\zeta(t)\int_0^{\infty}\chi_t(s)s^{n-1}\zeta(s)G(s,\ \tau)ds, \qquad t\geqslant0\\ y_2(t)&=\zeta(t)\int_0^{\infty}\chi_t(s)s^{n-1}\zeta(s)F(s,\ \tau)ds, \qquad t\geqslant0\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

其中$\chi_t(s)$由（1.13）式给出。由（3.4）式知$y_1(t)$，$y_2(t)$有意义且满足$0<y_1(t)\leqslant y_2(t)$，$t\geqslant0$。由函数$\zeta(t)$的单调增，有

$$y_2(t)\leqslant\phi(t)t^{n-1}\zeta^2(t)\int_0^t\frac{\zeta(s)}{\zeta(t)}F(s,\ \tau)\ ds+\int_t^{\infty}\phi(s)s^{n-1}\zeta^2(s)F(s,\ \tau)ds$$

$$\leqslant M_1\left(\int_0^t \frac{\zeta(s)}{\zeta(t)} F(s,\ \tau)ds + \int_t^\infty F(s,\ \tau)ds\right)$$
$$\leqslant M_1 J(\tau) \leqslant \tau, \qquad t \geqslant 0$$

由此式及(A_2)得

$$G(t,\ \tau) \leqslant G(t,\ y_1(t)),\ F(t,\ \tau) \geqslant F(t,\ y_2(t)), \qquad t \geqslant 0$$

故有

$$G(|x|,\ \tau) \leqslant G(|x|,\ y_1(|x|)),\ F(|x|,\ \tau) \geqslant F(|x|,\ y_2(|x|)), \qquad x \in R^n \tag{3.6}$$

令$V(x)=y_1(|x|)$，$W(x)=y_2(|x|)$，$x\in R^n$. 由引理3知$V(x)$，$W(x)$满足

$$\Delta V - m^2 V + G(|x|,\ \tau) = 0, \qquad x \in R^n \tag{3.7}$$
$$\Delta W - m^2 W + F(|x|,\ \tau) = 0, \qquad x \in R^n \tag{3.8}$$

由(3.6)、(3.7)、(3.8)式知V，W分别是方程(1.1)的下解和上解.又因为$0<y_1(t)\leqslant y_2(t)$，$t>0$，所以$0<V(x)\leqslant W(x)$，$x\in R^n$. 由引理4即知方程(1.1)存在正整解$u(x)$，且

$$V(x) \leqslant u(x) \leqslant W(x), \qquad x \in R^n \tag{3.9}$$

3) 证明此正整解是衰减的. 即证明

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$$

证 由(3.9)式知只需证明$\lim\limits_{t\to\infty} y_2(t)=0$. 由$y_2(t)$的表示式（3.5）知，$y_2(t)$是两个因子$\zeta(t)$与

$$\int_0^\infty \chi_t(s)s^{n-1}\zeta(s)F(s,\ \tau)ds$$

的相乘积. 再由（1.6）式得$\lim\limits_{t\to\infty}\zeta(t)=\infty$，故有

$$\lim_{t\to\infty}\zeta^{-1}(t) = 0 \tag{3.10}$$

可以证明

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty \chi_t(s)s^{n-1}\zeta(s)F(s,\ \tau)\,ds = 0 \tag{3.11}$$

事实上

$$0 \leqslant \chi_t(s)s^{n-1}\zeta(s)F(s,\ \tau) \leqslant \phi(s)s^{n-1}\zeta(s)F(s,\ \tau), \qquad s \geqslant 0$$

由(1.13)、(1.10)式即知，对每一固定的$s\in[0,\ \infty)$，有

$$\lim_{t\to\infty}\chi_t(s)s^{n-1}\zeta(s)F(s,\ \tau) = 0$$

再注意到（3.4）式并利用Lebesgue控制收敛定理即可得（3.11）式成立.

由此即知，当$t\to\infty$时$y_2(t)$是$\infty\cdot 0$待定型，化成“0/0”待定型即可使用 L^1Hospital 法则及(A_3),. 有

$$\lim_{t\to\infty} y_2(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^\infty \chi_t(s)s^{n-1}\zeta(s)F(s,\tau)ds}{\zeta^{-1}(t)}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{\zeta(t)}{\zeta''(t)+(n-1)t^{-1}\zeta(t)}\cdot F(t,\ \tau)$$
$$= \frac{1}{m^2}\lim_{t\to\infty}F(t,\ \tau) = 0, \qquad \tau \in (0,\ \infty)$$

2．证明唯一性

1）证明由上述1.得到的衰减正整解$u(x)\in L^1(R^n)$

证 由1.知$u(x)\leqslant y(x)$，$x\in R^n$，而由(3.5)式即得

$$y_2(t)=\eta(t)\int_0^t s^{n-1}\zeta(s)F(s,\ \tau)ds+\zeta(t)\int_t^\infty s^{n-1}\eta(s)F(s,\ \tau)ds,\qquad t\geqslant 0$$

其中τ是足够大的正数。又

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{n-1}y_2(t)dt=&\int_0^\infty\int_0^t t^{n-1}\eta(t)s^{n-1}\zeta(s)F(s,\ \tau)dsdt\\&+\int_0^\infty\int_t^\infty t^{n-1}\zeta(t)s^{n-1}\eta(s)F(s,\ \tau)dsdt\\=&\int_0^\infty\left(\int_s^\infty t^{n-1}\eta(t)dt\right)s^{n-1}\zeta(s)F(s,\ \tau)ds\\&+\int_0^\infty\left(\int_0^s t^{n-1}\zeta(t)dt\right)s^{n-1}\eta(s)F(s,\ \tau)ds\end{aligned}\tag{3.12}$$

其中

$L(s)\equiv\int_s^\infty t^{n-1}\eta(t)dt$在$0\leqslant s<\infty$上有意义且连续。

$Q(s)\equiv\int_0^s t^{n-1}\zeta(t)dt$在$0\leqslant s<\infty$上也有意义且连续。

利用（1.6）式可证得

$$L(s)\sim m^{-1}s^{n-1}\eta(s),\qquad s\to\infty\tag{3.13}$$

$$Q(s)\sim m^{-1}s^{n-1}\zeta(s),\qquad s\to\infty\tag{3.14}$$

由(3.13)，(3.14)两式又可证得

$$\int_0^\infty t^{n-1}y_2(t)dt\leqslant c_1\int_0^\infty s^{n-1}F(s,\ \tau)ds\tag{3.15}$$

其中c_1为某一正数。于是

$$\begin{aligned}\int_{R^n}|u(x)|dx&\leqslant\int_{R^n}y_2(|x|)dx\\&\leqslant c_2\int_0^\infty t^{n-1}y_2(t)dt\qquad(c_2\text{为某一正数})\\&\leqslant c_1c_2\int_0^\infty s^{n-1}F(s,\ \tau)ds\end{aligned}$$

$\therefore\qquad u\in L^1(R^n)$

2）证明此衰减正整解u是唯一的.即证明若方程(1.1)具有两个衰减正整解$u_1,u_2\in C^2(R^n)\cap L^1(R^n)$，则必有$u_1\equiv u_2$。这里不妨先设$u_1\leqslant u_2$，$u\in R^n$。

(A) 先证明 $\int_{R^n}(u_1\Delta u_2-u_2\Delta u_1)dx=0$ (3.16)

证 由假设及方程（1.1）与定理条件（A_4）可知

$$u_1\Delta u_2-u_2\Delta u_1=u_1u_2\left(\frac{f(x,\ u_1)}{u_1}-\frac{f(x,\ u_2)}{u_2}\right)\geqslant 0$$

下面分几步证明（3.16）式成立。

（Ⅰ） 取函数$\psi(x)\in C_0^\infty(R^n)$，当$|x|\leqslant 1$时，$\psi(x)=1$，当$|x|\geqslant 2$时$\psi(x)=0$。对于常数$\rho>0$，令$\psi_\rho(x)=\psi(x/\rho)$，则

$$0\leqslant I_\rho\equiv\int_{R^n}(u_1\Delta u_2-u_2\Delta u_1)\psi_\rho(x)\,dx$$

$$=\int_{|x|\leqslant 2\rho}[-\nabla u_2\cdot\nabla(u_1\psi_\rho)+\nabla u_1\cdot\nabla(u_2\psi_\rho)]dx$$

$$=\int_{|x|\leqslant 2\rho}[u_2\nabla u_1\cdot\nabla\psi_\rho-u_1\nabla u_2\cdot\nabla\psi_\rho]dx$$

$$=\int_{\rho\leqslant|x|\leqslant 2\rho}[u_2\nabla u_1\cdot\nabla\psi_\rho-u_1\nabla u_2\cdot\nabla\psi_\rho]dx \tag{3.17}$$

（Ⅱ）验证

（i） $u_i\in L^1_{loc}(R^n)$， $(i=1,\ 2)$；

（ii） $\Delta u_i\in L^1(R^n)$， $(i=1,\ 2)$；

（iii） $\lim\limits_{j\to\infty}\int_{1\leqslant|x|\leqslant 2}|u_i(jx)|\,dx=0$， $(i=1,\ 2)$。

证 （i）显然成立；

（ii）由方程(1.1)知

$$\int_{R^n}|\Delta u_i|\,dx=\int_{R^n}|m^2u_i-f(x,\ u_i)|\,dx$$

$$\leqslant m^2\int_{R^n}|u_i|\,dx+\int_{R^n}F(|x|,\ u_i)dx \tag{3.18}$$

$\because$ $u_i>0$，$u_i\in C^2(R^n)$，$\lim\limits_{|x|\to\infty}u_i(x)=0$， $(i=1,\ 2)$

$\therefore$ $\exists\,\tau_0>0$，使$|u_i(x)|\leqslant\tau_0$，$x\in R^n$， $(i=1,\ 2)$

由条件(A_2)知

$$F(|x|,\ u_i)\leqslant F(|x|,\ \tau_0),\qquad (i=1,\ 2)$$

于是

$$\int_{R^n}F(|x|,\ u_i)dx\leqslant\int_{R^n}F(|x|,\ \tau_0)dx$$

$$\leqslant c_2\int_0^\infty t^{n-1}F(t,\ \tau_0)dt<\infty \tag{3.19}$$

由(3.18)、(3.19)两式得$\Delta u_i\in L^1(R^n)$

（iii） $\lim\limits_{j\to\infty}\int_{1\leqslant|x|\leqslant 2}|u_i(jx)|\,dx=\lim\limits_{j\to\infty}j^{-n}\int_{j\leqslant|y|\leqslant 2j}|u_i(y)|\,dy=0$

于是引理7的条件全部满足，故有

$$|\nabla u_i|\in M^{n/(n-1)}(R^n),\qquad (i=1,\ 2)$$

根据第一节的定义7，取$p=n/(n-1)\ (p'=n)$，$\Omega=\{x\in R^n\,|\,\rho\leqslant|x|\leqslant 2\rho\}$，则

$$\int_{\rho\leqslant|x|\leqslant 2\rho}|\nabla u_i|\,dx\leqslant\|\nabla u_i\|_{M^{n/(n-1)}}(\mathrm{meas}\,\Omega)^{1/n}$$

$$=\|\nabla u_i\|_{M^{n/(n-1)}}c_3\rho\qquad (c_3\text{是与}\rho\text{无关的正数})$$

$$=d_i\rho\qquad (d_i=c_3\|\nabla u_i\|_{M^{n/(n-1)}}\text{与}\rho\text{无关})$$

因此，当$\rho\to\infty$时

$$\int_{\rho\leqslant|x|\leqslant2\rho}|\nabla u_i|dx=O(\rho),\qquad(i=1,\ 2)\tag{3.20}$$

（Ⅲ）$\exists N>0$，使

$$\begin{cases}|\nabla\psi(x)|\leqslant N, & 1\leqslant|x|\leqslant2\\ |\nabla\psi(x)|=0, & \text{其他}\end{cases}$$

于是

$$\begin{cases}|\nabla\psi(x/\rho)|\leqslant N/\rho, & \rho\leqslant|x|\leqslant2\rho\\ |\nabla\psi(x/\rho)|=0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\therefore\qquad|\nabla\psi_\rho(x)|\equiv|\nabla\psi(x/\rho)|=O(1/\rho),\qquad\text{当}\rho\to\infty\text{时}\tag{3.21}$$

（Ⅳ）由$\lim\limits_{|x|\to\infty}u_i(x)=0$，$i=1$，$2\Longrightarrow$当$|x|\equiv\rho>M_1$时$|u_i(x)|<\varepsilon$，$i=1$，$2$.

由（3.20）式$\Longrightarrow\exists K_1>0$，当$|x|\equiv\rho>M_2$时

$$\int_{\rho\leqslant|x|\leqslant2\rho}|\nabla u_i|dx<K_1\rho\qquad(i=1,\ 2)$$

由（3.21）式$\Longrightarrow\exists K_2>0$，当$|x|\equiv\rho>M_3$时$|\nabla\psi_\rho(x)|<K_2/\rho$. 于是从（3.17）式有

$$\begin{aligned}0\leqslant I_\rho&\equiv\int_{\rho\leqslant|x|\leqslant2\rho}[u_2\nabla u_1\cdot\nabla\psi_\rho-u_1\nabla u_2\cdot\nabla\psi_\rho]dx\\&\leqslant\int_{\rho\leqslant|x|\leqslant2\rho}[|u_2||\nabla u_1||\nabla\psi_\rho|+|u_1||\nabla u_2||\nabla\psi_\rho|]dx\\&<2\varepsilon K_1\rho\cdot K_2/\rho\qquad(\text{当}\rho>\max(M_1,\ M_2,\ M_3)\text{时})\\&=2\varepsilon K_1\cdot K_2\end{aligned}$$

由$\varepsilon>0$的任意性得$\lim\limits_{\rho\to\infty}I_\rho=0$，从而

$$\begin{aligned}\int_{R^n}(u_1\Delta u_2-u_2\Delta u_1)dx&=\lim_{\rho\to\infty}\int_{R^n}(u_1\Delta u_2-u_2\Delta u_1)\psi_\rho dx\\&=\lim_{\rho\to\infty}I_\rho=0\end{aligned}$$

即（3.16）式成立.

(B) 证明　$u_1\equiv u_2$，$x\in R^n$.

证　令$W=\min(u_1,\ u_2)$，由引理5知W是方程（1.1)的弱上解. 易知此W是Lipschitz连续的. 并令

$$V(x)=\begin{cases}\beta\cos x_1\cos x_2\cdots\cos x_n, & |x_i|\leqslant\pi/2,\ (i=1,2,\cdots,n)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中β为待定的正常数，并取充分小的β使得

(i)　$V(x)\leqslant W(x)$，$x\in R^n$　(3.22)

(ii)　$f(x,\ V)/V\geqslant f(x,\ W)/W>n+m^2$，　$x\in\Omega_1$　(3.23)

其中$\Omega_1\equiv\{x\in R^n||x_i|<\pi/2,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$

(3.23)式可由条件（A_4）实现. 由（3.23）式

$$f(x,\ V)\geqslant V\cdot(n+m^2),\qquad x\in\Omega_1$$

由(A_2)知$f(x,\ u)$在$R^n\times(0,\ \infty)$上是正的函数，由(A_4)知$f(x,\ u)$关于u非减，故可定

义$f(x,0)=\lim\limits_{u\to 0}f(x,u)$。于是$f(x,0)\geqslant 0$，$u\in R^n$.又$\Delta V(x)=-nV(x)$，$x\in\bar{\Omega}_1$，于是

$$\Delta V-m^2V+f(x,V)=-(n+m^2)V+f(x,V)\geqslant 0,\quad x\in\bar{\Omega}_1 \tag{3.24}$$

对任意非负的$\phi\in C_0^\infty(R^n)$，因为当$x\in R^n-\Omega_1$时$V=0$，所以

$$V\Delta\phi-m^2V\phi+f(x,V)\phi=f(x,V)\phi\geqslant 0,\qquad x\in R^n-\Omega_1$$

于是

$$\begin{aligned}
&\int_{R^n}(V\Delta\phi-m^2V\phi+f(x,V)\phi)dx\\
&\geqslant\int_{\bar{\Omega}_1}(V\Delta\phi-m^2V\phi+f(x,V)\phi)dx\\
&=\int_{\bar{\Omega}_1}[(V\Delta\phi-\phi\Delta V)+(\Delta V-m^2V+f(x,V))\phi]dx\\
&=\int_{\partial\Omega_1}\left(V\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial V}{\partial n}\right)ds+\int_{\bar{\Omega}_1}(\Delta V-m^2V+f(x,V))\phi dx\\
&\geqslant\int_{\partial\Omega_1}\left(V\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial V}{\partial n}\right)ds=\int_{\partial\Omega_1}-\phi\frac{\partial V}{\partial n}ds\\
&\geqslant 0\qquad\left(\because\ \left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{|x_i|=\pi/2}\leqslant 0\right)
\end{aligned}\tag{3.25}$$

根据第一节定义1知V是方程（1.1）的弱下解。

$\forall x\in R^n$，$\forall\xi$，$\eta\in(0,\infty)$，$\xi\geqslant\eta$，则由条件（A_4）有

$$[-m^2\xi+f(x,\xi)]-[-m^2\eta+f(x,\eta)]\geqslant -m^2(\xi-\eta)$$

取引理6中的函数$P(x)\equiv m^2$，$x\in R^n$，则引理6中的条件全部满足，从而方程（1.1）有正解$\tilde{u}(x)$，使得

$$V(x)\leqslant\tilde{u}(x)\leqslant W(x),\qquad x\in R^n$$

根据强极值原理保证了$\tilde{u}(x)>0$，$x\in R^n$。由于

$$\tilde{u}(x)\leqslant W(x)=\min(u_1,u_2),\qquad x\in R^n$$

故由（A）的结论得

$$\tilde{u}(x)\equiv u_1(x)\equiv u_2(x),\qquad x\in R^n$$

证毕

四、应　　用

先举一例说明定理的应用，然后再给出定理的推论及其应用。

例1　考察方程

$$\Delta u-m^2u+q(x)(1+u)^\nu=0,\qquad x\in R^n,\ n\geqslant 3 \tag{4.1}$$

其中常数$m>0$，$0<\nu<1$，$q(x)>0$；$x\in R^n$且局部Hölder连续.若设

$$q^*(t)=\max_{|x|=t}q(x),\quad q_*(t)=\min_{|x|=t}q(x),\qquad t\geqslant 0$$

且$q^*(t)$满足

$$\int^\infty s^{n-1}q^*(s)ds<\infty,\quad \lim_{t\to\infty}q^*(t)=0$$

则方程（4.1）存在唯一的衰减正整解u。

证 只需验证$f(x, u)=q(x)(1+u)^\nu$满足第二节定理的5个条件$(A_1)\sim(A_5)$即可。

(1) $f(x, u)=q(x)(1+u)^\nu$满足条件(A_1)是显然的；

(2) 取$F(t, u)=q^*(t)(1+u)^\nu$，$G(t, u)=q_*(t)$，$(t, u)\in[0, \infty)\times(0, \infty)$。则对每一$t\in[0, \infty)$，$F(t, u)$关于$u$非减，$G(t, u)$关于$u$非增。且满足

$$G(|x|, u)\leqslant f(x, u)\leqslant F(|x|, u), \qquad \forall (x, u)\in R^n\times(0, \infty)$$

故条件（A_2）成立；

(3) 对每一$t\in[0, \infty)$

$$\frac{F(t, u)}{u}=q^*(t)\left(\frac{1}{u^{1/\nu}}+\frac{1}{u^{1/\nu-1}}\right)^\nu$$

因为$0<\nu<1$，$\lim\limits_{t\to\infty}q^*(t)=0$，所以

$$\lim_{t\to\infty}F(t, u)=\lim_{t\to\infty}q^*(t)(1+u)^\nu=0$$

故条件（A_3）亦成立；

(4) 对每一$x\in R^n$，$f(x, u)=q(x)(1+u)^\nu$关于u非减。

$$\frac{f(x, u)}{u}=q(x)\left(\frac{1}{u^{1/\nu}}+\frac{1}{u^{1/\nu-1}}\right)^\nu$$

关于u严格减，对任一有界区域$\Omega\subset R^n$，因$q(x)$是R^n上正的连续函数，故$\min q(x)=m_1>0$。于是当$u\to 0$时

$$\frac{f(t, u)}{u}=q(x)\frac{(1+u)^\nu}{u}>m_1\frac{(1+u)^\nu}{u}\to\infty$$

条件（A_4）成立；

(5) 由假设 $\int^\infty s^{n-1}q^*(s)ds<\infty$，即条件$(A_5)$成立。

从而根据第二节定理即得方程（4.1）存在唯一的衰减正整解。

定理的推论：设方程

$$\Delta u-m^2u+f(|x|, u)=0, \qquad x\in R^n,\ n\geqslant 3 \tag{4.2}$$

其中$m>0$，$f(|x|, u)$满足：

(B_1) 在$R^n\times(0, \infty)$上局部Hölder连续，且关于u局部Lipschtz连续；

(B_2) 对每一$t\in[0, \infty)$，$f(t, u)$关于u非减，$f(t, u)/u$关于u严格减，且$\lim\limits_{u\to\infty}f(t, u)/u=0$。对每一$u\in(0, \infty)$，$\lim\limits_{t\to\infty}f(t, u)=0$。对任一有界区间$[0, b]$，$u\to\infty$，$b>0$，关于$t\in[0, b]$一致地有$\lim\limits_{u\to\infty}f(t, u)/u=\infty$；

(B_3) 存在正的函数$G(t, u)$在$[0, \infty)\times(0, \infty)$上连续，对每一$t\in[0, \infty)$关于$u$非增，且满足

$$f(|x|, u)\geqslant G(|x|, u), \qquad \forall (x, u)\in R^n\times(0, \infty)$$

(B_4) $\int^\infty s^{n-1}f(s, c)ds<\infty$，$c$为某一正数。

则方程（4.2）存在唯一的衰减正整解$u(x)$。

证 只需取第二节定理中的

$$F(t, u)\equiv f(t, u), \qquad (t, u)\in[0, \infty)\times(0, \infty)$$

即可。满足定理的条件$(A_1)\sim(A_5)$，故命题成立。

例2 考察方程

$$\Delta u-m^2u+q(|x|)(1+u)^\nu=0, \qquad x\in R^n,\ n\geqslant 3 \tag{4.3}$$

其中$m>0$，$0<\nu<1$，$q(t)$在$[0,\infty)$上为正的且局部Hölder连续，并满足

$$\lim_{t\to\infty}q(t)=0,\ \int^\infty s^{n-1}q(s)ds<\infty$$

则方程（4.3）存在唯一的衰减正整解.

证 容易验证$f(|x|,u)\equiv q(|x|)(1+u)^\nu$满足定理的推论中的条件$(B_1)\sim(B_4)$. 根据推论即得方程（4.3）存在唯一的衰减正整解$u(x)$.

例3 考察方程

$$\Delta u-m^2u+(a+|x|^2)^\alpha(b+u)^\beta=0, \qquad x\in R^n,\ n\geqslant 3 \tag{4.4}$$

其中$m>0$，$a>1$，$b>1$，$\alpha<-(n+\varepsilon)/2$，$\varepsilon$为任一正数，$0<\beta<1$. 则方程（4.4）存在唯一的衰减正整解$u(x)$.

证 取

$$f(|x|,u)=(a+|x|^2)^\alpha(b+u)^\beta, \qquad (x,u)\in R^n\times(0,\infty)$$

易证它满足定理的推论中的条件(B_1)，(B_2).

取$G(t,u)=(a+t^2)^\alpha$，则$f(|x|,u)\geqslant G(|x|,u)$，$\forall(x,u)\in R^n\times(0,\infty)$，条件$(B_3)$成立. 再注意到$a>1$，$\alpha<-(n+\varepsilon)/2$，$\varepsilon>0$，则

$$s^{n-1}(a+s^2)^\alpha<\frac{s^{n-1}}{(a+s^2)^{(n+\varepsilon)/2}}<\frac{1}{s^{1+\varepsilon}}$$

$$\therefore \qquad \int^\infty s^{n-1}f(s,c)ds=(b+c)^\beta\int^\infty s^{n-1}(a+s^2)^\alpha ds<\infty$$

从而条件（B_4）成立. 故根据定理的推论知方程（4.4）存在唯一的衰减正整解.

参 考 文 献

[1] T. Kusano and S. Oharu, On entire solutions of second order semilinear elliptic equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **113** (1986), 123—135.

[2] N. Kawano, T. Kusano and M. Naito, On the elliptic equation $\Delta u=\phi(x)u^\nu$ in R^2, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 93 (1985), 73—78.

[3] N. Kawano, On bounded entire solutions of semilinear elliptic equations, *Hiroshima Mamh. J.*, **14** (1984), 125—158.

[4] T. Kusano and H. Usami, Positive solutions of a class of second order semilinear elliptic equations in the plane, *Math. Ann.*, **268** (1984), 255—264.

[5] N. Fukagai, Positive entire solutions of semilinear elliptic equations, *Math. Ann.*, **274** (1986), 75—93.

[6] E. S. Noussair, Positive solutions of quasilinear elliptic equations in exterior domains, *J. Math. Anal. Appl.*, **75** (1980), 121—133.

[7] N. Fukagai, Existence and uniqueness of entire solutions of second order sublinear elliptic equations, *Funkcialaj Ekvacioj*, **29** (1986), 151—165.

[8] P. Benilan, H. Brezis and M. G. Crandall, A semilinear equation in $L^1(R^n)$, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci.*, Ⅳ(Ser.2) (1975), 523—555.

The Existence and Uniqueness of the Decaying Positive Entire Solutions for a Class of Semilinear Elliptic Equations

Tian Genbao

(*Shanghai Institute of Railway Technology, Shanghai* 200333, *P. R. China*)

Abstract

This paper first proves the following equations

$$\Delta u - m^2 u + f(x, u) = 0, \qquad x = R^n, \ n \geqslant 3, \ m > 0$$

existence of decaying positive entire solution, then emphatically proves this solution's uniqueness.

Key words weak supersolution, weak subsolution, monoone convergence theorem, nonincreasing, nondecreasing, locally Hölder continuous, locally Lipschitz continuous, strong maximum principle