

具有耗散接头的三维欧拉—伯努利 杆系的特征频率

威廉 H. 包尔森

(美国阿肯色州立大学数理及计算机科学系)

(钱伟长推荐, 1994年11月15日收到)

摘 要

本文计算了具有耗散接头的一般非共线的欧拉—伯努利或铁木辛柯杆系结构振动特征频率的传递矩阵。将允许结构是三维的, 因此, 一定要同时研究各种振动模式, 包括纵向和扭转的振动。这种结构一般可以看作是由许多杆件首尾相接构成一条链条。允许有各种不同的减振器, 甚至有些减振器是本结构内部形成的。我们也允许在结构中采用不同材料, 杆件也可以是不同宽度。本文证明了可以利用渐近估计方法来求得近似的特征频率。

关键词 渐近值 耦合杆系 特征频率 欧拉—伯努利 铁木辛柯 共线接头

一、引 言

在建造像大型通讯卫星或空间平台等大型空间结构中, 一般都在杆件接头处采用各种不同的减振装置来抑制振动。如果不采用这些减振装置或减振器, 微小的振动会在结构中长期延续不停, 甚至逐渐增强以致引向灾难性的后果。因此, 像这样一类杆系组态的结构稳定性问题和寻找该结构的自振频率密切相关。在决定如何抑制这些振动时, 包含着对这些振动的严格分析。美国宇航局(NASA)所建议的空间平台为了满足这种构造的要求, 竟要求采用40根杆件的结构(从NASA工作研讨会上获悉)。最近为了做出这样一个结构的模型, 已做了不少工作, 但不少工作是在二维空间上进行的。本文考虑了一切三维空间的, 和一切可能的杆件振动形式, 包括纵向和扭转振动。我们也允许杆件有不同截面尺寸, 甚至也允许同一结构中用不同材料的杆件做成。本文提供了工程师们在决定某一结构发生振动问题的一种办法。

本文所研究的杆系结构为一组直杆首尾相连接所组成的一条链。在杆与杆的连接点都有减振器。一杆的中间部份也可以有减振器, 它可以看作为一杆分为两短杆来认识。这样一条三杆组成的链的例子见图1。所有三杆的杆长为1, 该链的两端都是固定的。第一第二两杆和它们之间的减振器都在一个平面内, 而第二第三两杆和它们之间的减振器则在另一平面内, 而且这两个平面相互垂直。这一例子只显示了本文所要讲到的四种减振器中的一种。

我们不采用把杆标号的办法, 而采用把结构分区标号的办法。某一部分包括杆件的长度、一个减振器、和一个质量, 这一质量具有或不具有转动惯量, 或两杆之间的夹角。以图1的杆系为例, 它有9个分区结构: 三根杆件, 两个夹角, 两个减振器, 两端杆件的固定端也可以

作为一个分区结构。这些部份可以逐一从0到n标出，通常标成 $j=0, 1, 2, \dots, n$ 。于是，用“ j^{th} 杆”表示这一结构的第j分区，这一规定使文中的矩阵显得非常简单。

设 E_j 表示每一杆的杨氏模量， G_j 为剪切模量， ρ_j 为其密度，并设在每一杆中，它们都是常量，但不同的杆可以各不相同。这里必须指出，上述量只有当 j 代表杆长时才是有效的。其次，我们还假定在每一杆件上，截面积 A_j 在杆长各点都是均匀的，而且通过杆轴的任意平面的惯性矩也是常数（指在杆上各点不变）。这只有而且仅在下列各条件下才是正确的，即

$$\iint_{R_j} (x-\bar{x})^2 dA = \iint_{R_j} (y-\bar{y})^2 dA = I_j \text{ 和 } \iint_{R_j} (x-\bar{x})(y-\bar{y}) dA = 0$$

其中 R_j 为杆件的截面区域，上述条件只有在圆截面和正方形截面下才是有效的。杆件截面的极惯性矩一般用 I_0 表示，在这里它等于 $2I_j$ 。如果像工字杆件那样，不同的平面的惯性矩不相等，则除了方程式更加复杂外，本法仍属有效。

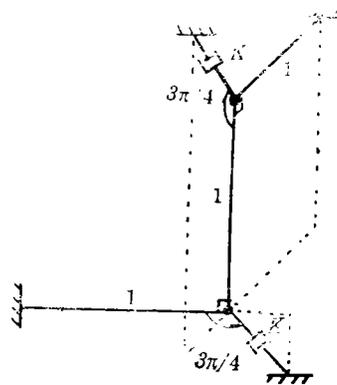


图1 三杆链，两个平面

二、一般背景

铁木辛柯的杆件方程为

$$EIv^{iv} + \rho Av = \rho I \left(1 + \frac{E}{kG} \right) v'' - \frac{\rho^2 I}{kG} \ddot{v}$$

其中 $0 < x < L$, $t > 0$ 。这是单一杆件的一种典型数学模型。见[20, 433页]。其中 k 为和截面形状有关的一个数值系数。如果式右诸项的和为0，我们得到欧拉—伯努利杆件模型的振动方程。铁木辛柯模型包括了转动惯量效应和剪切变形的效应，而欧拉—伯努利方程则不包括这些效应。在适当的边界条件和初始条件下，有唯一和稳定的解^[12]。杆端的边界条件决定各种特征频率 λ 。每一特征频率有一相关的特征函数 $\phi_{\lambda_j}(x)$ 。利用适当的格林函数^[12]，初始条件可以分解为特征函数 $\phi_{\lambda_j}(x)$ 的线性组合。于是，只要我们找到特征频率，这一问题是可解的。

在[5, 1668页]中，处理了用一种特殊的耗散接头把相交180度的两根相同欧拉—伯努利杆件连接在一起，结构的一端固定，而另一端自由。对角位移采用了线性近似。同时， ρ, A, E 和 I 假定在整个结构中都是常量。尽管采用了这些简化，所得的决定特征频率的方程仍然非常复杂。不过，把高频特征频率有关的项作为小项略去后，仍能求得渐近的解析解。这一结构的频谱可以写成两种序列，或两种特征频率“串滴”(stream)：

$$\lambda_k \sim \sqrt{EI/\rho A} (4k\pi - \pi)^2 - EI[(k_1^2 k_2^2 + c_1 c_2)/2k_1^2] i$$

$$\text{及 } \lambda_k \sim \sqrt{EI/\rho A} (4k\pi + \pi)^2 - [4/\rho A k_1^2] i \quad (k \rightarrow \infty)$$

其中 k_1, k_2, c_1 和 c_2 为常数，其值和接头处的减振器相关。

在[13]中，一般的 n 杆共线结构系在相同的假设下的频谱一般有 n 个特征频率串滴，每一串频率都趋近于某一垂直线。本文在同一结构允许有3种设计的耗散接头，和多种不同类型的减振器。在共线连接的杆件中，有4种不同减振器^[6, p. 1667]：

I型: 接头上不受外力作用, 在振动时, 位移矢量和杆件夹角可以变化。

II型: 位移矢量在跨越接头时是连续的, 杆件夹角可以变化。接头上受有外力作用, 但不包括扭力。

III型: 位移矢量和杆间夹角是固定不变的, 但接头上允许有各种外力作用。

IV型: 杆间夹角是固定的, 但位移矢量在接头上可以不连续。在接头上所受外力互相对消, 但允许有扭力作用。

论文[13]推出了一个计算特征频率“串滴”的新方法。对于结构的每一杆件, 根据杆件的长度和杆件端点的减振器类型建立一个 2×2 矩阵。把这类矩阵连乘在一起, 在其左端乘上一个 1×2 矩阵, 在其右端乘上一个 2×1 矩阵, 这样就得到一个标量函数。这个函数的各个零点都给出这类特征频率的渐近展开式。

这一技术在后来由[17]和[18]推广到处理二维杆系结构的在本平面内的振动问题。为了简单化起见, 纵向振动根本上完全略去了。即使这样简化, 渐近近似计算中还需要用 20×20 矩阵。这里也证明了, 假如杆长是整体的, 而且总长为 T , 则我们可以找到 $2T$ 个特征频率的“串滴”。

三、基本思路

对于结构的 j^{th} 部份而言, 不论它是一段杆, 或一个减振器, 或一个质量, 或一个夹角, 我们可以转动坐标轴, 使这一部份结构在静止时, 这一点上的杆件和 x 轴一致。当结构的 j^{th} 部份是杆长为 l_j 的杆件时, 我们设 $u_j(x, t), 0 \leq x \leq l_j, t \geq 0$ 为定义在 x 轴向的位移函数。同样, $v_j(x, t), w_j(x, t)$ 分别为 y 轴向和 z 轴向的位移分量。设 $\theta_j(x, t)$ 为转动位移, 当 θ 为正时, 从 y 轴转向 z 轴。

当结构的 j^{th} 部份不代表杆件长度时, 我们可以令 $l_j = 0$, 而 $u_j(x, t), v_j(x, t), w_j(x, t), \theta_j(x, t)$ 还都表示相应的位移, 但这些位移和 x 无关(或即是说, 只在 $x = 0$ 那一点是定义的函数)。

因为我们将考虑扭转和纵向振动, 我们将采用铁木辛柯形式的偏微分方程或其它形式的偏微分方程。对于均匀杆件的纵向振动而言, 我们有[14, 81页]所给的运动方程

$$E_j u_j'' - \rho_j \ddot{u}_j = 0 \quad (3.1)$$

对于均匀杆件的扭转振动而言, 其运动方程为

$$J_j G_j \theta_j'' - 2I_j \rho_j \ddot{\theta}_j = 0 \quad (3.2)$$

其中 G_j 为剪切模量, J_j 为抗扭刚度常数。对于圆轴而言, [14, 95页]给出了较简化的方程, 这时, $J_j = 2I_j$, (3.2)式对一切均匀杆件都是通用的。扭矩等于 $-G_j J_j \theta_j'$ 。

铁木辛柯方程中的 $\rho^2 I \ddot{v} / kG$ 是二级小量, 为求得特征频率的初级近似, 我们可以略去该项。其结果仍考虑了转动惯量和剪切变形, 但不考虑这两者间的相互作用。

振动的4个方程为

$$\left. \begin{aligned} E_j I_j v_j^{\text{iv}} + \rho_j A_j \ddot{v}_j &= \rho_j I_j (1 + E_j / k_j G_j) v_j'' \\ E_j I_j w_j^{\text{iv}} + \rho_j A_j \ddot{w}_j &= \rho_j I_j (1 + E_j / k_j G_j) w_j'' \\ E_j u_j'' - \rho_j \ddot{u}_j &= 0, \quad J_j G_j \theta_j'' - 2I_j \rho_j \ddot{\theta}_j = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

上述方程中有几个可以用矢量合在一起。设用 $\mathbf{D}_j(x, t)$ 表示位移矢量 $\langle u_j, v_j, w_j \rangle$, 于是速度可以用 $\dot{\mathbf{D}}_j(x, t)$ 表示。设取外力矢量

$$\mathbf{F}_j(x, t) = \langle E_j A_j \dot{u}_j', \rho_j I_j (1 + E_j/k_j G_j) \dot{v}_j - E_j I_j v_j''', \rho_j I_j (1 + E_j/k_j G_j) \dot{w}_j' - E_j I_j w_j''' \rangle$$

于是(3.3)的前三式可以写成

$$\mathbf{F}_j' = \rho_j A_j \ddot{\mathbf{D}}_j$$

转动一般用 3×3 的正交矩阵来表示,我们也用一种矢量来表示,其方法见[15, 237页], 矢量 $\mathbf{R} = \langle a, b, c \rangle$ 表示绕 \overrightarrow{OP} 轴的转动,它表示从 P 点的一端看, $P = (a, b, c)$, 在反时针方向转动一个角 $|\mathbf{R}|$. 这一转动的对应的正交矩阵为

$$\begin{aligned} & \exp \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{d^2} \begin{pmatrix} a^2 + (b^2 + c^2) \cos d & ab(1 - \cos d) - dc \sin d & ac(1 - \cos d) + bds \sin d \\ ab(1 - \cos d) + dc \sin d & b^2 + (a^2 + c^2) \cos d & bc(1 - \cos d) - ads \sin d \\ ac(1 - \cos d) - bds \sin d & bc(1 - \cos d) + ad \sin d & c^2 + (a^2 + b^2) \cos d \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, 而 \exp 代表这一矩阵指数函数^[15, p. 328].

正负号规则如下: 当 $a > 0$ 时, y 轴转向 z 轴; 当 $b > 0$ 时, z 轴转向 x 轴; 当 $c > 0$ 时, x 轴转向 y 轴. 于是, 每一杆件的转动矢量是 $\mathbf{R}_j = \langle \theta_j, -w_j', v_j' \rangle$.

扭矩也同样可以用一种矢量表示. 绕 x 轴的扭矩为 $-G_j J_j \theta_j'$, 而对 y 轴或 z 轴的弯矩分别为 $E_j I_j w_j''$, $-E_j I_j v_j''$. 于是扭矩矢量为 $\mathbf{T}_j = \langle -G_j J_j \theta_j', E_j I_j w_j'', -E_j I_j v_j'' \rangle$.

现在让我们推导每一杆件所有的总能量. 由位移造成的动能为

$$\int_0^{l_j} \frac{1}{2} \rho_j A_j [(\dot{u}_j)^2 + (\dot{v}_j)^2 + (\dot{w}_j)^2] dx$$

由绕三个不同轴转动所造成的总动能为

$$\int_0^{l_j} \frac{1}{2} \rho_j (2I_j) (\dot{\theta}_j)^2 + \frac{1}{2} \rho_j I_j (\dot{v}_j')^2 + \frac{1}{2} \rho_j I_j (\dot{w}_j')^2 dx$$

从[20, 436页]杆件弯曲所得势能(初步近似)为

$$\int_0^{l_j} \frac{1}{2} E_j I_j [(v_j'')^2 + (w_j'')^2] dx$$

有关剪切变形的势能为

$$\int_0^{l_j} \frac{1}{2} \frac{\rho_j I_j E_j}{k_j G_j} [(\dot{v}_j')^2 + (\dot{w}_j')^2] dx$$

伸长和扭转所造成的势能分别为

$$\int_0^{l_j} \frac{1}{2} E_j A_j (u_j')^2 dx$$

及

$$\int_0^{l_j} \frac{1}{2} G_j J_j (\theta_j')^2 dx$$

j^{th} 杆件在 t 时的总能量为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j(t) = & \frac{1}{2} \int_0^{l_j} [\rho_j A_j (\dot{u}_j)^2 + \rho_j A_j (\dot{v}_j)^2 + \rho_j A_j (\dot{w}_j)^2 + 2\rho_j I_j (\dot{\theta}_j)^2 \\ & + \rho_j I_j (\dot{v}_j')^2 + \rho_j I_j (\dot{w}_j')^2 + E_j I_j (v_j'')^2 + E_j I_j (w_j'')^2 + \frac{\rho_j I_j E_j}{k_j G_j} (\dot{v}_j')^2] dx \end{aligned}$$

$$+ \frac{\rho_j I_j E_j}{k_j G_j} (\dot{w}'_j)^2 + E_j A_j (\dot{u}'_j)^2 + G_j J_j (\dot{\theta}'_j)^2] dx$$

现在我们可以计算跨过这一结构每一部份的能量变化率。利用 (3.3) 式, 我们得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_j(t) &= \int_0^{l_j} (E_j A_j \dot{u}_j u''_j + \rho_j I_j \dot{v}_j v''_j + \frac{\rho_j I_j E_j}{k_j G_j} \dot{v}_j v''_j - E_j I_j \dot{v}_j v'_j + \rho_j I_j \dot{w}_j w''_j) dx \\ &\quad + \frac{\rho_j I_j E_j}{k_j G_j} \dot{w}_j w''_j - E_j I_j \dot{w}_j w'_j + G_j J_j \dot{\theta}_j \theta''_j + \rho_j I_j \dot{v}'_j v'_j \\ &\quad + \rho_j I_j \dot{w}'_j w'_j + E_j I_j \dot{v}'_j v'_j + E_j I_j \dot{w}'_j w'_j + \frac{\rho_j I_j E_j}{k_j G_j} \dot{v}'_j v'_j \\ &\quad + \frac{\rho_j I_j E_j}{k_j G_j} \dot{w}'_j w'_j + E_j A_j \dot{u}'_j u'_j + G_j J_j \dot{\theta}'_j \theta'_j) dx \\ &= \int_0^{l_j} \frac{d}{dx} (\dot{D}_j \cdot F_j - \dot{R}_j \cdot T_j) dx \end{aligned}$$

因此, 这种能量变化只在杆件的端点显示出来。如果结构的这一 j^{th} 部份不是一条杆件的长度, 则 l_j 等于零, 其能量变化不可能大于零。它给出

$$\dot{D}_j^- \cdot F_j^- - \dot{D}_j^+ \cdot F_j^+ + \dot{R}_j^+ \cdot T_j^+ - \dot{R}_j^- \cdot T_j^- \leq 0, \quad \forall t > 0 \quad (3.5)$$

四、分离变量

现在我们采用分离变量法, 把这种分离变量法略加修正, 从而把 (3.3) 式中的方程式合在一起求解。设 λ 为某一特征频率, 则用分离变量法, 对欧拉-伯努利模式进行经典处理, 得

$$v_j(\lambda, x, t) = [A_j(\lambda) e^{\eta x} + B_j(\lambda) e^{i\eta x} + C_j(\lambda) e^{-\eta x} + D_j(\lambda) e^{-i\eta x}] \exp[\lambda t \sqrt{EI/\rho A}] \quad (4.1)$$

其中 $\eta = (1-i)\sqrt{\lambda}/2$, 即 $\lambda = i\eta^2$ 。于是我们可以从 (4.1) 中把一切不同频率 λ 的表达式的和作为微分方程的一般解。

由于对于各个杆件, 我们可能要遇到不同的 E_j , I_j , A_j 和 ρ_j 值, 而且, 也要用铁木辛柯模型, 因此将用一个特殊的常量在经典处理中来替代 $\sqrt{EI/\rho A}$ 。我们也将用 η 而不用 λ 来进行计算, 实际上, 我们用了 $\lambda = i\eta^2$ 。设 ω 是一个固定的物理量, 它的量纲是 (长度²/时间)。它将于后面的计算决定。采用了分离变量法, 我们可以规定

$$\begin{aligned} v_j(\eta, x, t) &= \bar{v}_j(\eta, x) \exp[i\omega\eta^2 t] \\ w_j(\eta, x, t) &= \bar{w}_j(\eta, x) \exp[i\omega\eta^2 t] \\ u_j(\eta, x, t) &= \bar{u}_j(\eta, x) \exp[i\omega\eta^2 t] \\ \theta_j(\eta, x, t) &= \bar{\theta}_j(\eta, x) \exp[i\omega\eta^2 t] \end{aligned}$$

代入 (3.3), 我们得常微分方程组

$$\begin{cases} \bar{v}_j^{\prime\prime}(\eta, x) + \mu_j \varepsilon_j \eta^4 \bar{v}_j'(\eta, x) - \mu_j \eta^4 \bar{v}_j(\eta, x) = 0 \\ \bar{w}_j^{\prime\prime}(\eta, x) + \mu_j \varepsilon_j \eta^4 \bar{w}_j'(\eta, x) - \mu_j \eta^4 \bar{w}_j(\eta, x) = 0 \\ \bar{u}_j''(\eta, x) + \gamma_j^2 \bar{u}_j(\eta, x) = 0 \\ \bar{\theta}_j''(\eta, x) + \gamma_j^2 \delta_j^2 \bar{\theta}_j(\eta, x) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

其中

$$\mu_j = \frac{\rho_j A_j \omega^2}{E_j I_j}, \quad \varepsilon_j = \frac{I_j}{A_j} \left(1 + \frac{E_j}{k_j G_j} \right)$$

$$\gamma_j = \sqrt{\frac{\rho_j \omega^2}{E_j}}, \quad \delta_j = \sqrt{\frac{2E_j I_j}{G_j J_j}}$$

应该注意到, 如果所有杆件都相同, 则我们可以选用 $\omega = \sqrt{EI/\rho A}$, 而且对一切杆件而言, $\mu_j = 1$. 又有, 如 $\varepsilon_j = 0$, 则这些杆件都是欧拉-伯努利杆件. 于是 ε_j 可以看作是把这两种模型联系在一起摄动参数.

我们首先将从纵向振动方程开始. $u_j(\eta, x, t)$ 的一般解可以表示为

$$u_j(\eta, x, t) = [K_1 \sin(\gamma_j \eta^2 x) + K_2 \cos(\gamma_j \eta^2 x)] \exp[i\omega \eta^2 t]$$

我们也可以解出 (3.2) 式, 得

$$\theta_j(\eta, x, t) = [K_3 \sin(\gamma_j \delta_j \eta^2 x) + K_4 \cos(\gamma_j \delta_j \eta^2 x)] \exp[i\omega \eta^2 t]$$

在求解微分方程 (4.2) 式中, 我们得其解为

$$v_j(\eta, x, t) = \{A_j(\eta) \cos[x\eta p_j(\eta)] + B_j(\eta) \sin[x\eta p_j(\eta)] \\ + C_j(\eta) \cosh[x\eta q_j(\eta)] + D_j(\eta) \sinh[x\eta q_j(\eta)]\} \exp[i\omega \eta^2 t] \quad (4.3)$$

其中

$$p_j(\eta) = \sqrt{(\sqrt{\mu_j^2 \varepsilon_j^2 \eta^4 + 4\mu_j} + \mu_j \varepsilon_j \eta^2) / 2}$$

和

$$q_j(\eta) = \sqrt{(\sqrt{\mu_j^2 \varepsilon_j^2 \eta^4 + 4\mu_j} - \mu_j \varepsilon_j \eta^2) / 2}$$

我们暂不采用上述基础来处理波动, 我们将采用 (4.2) 式的特解, 它是下式递推定义的:

$$g_{j,0}(\eta, x) = \frac{p_j(\eta)^2}{q_j(\eta) \sqrt{\mu_j^2 \varepsilon_j^2 \eta^4 + 4\mu_j}} \sinh[x\eta q_j(\eta)] \\ + \frac{q_j(\eta)^2}{p_j(\eta) \sqrt{\mu_j^2 \varepsilon_j^2 \eta^4 + 4\mu_j}} \sin[x\eta p_j(\eta)]$$

$$g_{j,i}(\eta, x) = \frac{d}{dx} g_{j,i-1}(\eta, x) / \eta, \quad i \leq i \leq 6$$

且 $g_{j,0}(\eta, x)$ 的各级导数在 $x=0$ 处的解如下:

$$g_{j,0}(\eta, 0) = g_{j,0}'(\eta, 0) = g_{j,0}''(\eta, 0) = g_{j,0}^{iv}(\eta, 0) = g_{j,0}^{vi}(\eta, 0) = g_{j,0}^{viii}(\eta, 0) = 0$$

$$g_{j,0}'(\eta, 0) = \eta, \quad g_{j,0}(\eta, 0) = \mu_j \eta^5, \quad g_{j,0}^{vi}(\eta, 0) = -\mu_j^2 \varepsilon_j \eta^9$$

任一顺序的 4 个函数都是线性无关的, 但它们有下列关系

$$g_{j,0} = \varepsilon_j^{-1} g_{j,4} + \varepsilon_j \eta^2 g_{j,2}, \quad g_{j,5} = \mu_j g_{j,1} - \mu_j \varepsilon_j \eta^2 g_{j,3}$$

和

$$g_{j,6} = \mu_j g_{j,2} - \mu_j \varepsilon_j \eta^2 g_{j,4}$$

所以, 所有 7 个函数都可以用 $g_{j,1}$, $g_{j,2}$, $g_{j,3}$ 和 $g_{j,4}$ 表示.

由于 g 的许多导数在 $x=0$ 处都是零, 所以我们可以用它们作为波动的基础. 但是首先我们应该确定杆件的初始位移、初始转角、初始扭矩和初始外力决定的所有常数. 为了进行这一工作, 我们将引用另一物理常量 ψ , 它的量纲为 (质量·长度³/时间²), 其数值可以稍后决定. 每一杆件的抗弯刚度可以用 ψ 来衡量, 我们可以假设

$$\phi_j = E_j I_j / \psi$$

于是 ϕ_j 是 j^{th} 杆件抗弯刚度的无量纲度量. 现在定义

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_j(\eta, 0, t) &= \langle d_{j,1}, d_{j,2}, d_{j,3} \rangle \exp[i\omega\eta^2 t] \\
&= \langle u_j(\eta, 0, t) \cdot v_j(\eta, 0, t), w_j(\eta, 0, t) \rangle \\
\mathbf{F}_j(\eta, 0, t) &= \psi\eta^3 \langle f_{j,1}, f_{j,2}, f_{j,3} \rangle \exp[i\omega\eta^2 t] \\
&= \langle E_j A_j u'_j(\eta, 0, t) \cdot \rho_j I_j (1 + E_j/k_j G_j) v'_j(\eta, 0, t) \\
&\quad - E_j I_j v''_j(\eta, 0, t), \rho_j I_j (1 + E_j/k_j G_j) \dot{w}'_j(\eta, 0, t) \\
&\quad - E_j I_j w''_j(\eta, 0, t) \rangle \\
\mathbf{T}_j(\eta, 0, t) &= \psi\eta^2 \langle t_{j,1}, t_{j,2}, t_{j,3} \rangle \exp[i\omega\eta^2 t] \\
&= \langle -G_j J_j \theta'_j(\eta, 0, t), E_j I_j w'_j(\eta, 0, t), -E_j I_j v''_j(\eta, 0, t) \rangle \\
\mathbf{R}_j(\eta, 0, t) &= \eta \langle r_{j,1}, r_{j,2}, r_{j,3} \rangle \exp[i\omega\eta^2 t] \\
&= \langle \theta_j(\eta, 0, t), -w'_j(\eta, 0, t), v'_j(\eta, 0, t) \rangle
\end{aligned} \tag{4.4}$$

我们设计 $d_{j,i}$, $f_{j,i}$, $t_{j,i}$ 和 $r_{j,i}$ 使它们都是长度的单位。这就使我们把这 4 个矢量组成一个 12 维的矢量:

$$\mathbf{v}_j = (d_{j,1}, d_{j,2}, d_{j,3}, f_{j,1}, f_{j,2}, f_{j,3}, t_{j,1}, t_{j,2}, t_{j,3}, r_{j,1}, r_{j,2}, r_{j,3}) \in \mathbb{R}^{12}$$

在采用了这些新的变量以后, 我们可以看到下列关系

$$\begin{aligned}
v_j(\eta, x, t) &= \left[d_{j,2} g_{j,1}(\eta, x) - \frac{f_{j,2} g_{j,2}(\eta, x)}{\mu_j \phi_j} \right. \\
&\quad \left. - \frac{t_{j,3} g_{j,3}(\eta, x)}{\mu_j \phi_j} + \frac{r_{j,3} g_{j,4}(\eta, x)}{\mu_j} \right] \exp[i\omega\eta^2 t] \\
w_j(\eta, x, t) &= \left[d_{j,3} g_{j,1}(\eta, x) - \frac{f_{j,3} g_{j,2}(\eta, x)}{\mu_j \phi_j} \right. \\
&\quad \left. + \frac{t_{j,2} g_{j,3}(\eta, x)}{\mu_j \phi_j} - \frac{r_{j,2} g_{j,4}(\eta, x)}{\mu_j} \right] \exp[i\omega\eta^2 t] \\
u_j(\eta, x, t) &= \left[d_{j,1} \cos(\eta^2 x \gamma_j) + \frac{\gamma_j}{\phi_j \mu_j} f_{j,1} \eta \sin(\eta^2 x \gamma_j) \right] \exp[i\omega\eta^2 t] \\
\theta_j(\eta, x, t) &= \left[r_{j,1} \eta \cos(\eta^2 x \delta_j \gamma_j) - \frac{\delta_j}{2 \phi_j \gamma_j} t_{j,1} \sin(\eta^2 x \delta_j \gamma_j) \right] \exp[i\omega\eta^2 t]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

五、传递矩阵

(4.5) 式是以 λ 为特征频率的波动的一般解。这些方程还必须利用边界条件来求得一个 η 的方程。我们可以用 12×12 矩阵把 \mathbf{v}_j 和 \mathbf{v}_{j+1} 串联起来表示这种边界条件。我们称这种矩阵为传递矩阵。在每一接头上有这样一个矩阵, 为了简单起见, 我们让每一矩阵 M_j 代表结构的一个部份, 可以是整段杆长, 也可以是两杆中的夹角, 或一个质量, 或某一减振器。这样做法见 [17] 和 [18]。由于 \mathbf{v} 是一个行矢量, 把传递矩阵乘在这种矢量的右边, 我们得

$$\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{v}_j \cdot M_j$$

为了简化符号, 我们用 \mathbf{D}_j 表示 $\mathbf{D}_j(l_j, t) = \mathbf{D}_j(0, t)$, 同样, 我们用 \mathbf{D}_{j+1} 表示 $\mathbf{D}_{j+1}(0, t)$ 。也用同样的办法简化其它的矢量。

对于两杆间的夹角而言, 我们实质上用一个正交矩阵 A_j 来变换坐标系。我们假设 A_j 是

某些 a_j , b_j 和 c_j 所组成的表达式(3.4). 在新的坐标系中的位移矢量可以用 $D_{j+1}=D_j \cdot A_j$. 同样在转动后的新坐标系中, 新的矢量 $F_{j+1}=F_j \cdot A_j$. 因为 R_j 为老坐标中的转动轴, 所以在新的坐标系中, 这一轴可以写为 $R_j \cdot A_j$. 轴动量也相同, 所以 $R_{j+1}=R_j A_j$. 同样还有 $T_{j+1}=T_j \cdot A_j$. 于是, 关于两杆间夹角的传递矩阵为

$$M_j^{angle} = \begin{bmatrix} A_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_j \end{bmatrix}$$

虽然传递矩阵是用正交矩阵 A_j 表示的, 我们一般用矢量 $\langle a_j, b_j, c_j \rangle$ 来表示两杆间夹角, 所以 A_j 是用(3.4)式给出的.

减振器的传递矩阵也很简单. 我们在下面只研究四种类型接头:

I型: F 和 T 连续, 但 D 和 R 可以不连续

II型: D 和 T 连续, 但 F 和 R 可以不连续

III型: D 和 R 连续, 但 F 和 T 可以不连续

IV型: F 和 R 连续, 但 D 和 T 可以不连续

还有如某一种矢量的某一部分连续, 但另一部分不一定连续的许多类型. 把所有这许多排列计算在内, 共应有64种不同类型. 当然除了上述4种类型以外, 其它60种都不很有用. 它们的传递矩阵在需要时也是容易建立的.

现在让我们首先考虑III型接头, 它的传递矩阵是很易设计的. 图2为III型接头的—个特例. 阻尼系数为 K 的单个减振器装在杆件上 p 点, 并且该减振器的一端能自由转动, 另一端固定如图. 在静止位置, 从原点到接头 p 的矢量用 r 表示, 减振器的方向为 k , 它的大小为 \sqrt{K} . 我们将确定由球的转动和位移的影响所应有的边界条件.

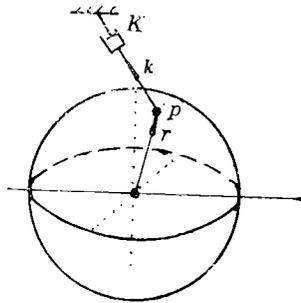


图 2

因为不论位移和转动在跨越接头时都是连续的, 我们有 $D_j=D_{j+1}$, $R_j=R_{j+1}$. 当接头以 \dot{D}_j 为位移速度运动时, 接点 p 的速度为 $\dot{D}_j k / \sqrt{K}$. 当球的转动速度为 \dot{R}_j 时, 则 p 的运动速度为 $\dot{R}_j \times r$. 于是减振器的压缩速度为 $k \cdot (\dot{R}_j \times r) / \sqrt{K} = \dot{R}_j \cdot (r \times k) / \sqrt{K}$. 减振器所受总力为 $[\dot{D}_j \cdot k + \dot{R}_j \cdot (r \times k)] \sqrt{K}$. 这一总力可以分成两部份: 接头中点所受的力 $k[\dot{D}_j \cdot k + \dot{R}_j \cdot (r \times k)]$, 和一个扭矩 $-(r \times k)[\dot{D}_j \cdot k + \dot{R}_j \cdot (r \times k)]$. 于是, 跨接点的力和扭矩的方程为

$$\begin{aligned} F_{j+1} &= F_j + k(\dot{D}_j \cdot k + \dot{R}_j \cdot (r \times k)) \\ T_{j+1} &= T_j - (r \times k)(\dot{D}_j \cdot k + \dot{R}_j \cdot (r \times k)) \end{aligned}$$

利用(3.5), 我们可证跨接头的能量变化为

$$-(\dot{D}_j \cdot k + \dot{R}_j \cdot (r \times k))^2 \leq 0$$

如果我们采用 3×3 矩阵

$$X_j = \frac{\omega}{\psi} k^* \cdot k, \quad Y_j = \frac{\omega}{\psi} (r \times k)^* \cdot k$$

$$Z_j = \frac{\omega}{\psi} (\mathbf{r} \times \mathbf{k})^* \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{k})$$

我们很易看到这些方程的一种型式。上式中 \mathbf{k}^* 为矢量 \mathbf{k} 的转置。接头的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_{j+1} &= \mathbf{D}_j, \quad \mathbf{R}_{j+1} = \mathbf{R}_j \\ \mathbf{F}_{j+1} &= \mathbf{F}_j + \frac{\psi}{\omega} \dot{\mathbf{D}}_j \cdot X_j + \frac{\psi}{\omega} \dot{\mathbf{R}}_j \cdot Y_j \\ \mathbf{T}_{j+1} &= \mathbf{T}_j - \frac{\psi}{\omega} \dot{\mathbf{D}}_j \cdot Y_j^* - \frac{\psi}{\omega} \dot{\mathbf{R}}_j \cdot Z_j \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

对于一般Ⅱ型接头而言，当由多个减振器组成时，其边界条件和 (5.1) 相同，但 X, Y, Z 必需是这些减振器的对应矩阵之和。能量必然是耗散的，这是所有这些矩阵的共同条件。用 (3.5) 式，我们求得跨越减振器时能量变率为

$$-\frac{\psi}{\omega} (\dot{\mathbf{D}}_j \quad \dot{\mathbf{R}}_j) \cdot \begin{pmatrix} X_j & Y_j^* \\ Y_j & Z_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\dot{\mathbf{D}}_j)^* \\ (\dot{\mathbf{R}}_j)^* \end{pmatrix}$$

对于所有矢量 $\dot{\mathbf{D}}_j, \dot{\mathbf{R}}_j$ 而言，上式必小于零， 6×6 矩阵

$$L_j = \begin{pmatrix} X_j & Y_j^* \\ Y_j & Z_j \end{pmatrix}$$

一定是正对称的。这就是说

$$L_j = L_j^* \text{ 和 } \omega L_j \omega^* \geq 0 \quad (\text{对所有矢量 } \omega \in \mathbb{R}^6) \quad (5.2)$$

我们称 L_j 为减振器的常量矩阵。

利用 (4.4) 式，我们求得Ⅲ型减振器的传递矩阵。(5.1) 式可以写成矩阵式

$$M_j^{\text{II}} = \begin{pmatrix} I & \frac{i}{\eta} X_j & -i Y_j^* & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & i Y_j & -i \eta Z_j & I \end{pmatrix}$$

其中， I 为 3×3 单位矩阵。

对于其它类型的接头而言，用类似的方法处理。I 型的一般接头有下列边界条件

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{j+1} &= \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{T}_{j+1} = \mathbf{T}_j \\ \dot{\mathbf{D}}_{j+1} &= \dot{\mathbf{D}}_j + \frac{\omega}{\phi} \mathbf{F}_j \cdot X_j + \frac{\omega}{\phi} \mathbf{T}_j \cdot Y_j \\ \dot{\mathbf{R}}_{j+1} &= \dot{\mathbf{R}}_j - \frac{\omega}{\phi} \mathbf{F}_j \cdot Y_j^* - \frac{\omega}{\phi} \mathbf{T}_j \cdot Z_j \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

还有 (5.2) 式也是适用的。传递矩阵为

$$M_j^{\text{I}} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ -i \eta X_j & I & 0 & i Y_j^* \\ -i Y_j & 0 & I & (i/\eta) Z_j \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

对于 II 型接头而言, 边界条件是

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}_{j+1} &= \dot{\mathbf{D}}_j, \quad \mathbf{T}_{j+1} = \mathbf{T}_j \\ \mathbf{F}_{j+1} &= \mathbf{F}_j + \frac{\psi}{\omega} \dot{\mathbf{D}}_j \cdot \mathbf{X}_j + \mathbf{T}_j \cdot \mathbf{Y}_j \\ \dot{\mathbf{R}}_{j+1} &= \dot{\mathbf{R}}_j - \dot{\mathbf{D}}_j \cdot \mathbf{Y}_j^* - \frac{\omega}{\psi} \mathbf{T}_j \cdot \mathbf{Z}_j \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

还有 (5.2) 式也适用. 这种接头的传递矩阵为

$$M_j^I = \begin{pmatrix} I & \frac{i}{\eta} X_j & 0 & -\frac{i}{\eta} Y_j^* \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta} Y_j & I & \frac{i}{\eta} Z_j \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

最后, 对 IV 型接头而言, 其边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{j+1} &= \mathbf{F}_j, \quad \dot{\mathbf{R}}_{j+1} = \dot{\mathbf{R}}_j \\ \dot{\mathbf{D}}_{j+1} &= \dot{\mathbf{D}}_j + \frac{\omega}{\psi} \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{X}_j + \dot{\mathbf{R}}_j \cdot \mathbf{Y}_j \\ \mathbf{T}_{j+1} &= \mathbf{T}_j - \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{Y}_j^* - \frac{\psi}{\omega} \dot{\mathbf{R}}_j \cdot \mathbf{Z}_j \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

还有 (5.2) 式也适用. 这种接头的传递矩阵为

$$M_j^V = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ -i\eta X_j & I & -\eta Y_j^* & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ \eta Y_j & 0 & -i\eta Z_j & I \end{pmatrix}$$

现在让我们计算有关某一杆长的传递矩阵. 我们可以利用 (4.5) 式, 建立 $\mathbf{D}_{j+1}(\eta, 0, t) = \mathbf{D}_j(\eta, l_j, t)$, $\mathbf{F}_j(\eta, l_j, t)$, $\mathbf{T}_j(\eta, l_j, t)$, $\mathbf{R}_j(\eta, l_j, t)$ 和 $\mathbf{D}_j(\eta, 0, t)$, $\mathbf{F}_j(\eta, 0, t)$, $\mathbf{T}_j(\eta, 0, t)$, 和 $\mathbf{R}_j(\eta, 0, t)$ 之间的关系, 我们得到下列方程

$$d_{j+1,1} = d_{j,1} \cos(\gamma_j l_j \eta^2) + \frac{\gamma_j \eta}{\phi_j \mu_j} f_{j,1} \sin(\gamma_j l_j \eta^2)$$

$$d_{j+1,2} = d_{j,2} g_{j,1}(\eta, l_j) - \frac{1}{\mu_j \phi_j} f_{j,2} g_{j,2}(\eta, l_j) - \frac{1}{\mu_j \phi_j} t_{j,3} g_{j,3}(\eta, l_j) + \frac{1}{\mu_j} r_{j,3} g_{j,4}(\eta, l_j)$$

$$d_{j+1,3} = d_{j,3} g_{j,1}(\eta, l_j) - \frac{1}{\mu_j \phi_j} f_{j,2} g_{j,2}(\eta, l_j) + \frac{1}{\mu_j \phi_j} t_{j,3} g_{j,3}(\eta, l_j) - \frac{1}{\mu_j} r_{j,2} g_{j,4}(\eta, l_j)$$

$$f_{j+1,1} = -\frac{\psi_j l_j}{r_j \eta} d_{j,1} \sin(\gamma_j l_j \eta^2) + f_{j,1} \cos(\gamma_j l_j \eta^2)$$

$$\begin{aligned}
f_{j+1,2} &= -\mu_j \phi_j d_{j,2} g_{j,0}(\eta, l_j) + f_{j,2} g_{j,1}(\eta, l_j) + t_{j,3} g_{j,2}(\eta, l_j) \\
&\quad - \phi_j r_{j,3} g_{j,3}(\eta, l_j) \\
f_{j+1,3} &= -\mu_j \phi_j d_{j,3} g_{j,0}(\eta, l_j) + f_{j,3} g_{j,1}(\eta, l_j) - t_{j,2} g_{j,2}(\eta, l_j) \\
&\quad + \phi_j r_{j,2} g_{j,3}(\eta, l_j) \\
t_{j+1,1} &= t_{j,1} \cos(\gamma_j \delta_j l_j \eta^2) + \frac{2\phi_j \gamma_j \eta}{\delta_j} r_{j,1} \sin(\gamma_j \delta_j l_j \eta^2) \\
t_{j+1,2} &= \phi_j d_{j,3} g_{j,3}(\eta, l_j) - \frac{1}{\mu_j} f_{j,3} g_{j,4}(\eta, l_j) + \frac{1}{\mu_j} t_{j,2} g_{j,5}(\eta, l_j) \\
&\quad - \frac{\phi_j}{\mu_j} r_{j,2} g_{j,6}(\eta, l_j) \\
t_{j+1,3} &= -\phi_j d_{j,2} g_{j,3}(\eta, l_j) + \frac{1}{\mu_j} f_{j,2} g_{j,4}(\eta, l_j) + \frac{1}{\mu_j} t_{j,3} g_{j,5}(\eta, l_j) \\
&\quad - \frac{\phi_j}{\mu_j} r_{j,3} g_{j,6}(\eta, l_j) \\
r_{j+1,1} &= -\frac{\delta_j}{2\phi_j \gamma_j \eta} t_{j,1} \sin(\gamma_j \delta_j l_j \eta^2) + \gamma_{j,1} \cos(\gamma_j \delta_j l_j \eta^2) \\
r_{j+1,2} &= -d_{j,3} g_{j,2}(\eta, l_j) + \frac{1}{\mu_j \phi_j} f_{j,3} g_{j,3}(\eta, l_j) - \frac{1}{\mu_j \phi_j} t_{j,2} g_{j,4}(\eta, l_j) \\
&\quad + \frac{1}{\mu_j} r_{j,2} g_{j,5}(\eta, l_j) \\
r_{j+1,3} &= d_{j,2} g_{j,2}(\eta, l_j) - \frac{1}{\mu_j \phi_j} f_{j,2} g_{j,3}(\eta, l_j) - \frac{1}{\mu_j \phi_j} t_{j,3} g_{j,4}(\eta, l_j) \\
&\quad + \frac{1}{\mu_j} r_{j,3} g_{j,5}(\eta, l_j)
\end{aligned}$$

这些关系可以写成矩阵形式， M_j^{length} 传递矩阵为（见下页）

为节省篇幅，下标 j 均未写出。

系统中刚体质量的传递矩阵是很易计算的。设作用在某一点的质量为 m_j ，12个方程式中的9个是由下式决定的

$$D_{j+1} = D_j, \quad R_{j+1} = R_j, \quad \text{和} \quad F_{j+1} = F_j + m_j \ddot{D}_j$$

正如通常在杆件中处理质量一样，假定对于通过梁轴的任意平面，该质量具有相同的惯性矩。于是，设 A_j 为质量的截面面积， I_j 为通过任一这些平面上的惯性矩，则其极矩为 $2I_j$ 。对 x 轴而言，扭矩为

$$T_{j+1,1} = T_{j,1} - m_j \frac{2I_j}{A_j} \ddot{R}_{j,1}$$

对于其它两轴而言，还应该考虑由于杆件的质量在接头点上产生的剪力。于是，我们有

$$T_{j+1,2} = T_{j,2} - m_j \frac{I_j}{A_j} \left(1 + \frac{E_j}{k_j G_j} \right) \ddot{R}_{j,2}$$

$$T_{j+1,3} = T_{j,3} - m_j \frac{I_j}{A_j} \left(1 + \frac{E_j}{k_j G_j} \right) \ddot{R}_{j,3}$$

其中 E_j ， k_j ， G_j 为把质量连接在杆件的材料常量。在许多情况下，这一项是可以略去的。

从这些关系式中，我们求得某一质量的传递矩阵为（见689页）

其中 $c_j = 1 + E_j / (k_j G_j)$, 是由质量和杆件的接头材料所决定的。

最后, 结构的两个端点条件应该写成矩阵, 其内容视终端是固定、自由或铰支而定。在三维问题中, 铰支可以看作杆件的端点是一种球和承窝相连接, 这样的结构终点条件为

$$\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{M}_n = 0$$

其中

$$M_n^{\text{clamped}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad M_n^{\text{free}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_n^{\text{pinned}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

还有一种终点边界条件是终点和减振器接在一起, 边界调节器在[12]中就是一种联合的终点条件, 其中可以用Ⅲ型减振器紧接着一个自由端。

把所有矩阵合在一起, 我们得

$$\mathbf{v}_1 (M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdots M_n) = 0$$

这些方程是有12个待定量的6个方程。其余6个方程来自初始端点条件是固定的, 这一条件可以写成 $\mathbf{v}_1 \cdot M_1^{\text{clamped}} = 0$ 。这就是说, $\mathbf{D}_1 = \mathbf{R}_1 = 0$, 这说明, 只有 $(M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdots M_n)$ 的 \mathbf{F}_j 和 \mathbf{T}_j 的有关纵列才是重要的。可以用下式表示

$$M_0^{\text{clamped}} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}$$

于是, 当且仅当

$$\det(M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdots M_n) = 0 \quad (5.6)$$

时, 被动方程有非平凡解。

设 $G = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdots M_n$ 。于是, 只要 η 是 $\det(G) = 0$ 的一个解, 则 $\lambda = i\eta^2$ 一定是结构特征频率。

六、渐近估计

我们从 G 的行列式等于零的计算中, 经常得到复杂的超越函数。除了最简单的情况外, 我们很难得到精确解。于是, 可以采用渐近技术求得 $|\eta|$ 较大时的近似解。

我们可以用 $\det(G)$ 的特性来研究矩阵 M_j :

引理6.1 假定结构并不具有任何Ⅳ型接头。如 η_k 是 $\det(G) = 0$ 的一序列的解, 并有 $|\eta_k| \rightarrow 0$ 的性质, 则 $\text{Im}(\eta_k) = O(1/\eta_k)$ 。

证明 我们应该注意到, 杆长矩阵、角矩阵和终端矩阵等矩阵, 只要 η 是实数时, 都是实数矩阵。我们可以表示为 $M_j(\bar{\eta}) = \overline{M_j(\eta)}$ 。这对于接头矩阵并不适用, 但是对Ⅰ型、Ⅱ型或Ⅲ型接头的矩阵而言, 只要 η 是实数, 最高阶 η 的接头矩阵不是实数就是纯虚数。于是, 如果结构中只有三种类型的接头, 而且只要 η 是实数, 则最高阶 η 的 G 的行列式也就是实数的。所以, 方程式 $\det(G) = 0$ 在用 η 除所得商可以渐近地写成

$$f(\eta) \sim h(\eta)/\eta \quad \text{当 } |\eta| \rightarrow \infty$$

这里 $f(\bar{\eta}) = \overline{f(\eta)}$, 而且 $h(\eta)$ 和 $f(\eta)$ 同阶。

最高阶的 η_k 是 $f(\eta)$ 的诸根。设 $\det(G) = 0$ 的解组成一个序列, 而且 $\text{Im}(\eta_k) \gg 1/\eta_k$ 。于是, $f(\eta)$ 的有关根的虚数部份 $\gg 1/\eta_k$ 。不过, $f(\eta)$ 的根是成对的共轭数。假如 $f(\eta)$ 有一个带正虚部的根, 则也必有带负虚部的根。由于虚数部份的大小应 $\gg 1/\eta_k$, 则 $\det(G) = 0$ 必有一对

的负虚数部份的根。假如这是一种情况，则特征频率 $\lambda = i\eta^2$ 必有一正实数部份，这是不可能的，这是违反减振器是耗散能量的假定的。所以， $\det(G) = 0$ 的解必有

$$\text{Im}(\eta_k) = O(1/\eta_k) \quad \square$$

由此引理， $\lambda_k = i\eta_k^2$ 的实数部份的量级为 1。所以对于一切特征频率而言，必有一个 M 值，它满足 $-M \leq \text{Re}(\lambda_k) \leq 0$ 。这表明 $\sin(\gamma_j l_j \eta^2)$ ， $\cos(\gamma_j l_j \eta^2)$ ， $\sin(\gamma_j \delta_j l_j \eta^2)$ ， $\cos(\gamma_j \delta_j l_j \eta^2)$ 都是以 1 为量级的。

由于杆件长度的矩阵是用 $g_{j,0}(\eta, l_j)$ 和它的导数来表示的，自然我们应研究在 η 较大时这一函数的渐近状态。显然，在 η 较大时，它有两种可能的渐近状态，其一是当 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时， $\eta^4 \gg 1/\varepsilon_j^2 \mu_j$ ，另一是当 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时， $1 \ll \eta^4 \ll 1/\varepsilon_j^2 \mu_j$ 。这两种形态之间有一层边界层，在这边界层中 $\eta^4 = O(1/\varepsilon_j^2 \mu_j)$ 。

函数 $\sin(\gamma_j l_j \eta^2)$ ， $\cos(\gamma_j l_j \eta^2)$ ， $\sin(\gamma_j \delta_j l_j \eta^2)$ ， $\cos(\gamma_j \delta_j l_j \eta^2)$ 是否有渐近状态的变化，完全取决于 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时，是不是有 $\eta^2 \ll 1/\gamma_j l_j$ 的性质。

我们将称当 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时 $\eta^4 \gg 1/\varepsilon_j^2 \mu_j$ 的情况为**很高特征频率**。在这一范围的频率中，我们有可能对 $g_{j,0}(\eta, l_j)$ 进行渐近估计，用这一估计办法，我们可以大大简化杆长矩阵。

我们还要定义**高特征频率**，这是当 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时， $\eta^4 = O(1/\varepsilon_j^2 \mu_j)$ 。这些频率可以作为两种不同频率范围中的一个边界层。

让我们定义**中特征频率**，它们是当 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时， $1 \ll \eta^4 \ll 1/\varepsilon_j^2 \mu_j$ ，但 $\eta^2 \gamma_j l_j$ 并不很小。在这个频率范围内， ε_j 对决定频率的初步近似值不产生影响。所以，我们可以让 $\varepsilon_j \rightarrow 0$ ，这一举措相当于用欧拉-伯努利方程替代铁木辛柯方程。因为 $\eta^2 \gamma_j l_j$ 并不小，所以扭转振动和纵向振动仍然影响在这一频率范围内的频率计算。

我们还要定义**低特征频率**，在这一频率范围内，当 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时， $1 \ll \eta^2 \ll 1/\gamma_j l_j$ 。这相当于说 $\eta^4 \ll 1/\varepsilon_j^2 \mu_j$ ，所以，在 $\varepsilon_j \rightarrow 0$ 时，也相当于用欧拉-伯努利方程替代铁木辛柯方程。但是在这一范围内，我们有 $\eta^2 \gamma_j l_j \ll 1$ ，于是 $\eta^2 \gamma_j \delta_j l_j \ll 1$ ，所以我们可以让 $\gamma_j \rightarrow 0$ 。这相当于可以略去扭转振动和纵向振动的效应。在 [13] 和 [17] 中，这一范围中的特征频率是以多种特征频率“串滴”形式出现的。我们发现当进入较高频率范围时，这种“串滴”形式的特征频率逐步消失了。

最后，在 $\eta = O(1)$ 中，我们定义**很低特征频率**。在这种频率范围内，我们找不到渐近特性，所以在很低特征频率范围内，我们只能用数值计算法求解方程 (5.6) 式，从而求得精确的频率值。幸运的是，不能用渐近法求得近似值的，只有一两种频率。

很显然，在各种不同的频率范围中，只能采用不同办法进行分析计算。这里应指出，在较低和中间的特征频率范围内， $p_j(\eta) \sim q_j(\eta) \sim \sqrt{\mu_j}$ ，于是有

$$g_{j,0}(\eta, x_j) \sim \mu_j^{-1/4} \left(\frac{\sinh(\eta x \mu_j^{1/4}) + \sin(\eta x \mu_j^{1/4})}{2} \right)$$

采用 [17] 中所用符号，这可以写成 $g_{j,0}(\eta, x) \sim \mu_j^{-1/4} \text{Hyd}(\eta x \mu_j^{1/4})$ 。矩阵 M_j^{length} 可以简化为三维形式的矩阵，见 [18]。在这一文献中，进行了大量的分析计算，包括使用了外矩阵。当然，这种外矩阵都是很大的。

对很高特征频率，可以进行很不相同的分析。对 $\eta^4 \gg 1/\varepsilon_j^2 \mu_j$ 而言，我们有

$$p_j(\eta) \sim \eta \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} + \frac{1}{2\eta^8 \sqrt{\varepsilon_j^3 \mu_j}} - \frac{5}{8\eta^7 \sqrt{\varepsilon_j^3 \mu_j^3}} + O\left(\frac{1}{\eta^{11} \sqrt{\varepsilon_j^{11} \mu_j^5}}\right)$$

的负虚数部份的根。假如这是一种情况，则特征频率 $\lambda = i\eta^2$ 必有一正实数部份，这是不可能的，这是违反减振器是耗散能量的假定的。所以， $\det(G) = 0$ 的解必有

$$\text{Im}(\eta_k) = O(1/\eta_k) \quad \square$$

由此引理， $\lambda_k = i\eta_k^2$ 的实数部份的量级为 1。所以对于一切特征频率而言，必有一个 M 值，它满足 $-M \leq \text{Re}(\lambda_k) \leq 0$ 。这表明 $\sin(\gamma_j l_j \eta^2)$ ， $\cos(\gamma_j l_j \eta^2)$ ， $\sin(\gamma_j \delta_j l_j \eta^2)$ ， $\cos(\gamma_j \delta_j l_j \eta^2)$ 都是以 1 为量级的。

由于杆件长度的矩阵是用 $g_{j,0}(\eta, l_j)$ 和它的导数来表示的，自然我们应研究在 η 较大时这一函数的渐近状态。显然，在 η 较大时，它有两种可能的渐近状态，其一是当 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时， $\eta^4 \gg 1/\varepsilon_j^2 \mu_j$ ，另一是当 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时， $1 \ll \eta^4 \ll 1/\varepsilon_j^2 \mu_j$ 。这两种形态之间有一层边界层，在这边界层中 $\eta^4 = O(1/\varepsilon_j^2 \mu_j)$ 。

函数 $\sin(\gamma_j l_j \eta^2)$ ， $\cos(\gamma_j l_j \eta^2)$ ， $\sin(\gamma_j \delta_j l_j \eta^2)$ ， $\cos(\gamma_j \delta_j l_j \eta^2)$ 是否有渐近状态的变化，完全取决于 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时，是不是有 $\eta^2 \ll 1/\gamma_j l_j$ 的性质。

我们将称当 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时 $\eta^4 \gg 1/\varepsilon_j^2 \mu_j$ 的情况为**很高特征频率**。在这一范围的频率中，我们有可能对 $g_{j,0}(\eta, l_j)$ 进行渐近估计，用这一估计办法，我们可以大大简化杆长矩阵。

我们还要定义**高特征频率**，这是当 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时， $\eta^4 = O(1/\varepsilon_j^2 \mu_j)$ 。这些频率可以作为两种不同频率范围中的一个边界层。

让我们定义**中特征频率**，它们是当 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时， $1 \ll \eta^4 \ll 1/\varepsilon_j^2 \mu_j$ ，但 $\eta^2 \gamma_j l_j$ 并不很小。在这个频率范围内， ε_j 对决定频率的初步近似值不产生影响。所以，我们可以让 $\varepsilon_j \rightarrow 0$ ，这一举措相当于用欧拉-伯努利方程替代铁木辛柯方程。因为 $\eta^2 \gamma_j l_j$ 并不小，所以扭转振动和纵向振动仍然影响在这一频率范围内的频率计算。

我们还要定义**低特征频率**，在这一频率范围内，当 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时， $1 \ll \eta^2 \ll 1/\gamma_j l_j$ 。这相当于说 $\eta^4 \ll 1/\varepsilon_j^2 \mu_j$ ，所以，在 $\varepsilon_j \rightarrow 0$ 时，也相当于用欧拉-伯努利方程替代铁木辛柯方程。但是在这一范围内，我们有 $\eta^2 \gamma_j l_j \ll 1$ ，于是 $\eta^2 \gamma_j \delta_j l_j \ll 1$ ，所以我们可以让 $\gamma_j \rightarrow 0$ 。这相当于可以略去扭转振动和纵向振动的效应。在 [13] 和 [17] 中，这一范围中的特征频率是以多种特征频率“串滴”形式出现的。我们发现当进入较高频率范围时，这种“串滴”形式的特征频率逐步消失了。

最后，在 $\eta = O(1)$ 中，我们定义**很低特征频率**。在这种频率范围内，我们找不到渐近特性，所以在很低特征频率范围内，我们只能用数值计算法求解方程 (5.6) 式，从而求得精确的频率值。幸运的是，不能用渐近法求得近似值的，只有一两种频率。

很显然，在各种不同的频率范围中，只能采用不同办法进行分析计算。这里应指出，在较低和中间的特征频率范围内， $p_j(\eta) \sim q_j(\eta) \sim \sqrt{\mu_j}$ ，于是有

$$g_{j,0}(\eta, x_j) \sim \mu_j^{-1/4} \left(\frac{\sinh(\eta x \mu_j^{1/4}) + \sin(\eta x \mu_j^{1/4})}{2} \right)$$

采用 [17] 中所用符号，这可以写成 $g_{j,0}(\eta, x) \sim \mu_j^{-1/4} \text{Hyd}(\eta x \mu_j^{1/4})$ 。矩阵 M_j^{length} 可以简化为三维形式的矩阵，见 [18]。在这一文献中，进行了大量的分析计算，包括使用了外矩阵。当然，这种外矩阵都是很大的。

对很高特征频率，可以进行很不相同的分析。对 $\eta^4 \gg 1/\varepsilon_j^2 \mu_j$ 而言，我们有

$$p_j(\eta) \sim \eta \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} + \frac{1}{2\eta^8 \sqrt{\varepsilon_j^3 \mu_j}} - \frac{5}{8\eta^7 \sqrt{\varepsilon_j^3 \mu_j^3}} + O\left(\frac{1}{\eta^{11} \sqrt{\varepsilon_j^{11} \mu_j^5}}\right)$$