

实心矩形截面杆的初始塑性后屈曲*

程尧舜 卢文达 方红

(同济大学结构学院 上海 200092) (华东工业大学机械系 上海 200093)

摘 要

文中用一种新的方法分析了简支受压矩形截面杆的塑性初始后屈曲问题, 求出了后屈曲摄动展开式中的高阶项。所用的方法在某些方面类似于 Hutchinson 的方法, 但是由于避免了一般奇异摄动中所必需的坐标伸长, 因此大大简化了分析过程。从整个求解过程可以看出, 本文所提出的方法可用于分析一般板壳结构的塑性初始后屈曲问题。

关键词 塑性后屈曲 摄动 矩形截面杆

一、引 言

结构在弹性阶段出现的后屈曲问题现已得到了充分的研究。结构在塑性阶段出现的屈曲和后屈曲问题, 由于弹性卸载的出现, 显得极其复杂。Hill (1958)^[2]建立了塑性分叉的一般理论 (不包括光滑分叉)。Hutchinson (1973, 1974)^[3,4]在 Hill 理论的基础上建立了相当广泛的初始塑性后分叉理论。他选用分叉模态的幅值作为摄动参数, 整个理论基本上类似于 Koiter 的初始弹性后屈曲理论。由于需要考虑弹性卸载区的扩展, Hutchinson 引进伸长坐标来分析卸载区附近的边界层, 所得到的后屈曲展开式中具有模态幅值的分数次幂的项, 整个分析过程相当复杂, 而且很难得到更高阶的项。Nguyen (1987)^[5]及 Nguyen 和 Triantafyllidis (1989)^[6]引进广义标准材料法来分析塑性分叉和后分叉, 分析过程相对比较简单, 但只能用于小应变的情况, 而且要求出高阶项是相当困难的。苏旭明和卢文达 (1991)^[9]提出了另外一种分析塑性初始后分叉的方法, 用这一方法可以求出较高阶的项, 但是也需要引进伸长坐标, 在求得内外场解后还需要匹配, 计算很复杂。用 Nguyen 和 Triantafyllidis、苏和卢的方法求得的后分叉表达式都是时间参数的整数次幂级数形式的。

在塑性后分叉的实际问题研究中, 讨论得最多的是受压杆的塑性后屈曲问题。Hutchinson (1973, 1974)^[3,4], Akel, Nguyen 和 Stolz (1985)^[1]及苏旭明 (1988)^[8]都讨论过这一问题。他们都只求出后屈曲展开式中的前三项。

本文将通过分析简支受压矩形截面杆的塑性初始后屈曲问题, 来介绍一种新的分析塑性

* 国家自然科学基金资助课题

1994年12月1日收到。

后分叉的方法。显然塑性屈曲开始后，弹塑性交界面的演化控制着整个后屈曲过程，因此所选择的时间参数必须能够描述弹塑性交界面的演化。尤其是弹塑性交界面的运动速度必须是有限的。另一方面，外载荷必定能够表示成某一时间参数的正整数次幂的级数形式。当然应力、应变和位移这些场量不一定能表示成时间参数的幂级数，因为它们的各阶率有可能在某个曲面上是间断的（在一般情况下这种间断面是运动曲面）。所以要求出应力等的渐近表达式，必须引进伸长坐标。但是位移的前几阶率有可能是连续的。如果我们只要求外载荷的渐近展开式，就完全有可能避免卸载区附近的边界层分析。本文正是基于这样的思想来分析受压杆的后屈曲的。从后面的具体讨论可以看出，本文的方法是很简单的而且可以用于分析一般的板壳塑性后分叉问题。我们求得了后分叉展开式中的前四项。

二、基本方程

要讨论的矩形截面杆如图1所示。\$2c\$为杆截面的宽、\$2b\$为截面的高，\$c < b\$，\$L\$为杆长。所用的坐标为随体坐标，坐标原点位于杆的形心。杆两端简支受压力\$P\$作用。形心轴上的点沿纵向和横向位移分别用\$u\$和\$w\$表示。近似的拉格朗日应变可表示成

$$\varepsilon = u' - zw'' + (w')^2/2 \quad (2.1)$$

其中\$(\quad)'\$表示对坐标\$x\$求导。杆两端简支且规定下端的纵向位移为零，即

$$w(-L/2) = w(L/2) = 0, \quad u(-L/2) = 0 \quad (2.2)$$

虚功方程可写成

$$\int_{\Omega} \sigma \delta \varepsilon d\Omega = -P \delta u \Big|_{x=-L/2} \quad (2.3)$$

$$\delta \varepsilon = \delta u' - z \delta w'' + w' \delta w' \quad (2.4)$$

其中\$\Omega\$表示杆的参考构形所占的空间区域，\$\sigma\$

为第二类 Piola-Kirchhoff 应力。假定受压杆在弹性阶段没有屈曲。在塑性阶段的应力率和应变率之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma} &= E_s \dot{\varepsilon} && \text{当 } \dot{\varepsilon} < 0 \\ \dot{\sigma} &= E_t \dot{\varepsilon} && \text{当 } \dot{\varepsilon} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

其中\$(\dot{\quad})\$表示对时间参数\$t\$求导，\$E\$是弹性模量，\$E_s\$是切线模量。假定\$E\$是常量，\$E_s\$是应力的函数。

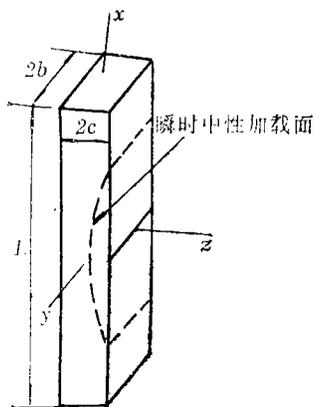


图1 简支受压矩形截面杆

三、临界载荷及屈曲模态

取屈曲开始时刻的构形为参考构形。适当选定某一时间参数\$t\$后，设\$P\$，\$w\$和\$u\$有如下展开式

$$P - P_c = \frac{1}{n!} P_n t^n + \frac{1}{(n+1)!} P_{n+1} t^{n+1} + \dots \quad (3.1)$$

$$w = \frac{1}{n!} w_n t^n + \frac{1}{(n+1)!} w_{n+1} t^{n+1} + \dots \quad (3.2)$$

$$u = \frac{1}{n!} u_n t^n + \frac{1}{(n+1)!} u_{n+1} t^{n+1} + \dots \quad (3.3)$$

在上面的展开式中，已经假定在屈曲开始的时刻 $t=0$ ， P_0 是临界载荷，相应的临界应力记为 σ_0 ， n 为正整数。 n 的具体选定应使高阶率边值问题的解存在，也就是说应使我们能构造出 w_{n+1} ， w_{n+2} ， u_{n+1} ， P_{n+1} 等等。容易证明可以取 $n=5$ 。现在进一步假定，当应力在 σ_0 附近，对塑性加载， E_t 可展开成

$$E_t = E_t^0 + \left(\frac{dE_t}{d\sigma} \right)_0 (\sigma - \sigma_0) + O((\sigma - \sigma_0)^2) \quad (3.4)$$

E_t^0 和 $(dE_t/d\sigma)_0$ 分别表示应力为 σ_0 时的 E_t 和 $dE_t/d\sigma$ 。

由 Shanley (1947)^[7] 的分析可知，在屈曲刚开始的时刻，杆中没有卸载出现。用 ε_5 表示 $t=0$ 时的各阶应变率。由于 $\varepsilon_n=0$ 对 $n \leq 4$ ，所以 $\varepsilon_5 \leq 0$ 。对虚功方程 (2.3) 的两边求关于时间的 5 阶导数，然后令 $t=0$ 可得

$$\int_{\Omega} [E_t^0 \varepsilon_5 (\delta u' - z \delta w'') + \sigma_0 w_5' \delta w'] d\Omega = -P_0 \delta u \Big|_{z=L/2} \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_5 = u_5' - z w_5'' \quad (3.6)$$

从方程 (3.5) 及边界条件 (2.2) 可求出 5 阶率问题的解

$$w_5 = \alpha_5 c \cos(\pi x/L) \quad (3.7)$$

$$u_5 = \beta_5 (x+L/2) \quad (3.8)$$

$$P_5 = -K\beta_5 \quad (3.9)$$

$$\sigma_0 = -\frac{1}{3} \alpha^2 E_t^0 \quad (3.10)$$

$$P_0 = \frac{1}{3} K \alpha^2 \quad (3.11)$$

其中， $K=4bcE_t^0$ ， $\alpha=\pi c/L$ ， P_0 就是切线模量载荷， α_5 和 β_5 是两个待定常数。弹性卸载无论在 $z=c$ 或 $z=-c$ 表面上的一条线上开始出现，分析过程都是相同的。在此假定卸载先在 $z=c$ 这面上的一条线上出现。由 Hutchinson (1973)^[13] 的讨论可知

$$\max(\varepsilon_5) = (u_5' - c w_5'') \Big|_{x=0} = \beta_5 + \alpha_5 \alpha^2 = 0 \quad (3.12)$$

取 $\alpha_5=1$ ，则由上式求出 $\beta_5 = -\alpha^2$ 。所以最后得

$$w_5 = c \cos(\pi x/L) \quad (3.13)$$

$$u_5 = -\alpha^2 (x+L/2) \quad (3.14)$$

$$P_5 = K \alpha^2 = 3P_0 \quad (3.15)$$

由式 (3.12) 可知，卸载在 $z=c$ ， $x=0$ 这一条线上开始出现，然后卸载区随着 t 的增大扩展成一个体积有限的区域。

四、6 到 9 阶率问题解的形式

在 t 大于零时，弹性卸载区和塑性加载区的交界面（即中性加载面）的方程可以写成 $\dot{\varepsilon}=0$ 或 $\dot{\varepsilon}/t^4=0$ 。利用式 (3.2) 和 (3.3) 得

$$0 = \frac{1}{4!} (u_5^i - zw_5'') + \frac{1}{5!} (u_5^i - zw_5'')t + \frac{1}{6!} (u_5^i - zw_5'')t^2 + \frac{1}{7!} (u_5^i - zw_5'')t^3 + \frac{1}{8!} (u_5^i - zw_5'')t^4 + o(t^4) \quad (4.1)$$

当 t 趋于零时, 中性加载面缩成直线 $x=0, z=c$ 。当 t 大于零时, 中性加载面(4.1)和 $z=c$ 表面相交于两条直线(见图1), 记这两条直线的 x 坐标分别为 x_1 和 $-x_1, x_1 > 0$ 。固定 $z=c$, 把 x_1 看成时间 t 的函数, 相对于 t , 对方程(4.1)两边求导数, 利用(3.13)和(3.14)可得

$$\frac{1}{4!} \left[\pm \left(\frac{\pi}{L} \right)^3 c^2 \left(\sin \frac{\pi x}{L} \right) \dot{x}_1 \right] + \frac{1}{5!} (u_5^i - cw_5'') + O(t) = 0 \quad (4.2)$$

令 t 趋于零, 则由于 t 为零时中性加载面缩成直线 $x=0, z=c$, 从上式可得

$$(u_5^i - cw_5'') \Big|_{z=c} = 0 \quad (4.3)$$

杆截面 $x=0$ 和中性加载面(4.1)交于一条直线上, 记这一直线的 z 坐标为 z_1 。固定 $x=0$, 把 z_1 看成 t 的函数, 对(4.1)求一次时间导数, 令 $t \rightarrow 0$, 得

$$\frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 c \dot{z}_1(0) + \frac{1}{5!} (u_5^i - cw_5'') \Big|_{z=0} = 0 \quad (4.4)$$

从式(4.3)和(4.4)得

$$\dot{z}_1(0) = 0 \quad (4.5)$$

由上面的讨论可知 x_1 的阶是 t , z_1 的阶至少是 t^2 。以 Ω_u 表示已经卸载的区域, 则我们有

$$\int_{\Omega_u} d\Omega = O(t^3) \quad (4.6)$$

对方程(2.3)求时间导数, 利用本构关系(2.5)得

$$\int_{\Omega_u} (E \dot{\varepsilon} \delta \varepsilon + \sigma \dot{w}' \delta w') d\Omega - \int_{\Omega_u} (E_t \dot{\varepsilon} \delta \varepsilon + \sigma w' \delta w') d\Omega + \int_{\Omega} (E_t \dot{\varepsilon} \delta \varepsilon + \sigma w' \delta w') d\Omega = -\dot{P} \delta u \Big|_{x=L/2} \quad (4.7)$$

上式中第一个积分中出现的 σ 对 t 的导数若用 $\dot{\varepsilon}$ 来表示, 要用(2.5)中的第二式; 第二和第三个积分中 σ 对 t 的导数若用 $\dot{\varepsilon}$ 来表示, 则要用(2.5)中的第一式。对方程(4.7)两边求5次时间导数, 令 $t \rightarrow 0$, 利用式(3.1)、(3.2)、(3.3)和(4.6)得

$$\int_{\Omega} [E_5^c \varepsilon_5 (\delta u' - z \delta w'') + \sigma_5 w_5' \delta w'] d\Omega = -P_5 \delta u \Big|_{x=L/2} \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_5 = u_5^i - zw_5'' \quad (4.9)$$

(4.3)、(4.8)及(4.9)和(3.12)、(3.5)及(3.6)是完全相同的, 对应的边界条件也相同。因此它们的解也至多相差一个常数因子。把 $t^5/5!$ 看成模态幅值, 则 $w_i (i > 5)$ 和 w_5 必须满足某一正交条件。规定下面的正交条件

$$\int_{-L/2}^{L/2} w_5 w_i dx = 0, \quad i \geq 6 \quad (4.10)$$

利用(4.10)可得

$$w_5 = u_5 = 0, \quad P_5 = 0 \quad (4.11)$$

对方程(4.7)两边求6次时间导数, 令 t 趋于零, 可得

$$\int_{\Omega} [E_6^c \varepsilon_6 (\delta u' - z \delta w'') + \sigma_6 w_6' \delta w'] d\Omega = -P_6 \delta u \Big|_{x=L/2} \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_6 = u_6^i - zw_6'' \quad (4.13)$$

用边界条件(2.2)及正交条件(4.10), 可求出(4.12)的解为

$$w_7 = 0 \tag{4.14}$$

$$u_7 = \beta_7(x + L/2) \tag{4.15}$$

$$P_7 = -K\beta_7 \tag{4.16}$$

类似地, 可求出8阶和9阶问题的解如下

$$w_8 = 0 \tag{4.17}$$

$$u_8 = \beta_8(x + L/2) \tag{4.18}$$

$$P_8 = -K\beta_8 \tag{4.19}$$

$$w_9 = 0 \tag{4.20}$$

$$u_9 = \beta_9(x + L/2) \tag{4.21}$$

$$P_9 = -K\beta_9 \tag{4.22}$$

表达式(4.14)~(4.22)中出现的 β_7 , β_8 和 β_9 是待定的常数, 在下一节中我们将用更高阶问题的平衡方程来把它们确定出来. 我们打算去求解 w_{10} 等这样的高阶问题的解, 且按展开式(3.1)~(3.3)的形式也只能确定到 t^9 的项.

五、因子 β_7, β_8 和 β_9 的确定

引入无量纲变量及参数

$$\xi = \frac{\pi x}{L}, \quad \eta = \frac{z}{c}, \quad \rho_7 = \frac{4!}{6!} \frac{\beta_7}{\alpha^2}, \quad \rho_8 = \frac{4!}{7!} \frac{\beta_8}{\alpha^2}, \quad \rho_9 = \frac{4!}{8!} \frac{\beta_9}{\alpha^2} \tag{5.1}$$

利用(3.13)~(3.15)、(4.11)、(4.14)、(4.18)、(4.15)、(4.17)、(4.20)和(4.21), 中性加载面方程(4.1)可写成

$$0 = -1 + \eta \cos \xi + \rho_7 t^2 + \rho_8 t^3 + \rho_9 t^4 + o(t^4) \tag{5.2}$$

把 $\xi_1 = \pi x_1/L$ 展开如下

$$\xi_1 = B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3 + o(t^3) \tag{5.3}$$

在式(5.2)中, 令 $\eta = 1$, 利用式(5.3)可得 B_i 和 ρ_i 的如下关系式

$$B_1 = \sqrt{2\rho_7}, \quad B_2 = \rho_8/B_1, \quad B_3 = (\rho_9 - B_2^2/2 + B_1^4/4)/B_1 \tag{5.4}$$

在(4.7)的前二个积分中, 取 $\delta u = 0$, $\delta w = w_6$, 利用有关式子可得

$$\begin{aligned} f &= \int_{\Omega_u} (E \delta \varepsilon + \sigma w' \delta w') d\Omega - \int_{\Omega_u} (E_i \delta \varepsilon + \sigma w' \delta w') d\Omega \\ &= (E - E_i) \int_{\Omega_u} \varepsilon \delta \varepsilon d\Omega + o(t'') \\ &= \frac{bc^2(E - E_i)}{4!} \alpha^3 t^4 \int_0^{\xi_1} \int_{\eta_2}^1 (-1 + \eta \cos \xi + \rho_7 t^2 + \rho_8 t^3 + \rho_9 t^4) \eta \cos \xi d\eta d\xi \end{aligned} \tag{5.5}$$

上面的积分限 η_2 由式(5.2)确定, 即

$$\eta_2 = \frac{1}{\cos \xi} (1 - \rho_7 t^2 - \rho_8 t^3 - \rho_9 t^4) + o(t^4) \tag{5.6}$$

由此可算出 f 如下

$$f = \frac{bc^2(E - E_i)}{36} \alpha^3 \left\{ \frac{2}{5} B_1^5 t^9 + 2B_1^4 B_2 t^{10} \right.$$

$$+\left(3B_1^3 B_2^2 + 2B_1^3 \rho_0 - \frac{1}{20} B_1^7\right) t^{11} \} + o(t^{11}) \quad (5.7)$$

取 $\delta u = 0$, $\delta w = w_5$, 然后对方程(4.7)分别求9次、10次和11次时间导数, 令 $t=0$ 得

$$\int_{\Omega} (E_i^c z^2 w_{10}'' w_5'' + \sigma_0 w_{10}^i w_5^i) d\Omega - 504 E_i^c b c L \alpha^4 (1+q) = - \frac{d^9 f}{dt^9} \Big|_{t=0} \quad (5.8)$$

$$\int_{\Omega} (E_i^c z^2 w_{11}'' w_5'' + \sigma_0 w_{11}^i w_5^i) d\Omega = - \frac{d^{10} f}{dt^{10}} \Big|_{t=0} \quad (5.9)$$

$$\int_{\Omega} (E_i^c z^2 w_{12}'' w_5'' + \sigma_0 w_{12}^i w_5^i) d\Omega + 1584 E_i^c b c L \alpha^2 \beta_7 (1+q) = - \frac{d^{11} f}{dt^{11}} \Big|_{t=0} \quad (5.10)$$

其中 $q = (\alpha^2/3)(dE_i/d\sigma)_{\sigma=\sigma_0}$. 取 $\delta u = 0$, 令 $\delta w = w_i (i=10, 11, 12)$, 从方程(3.5)可得

$$\int_{\Omega} (E_i^c z^2 w_i'' w_i'' + \sigma_0 w_i^i w_i^i) d\Omega = 0, \quad (i=10, 11, 12) \quad (5.11)$$

利用上式, 可把式(5.8)、(5.9)和(5.10)简化成

$$-504 E_i^c b c L \alpha^4 (1+q) = - \frac{d^9 f}{dt^9} \Big|_{t=0} \quad (5.12)$$

$$\frac{d^{10} f}{dt^{10}} \Big|_{t=0} = 0 \quad (5.13)$$

$$1584 E_i^c b c L \alpha^2 \beta_7 (1+q) = - \frac{d^{11} f}{dt^{11}} \Big|_{t=0} \quad (5.14)$$

借助于式(5.7)、(5.4)和(5.1), 从上面三个方程可求出 β_7 , β_8 和 β_9 .

$$\beta_7 = \frac{15}{2} \alpha^2 \left[\frac{\pi E_i^c (1+q)}{\sqrt{2} (E - E_i^c)} \right]^{2/5} \quad (5.15)$$

$$\beta_8 = 0 \quad (5.16)$$

$$\beta_9 = - \frac{51}{2} \alpha^2 \left[\frac{\pi E_i^c (1+q)}{\sqrt{2} (E - E_i^c)} \right]^{4/5} \quad (5.17)$$

求出上面3个常数后, 可把 w 和 P 的展开式写成

$$w = \frac{1}{5!} c c \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) t^5 + o(t^6) \quad (5.18)$$

$$\lambda = \frac{P}{P_0} = 1 + \frac{3}{5!} t^5 - \frac{3\beta_7}{7! \alpha^2} t^7 - \frac{3\beta_9}{9! \alpha^2} t^9 + o(t^9) \quad (5.19)$$

记模态幅值为 $\xi = t^5/5!$, 则上面两式可改写成

$$w = c c \cos(\pi x/L) \xi + o(\xi^{6/5}) \quad (5.20)$$

$$\lambda = P/P_0 = 1 + 3\xi + \lambda_2 \xi^{7/5} + \lambda_3 \xi^{9/5} + o(\xi^{9/5}) \quad (5.21)$$

$$\lambda_2 = - \frac{15}{7} \left[\frac{15\pi E_i^c (1+q)}{4\sqrt{2} (E - E_i^c)} \right]^{2/5} \quad (5.22)$$

$$\lambda_3 = \frac{17}{42} \left[\frac{15\pi E_i^c (1+q)}{4\sqrt{2} (E - E_i^c)} \right]^{4/5} \quad (5.23)$$

式中(5.21)的前面3项和 Hutchinson (1974)^[4]的结果一致, 但 Hutchinson 没有求出第4项, 后面我们将看到, 在有些情况第4项是很重要的。

六、一些数值结果和结论

如果用式(5.21)中的4项来估计最大承载, 则可得到

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = 0 \Rightarrow \xi = 0.4596 \left[\frac{E - E_i^c}{E_i^c(1+q)} \right] \quad (6.1)$$

$$\lambda_{max} = 1 + 0.2384 \left[\frac{E - E_i^c}{E_i^c(1+q)} \right] \quad (6.2)$$

如果用式(5.21)中的前3项来估计最大承载, 则

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = 0 \Rightarrow \xi = 0.1200 \left[\frac{E - E_i^c}{E_i^c(1+q)} \right] \quad (6.3)$$

$$\lambda_{max} = 1 + 0.1029 \left[\frac{E - E_i^c}{E_i^c(1+q)} \right] \quad (6.4)$$

两种不同近似所估计的最大承载的差是随 E_i^c/E 和 q 这两个参数变化的。而达到最大承载时 ξ 的误差是不变的, 约为 74%。图2中画出了, $q=0$ 时, 以两种不同近似所求得的最大承载。在这个图中同时也画出了折减模量载荷。

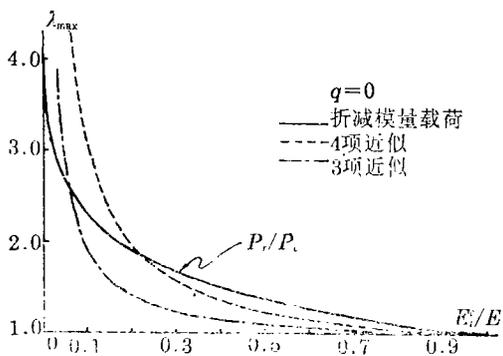


图2 不同近似所估计的最大承载的比较

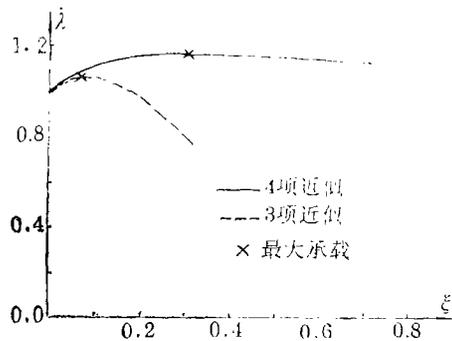


图3 对 $q=5, E_i^c/E=0.2$ 的情况, 按两种不同近似所画出的 $\lambda-\xi$ 曲线

图3和图4中分别对两种不同情况, 画出了按3项近似和按4项近似所求得的载荷位移关系曲线。对图4所示的情况, 两种不同近似的差异是很显著的, 因此展开式中的第4项可能非常重要。

在前面式(5.8)~(5.11)中出现了 w_{10}, w_{11} 和 w_{12} 等函数, 这些函数对 x 的导数是不连续的。相对于时间 t , 对方程(4.7)两边求9次导数, 然后令 t 为零, 就可导出关于 w_{10} 的变分方程。从这一方程可看出 w'_{10} 在 $x=0$ 处是不连续的, 并可从中导出 w'_{10} 在 $x=0$ 处的跳跃条件。因此为了使我们的运算成立, 必须把 w''_{10} 等理

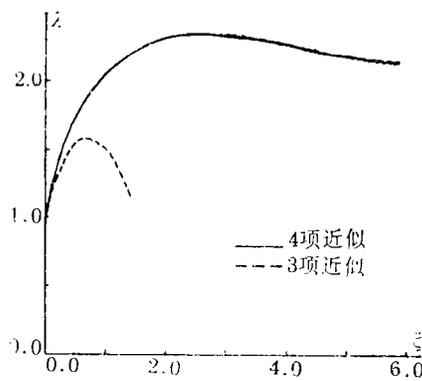


图4 对 $q=0, E_i^c/E=0.15$ 的情况, 按两种不同近似所画出的 $\lambda-\xi$ 曲线

解为广义函数。

展开式(3.2)和(3.3)成立的原因是因为有直法线假设,应变和位移在卸载区附近不可能有边界层项。对薄板壳,直法线假设同样成立,所以本文的方法可用于分析板壳初始后屈曲问题。

参 考 文 献

- [1] S. Akel, Q. S. Nguyen and C. Stolz, *Instabilités Plastiques*, Séminaire CEA/EDF/INRIA, Paris (1985).
- [2] R. Hill, A general theory of uniqueness and stability in elastic/plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 7 (1958), 209—225.
- [3] J. W. Hutchinson, Post-bifurcation behavior in plastic range, *J. Mech. Phys. Solids*, 21 (1973), 163—190.
- [4] J. W. Hutchinson, Plastic buckling, *Advances in Appl. Mech.*, 14 (1974), 67—144.
- [5] Q. S. Nguyen, Bifurcation and post-bifurcation analysis in plasticity and brittle fracture, *J. Mech. Phys. Solids*, 35 (1987), 303—324.
- [6] Q. S. Nguyen and N. Triantafyllidis, Plastic bifurcation and post-bifurcation analysis for generalized standard continua, *J. Mech. Phys. Solids*, 37 (1989), 545—566.
- [7] F. R. Shanley, Inelastic column theory, *J. Aero. Sci.*, 14 (1947), 261—267.
- [8] 苏旭明, 塑性后屈曲理论及缺陷敏感分析, 上海工业大学博士论文(1988).
- [9] X. M. Su and W. D. Lu, Postbuckling and imperfection sensitivity analysis of structures in the plastic range, Part I: Shallow shell analysis, *Thin-Walled Struct.*, 11 (1991), 203—217.

Plastic Post-Buckling of a Simply Supported Column with a Solid Rectangular Cross Section

Cheng Yaoshun

(College of Structural Engineering, Tongji University,
Shanghai 200092, P. R. China)

Lu Wenda Fang Hong

(Department of Mechanical Engineering, East China University
of Technology, Shanghai 200093, P. R. China)

Abstract

The plastic post-buckling of a simply supported column with a solid rectangular cross section is analysed by a new approach. High order terms in the asymptotic post-buckling expansions are carried out. In some aspects, the method proposed in this paper is similar to Hutchinson's. However, the computation is simple since the introduction is avoided of stretched coordinates. The method can be used to analyse initial postbifurcation of plates and shells in the plastic range.

Key words plastic post-buckling, perturbation, columns of rectangular cross section