应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

高阶非线性常微分方程组的可积类型*

汤光宋　　原存德

（江汉大学，武汉 430010）（山西师大，临汾 041004）

摘　要

由于非线性微分方程在物理学，力学及控制论中有着广泛应用，近年来在国内外一些重要刊物上发表多篇有关求微分方程精确解的论文。本文在这些论文的基础上，借助于Leibniz求导公式及变换组法，进而提出了高阶非线性常微分方程组的求解法，于是论证了它的可积性，所得结果是相应文献结果的推广。

关键词　高阶非线性微分方程组　变换组　可积类型

定理1　设 $E_1\in C^{\max\{n_1,n_3\}}$，$f_1$、$g_1$、$h_1\in C^{\max\{n_1,n_3\}+m+2}$，$E_2\in C^{\max\{n_2,n_4\}}$、$f_2$，$g_2$，$h_2\in C^{\max\{n_2,n_4\}+m+2}$。$n_i(i=1,2,3,4)$与$m$均为正整数，$E_i\neq 0$，$f_2\neq 0(i=1,2)$。$w_1\in C^{\max\{n_1,n_3\}+3}$，$w_2\in C^{\max\{n_2,n_4\}+3}$，$w_i\neq \text{const}$，$\theta_i\in C(i=1,2)$，$a_i(i=0,1,2,\cdots,n_1)$，$b_i(i=0,1,2,\cdots,n_2)$，$c_i(i=0,1,2,\cdots,n_3)$，$d_i(i=0,1,2,\cdots,n_4)$均为常数，且 $a_0=b_0=c_0=d_0=1$，约定 $E_i^{(0)}=E_i$，$f_i^{(0)}=f_i$，$g_i^{(0)}=g_i$，$h_i^{(0)}=h_i$，$w_i^{(0)}=w_i(i=1,2)$，则非线性常微分方程组：

$$\sum_{j=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{j} a_{ji}c^i_{n_1(j-i)}E_1^{(i)}(x)\{f_1(x)[w_1'(y)y^{(3)}+3w_1''(y)y'y''+w_1^{(3)}(y)y'^3]$$
$$+[2f_1'(x)+g_1(x)][w_1'(y)y''+w_1''(y)y'^2]+[f_1''(x)+2g_1'(x)]w_1'(y)y'$$
$$+g_1''(x)w_1(y)+h_1''(x)\}^{(n_1+m-j)}+\sum_{j=0}^{n_2}\sum_{i=0}^{j}b_{j-i}c^i_{n_2-(j-i)}E_2^{(i)}(x)\{f_2(x)[w_2'(y)y^{(3)}$$
$$+3w_2''(y)y'y''+w_2^{(3)}(y)y'^3]+[2f_2'(x)+g_2(x)][w_2'(y)y''+w_2''(y)y'^2]$$
$$+[f_2''(x)+2g_2'(x)]w_2'(y)y'+g_2''(x)w_2(y)+h_2''(x)\}^{(n_2+m-j)}=Q_1(x) \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{n_3}\sum_{i=0}^{j} c_{j-i}c^i_{n_3-(j-i)}E_1^{(i)}(x)\{f_1(x)[w_1'(y)y^{(3)}+3w_1''(y)y'y''+w_1^{(3)}(y)y'^3]$$
$$+[2f_1'(x)+g_1(x)][w_1'(y)y''+w_1''(y)y'^2]+[f_1''(x)+2g_1'(x)]w_1'(y)y'$$
$$+g_1''(x)w_1(y)+h_1''(x)\}^{(n_3+m-j)}+\sum_{j=0}^{n_4}\sum_{i=0}^{j}d_{j-i}c^i_{n_4-(j-i)}E_2^{(i)}(x)\{f_2(x)[w_2'(y)y^{(3)}$$

* 李骊推荐。1993年8月31日收到初稿，1994年5月27日收到修改稿。

$$+3w_2''(y)y'y''+w_2^{(3)}(y)y'^3]+[2f_2'(x)+g_2(x)][w_2'(y)y''+w_2''(y)y'^2]$$
$$+[f_2''(x)+2g_2'(x)]w_2'(y)y'+g_2''(x)w_2(y)+h_2''(x)\}^{(n_4+m-j)}=Q_2(x)$$

可积，方程组(1)可经变换组：

$$\begin{aligned}&E_1(x)[f_1(x)w_1'(y)y'+g_1(x)w_1(y)+h_1(x)]^{(m+2)}=z_1\\&E_2(x)[f_2(x)w_2'(y)y'+g_2(x)w_2(y)+h_2(x)]^{(m+2)}=z_2\end{aligned}\tag{2}$$

化为常系数线性方程组：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{n_1}a_jz_1^{(n_1-j)}+\sum_{j=0}^{n_2}b_jz_2^{(n_2-j)}=Q_1(x)\\&\sum_{j=0}^{n_3}c_jz_1^{(n_3-j)}+\sum_{j=0}^{n_4}d_jz_2^{(n_4-j)}=Q_2(x)\end{aligned}\tag{3}$$

证明 将变换组(2)代入方程组(1)，并利用Leibniz（莱布尼兹）公式，即可得到方程组(3)。由文[1]的方法，可求出相应方程组(3)的齐次方程组的通解，再应用Lagrange(拉格朗日）常数变易法得到它的特解的积分表达式，从而获得方程组(3)解的表达式。以此代入变换组(2)，经简单变形后积分$m+2$次，最后解两个一阶线性方程，就可得到方程组(1)的解$w_1(y)$、$w_2(y)$。故方程组(1)可积。

同理可得

定理2 设E_i，f_i，g_i，h_i，w_i，Q_i及n_i，m，a_i，b_i，c_i，d_i同定理1，且a，b为常数，假定$ax+b>0$，则非线性常微分方程组：

$$\sum_{j=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{j}a_{j-i}C_{n_1-(j-i)}^{i}\ (ax+b)^{n_1(j-i)}E_1^{(i)}(x)\{f_1(x)[w_1'(y)y^{(3)}$$
$$+3w_1''(y)y'y''+w_1^{(3)}(y)y'^3]+[2f_1'(x)+g_1(x)][w_1'(y)y''+w_1''(y)y'^2]$$
$$+[f_1''(x)+2g_1'(x)]w_1'(y)y'+g_1''(x)w_1(y)+h_1''(x)\}^{(n_1+m-j)}$$
$$+\sum_{j=0}^{n_2}\sum_{i=0}^{j}b_{j-i}C_{n_2-(j-i)}^{i}\ (ax+b)^{n_2-(j-i)}E_2^{(i)}(x)\{f_2(x)[w_2'(y)y^{(3)}$$
$$+3w_2''(y)y'y''+w_2^{(3)}(y)y'^3]+[2f_2'(x)+g_2(x)][w_2'(y)y''+w_2''(y)y'^2]$$
$$+[f_2''(x)+2g_2'(x)]w_2'(y)y'+g_2''(x)w_2(y)+h_2''(x)^{(n_2+m-j)}=Q_1(x)\tag{4}$$

$$\sum_{j=0}^{n_3}\sum_{i=0}^{j}c_{j-i}C_{n_3-(j-i)}^{i}\ (ax+b)^{n_3-(j-i)}E_1^{(i)}(x)\{f_1(x)[w_1'(y)y^{(3)}+3w_1''(y)y'y''$$
$$+w_1^{(3)}(y)y'^3]+[2f_1'(x)+g_1(x)][w_1'(y)y''+w_1''(y)y'^2]$$
$$+[f_1''(x)+2g_1'(x)]w_1'(y)y'+g_1''(x)w_1(y)+h_1''(x)\}^{(n_3+m-j)}$$
$$+\sum_{j=0}^{n_4}\sum_{i=0}^{j}d_{j-i}C_{n_4-(j-i)}^{i}(ax+b)^{n_4-(j-i)}.E_2^{(i)}(x)\{f_2(x)[w_2'(y)y^{(3)}$$
$$+3w_2''(y)y'y''+w_2^{(3)}(y)y'^3]+[2f_2'(x)+g_2(x)][w_2'(y)y''+w_2''(y)y'^2]$$
$$+[f_2''(x)+2g_2'(x)]w_2'(y)y'+g_2''(x)w_2(y)+h_2''(x)\}^{(n_4+m-j)}=Q_2(x)$$

可积。方程组(4)可经变换组(2)，化为变系数线性方程组：

$$\sum_{j=0}^{n_1} a_j(ax+b)^{n_1-j} z_1^{(n_1-j)}+\sum_{j=0}^{n_2} b_j(ax+b)^{n_2-j} z_2^{(n_2-j)} = Q_1(x)$$
$$\sum_{j=0}^{n_3} c_j(ax+b)^{n_3-j} z_1^{(n_3-j)}+\sum_{j=0}^{n_4} d_j(ax+b)^{n_4-j} z_2^{(n_4-j)} = Q_2(x) \tag{5}$$

可再经自变量变换$t=\ln(ax+b)$，化为常系数线性方程组：

$$\sum_{j=0}^{n_1} \tilde{a}_j z_1^{(n_1-j)}+\sum_{j=0}^{n_2} \tilde{b}_j z_2^{(n_2-j)} = Q_1\left(\frac{e^t-b}{a}\right)$$
$$\sum_{j=0}^{n_3} \tilde{c}_j z_1^{(n_3-j)}+\sum_{j=0}^{n_4} \tilde{d}_j z_2^{(n_4-j)} = Q_2\left(\frac{e^t-b}{a}\right) \tag{6}$$

其中　$\tilde{a}_j$，$\tilde{b}_j$，$\tilde{c}_j$，$\tilde{d}_j$均为常数。

定理 3　设 $G_1\in C^{\max\{n_1,n_3\}-1}$，$f_1$，　w_1，　$\varphi_1\in C^{\max\{n_1,n_3\}}$，$G_2\in C^{\max\{n_2,n_4\}-1}$，$f_2$，$w_2$，$\varphi_2\in C^{\max\{n_2,n_4\}}$，$n_i(i=1,2,3,4)$ 均为正整数，$G_i\neq 0$，$f_i\neq 0$，$w_i\neq \mathrm{const}(i=1,2)$，$a_i(i=0,1,2,\cdots,n_1)$，$b_i(i=0,1,2,\cdots,n_2)$，$c_i(i=0,1,2,\cdots,n_3)$，$d_i(i=0,1,2,\cdots,n_4)$均为常数，且约定$a_0=b_0=c_0=d_0=1$。则非线性常微分方程组：

$$\sum_{i=1}^{n_1} a_{n_1-i}\overbrace{\frac{d}{dx}\left\{\cdots\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d(f_1(x)w_1(y)+\varphi_1(x))}{dx}\right.\right.\right.}^{n_1\text{次}}\left.\cdot\frac{1}{G_1(x)}\right)\frac{1}{G_1(x)}\Bigg]$$
$$\left.\frac{1}{G_1(x)}\cdots\right\}\frac{1}{G_1(x)}+a_{n_1}(f_1(x)w_1(y)+\varphi_1(x))$$
$$+\sum_{i=1}^{n_2} b_{n_2-i}\overbrace{\frac{d}{dx}\left\{\cdots\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d(f_2(x)w_2(y)+\varphi_2(x))}{dx}\right.\right.\right.}^{n_2\text{次}}\left.\cdot\frac{1}{G_2(x)}\right)\frac{1}{G_2(x)}\Bigg]$$
$$\left.\cdot\frac{1}{G_2(x)}\cdots\right\}\frac{1}{G_2(x)}+b_{n_2}(f_2(x)w_2(y)+\varphi_2(x))=0 \tag{7}$$
$$\sum_{i=1}^{n_3} c_{n_3-i}\overbrace{\frac{d}{dx}\left\{\cdots\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d(f_1(x)w_1(y)+\varphi_1(x))}{dx}\right.\right.\right.}^{n_3\text{次}}\left.\cdot\frac{1}{G_1(x)}\right)\frac{1}{G_1(x)}\Bigg]$$
$$\left.\cdot\frac{1}{G_1(x)}\cdots\right\}\frac{1}{G_1(x)}+c_{n_3}(f_1(x)w_1(y)+\varphi_1(x))$$
$$+\sum_{i=1}^{n_4} d_{n_4-i}\overbrace{\frac{d}{dx}\left\{\cdots\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d(f_2(x)w_2(y)+\varphi_2(x))}{dx}\right.\right.\right.}^{n_4\text{次}}\left.\cdot\frac{1}{G_2(x)}\right)\frac{1}{G_2(x)}\Bigg]$$
$$\left.\cdot\frac{1}{G_2(x)}\cdots\right\}\frac{1}{G_2(x)}+d_{n_4}(f_2(x)w_2(y)+\varphi_2(x))=0$$

可积。方程组(7)可经变换组：

$$u_1(t)=f_1(x)w_1(y)+\varphi_1(x),\quad t=\int G_1(x)dx,$$
$$u_2(t)=f_2(x)w_2(y)+\varphi_2(x),\quad t=\int G_2(x)dx \tag{8}$$

化为常系数的线性方程组：

$$\sum_{i=1}^{n_1}a_{n_1-i}\frac{d^iu_1}{dt^i}+a_{n_1}u_1+\sum_{i=1}^{n_2}b_{n_2-i}\frac{d^iu_2}{dt^i}+b_{n_2}u_2=0,$$
$$\sum_{i=1}^{n_3}c_{n_3-i}\frac{d^iu_1}{dt^i}+c_{n_3}u_1+\sum_{i=1}^{n_4}d_{n_4-i}\frac{d^iu_2}{dt^i}+d_{n_4}u_2=0 \tag{9}$$

证明　作变换组(8)，有

$$\frac{du_i}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{du_i}{dx}\cdot\frac{1}{G_i}=\frac{du_i}{dt},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du_i}{dx}\cdot\frac{1}{G_i}\right)\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dx}\left(\frac{du_i}{dx}\cdot\frac{1}{G_i}\right)\frac{1}{G_i}=\frac{1}{G_i^2}\frac{d^2u_i}{dx^2}-\frac{G_i'}{G_i^3}\frac{du_i}{dx}$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{du_i}{dt}\right)=\frac{d^2u_i}{dt^2},$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{du_i}{dx}\cdot\frac{1}{G_i}\right)\frac{1}{G_i}\right]\frac{1}{G_i}=\frac{1}{G_i^3}\frac{d^3u_i}{dx^3}-3\frac{G_i'}{G_i^4}\frac{d^2u_i}{dx^2}$$
$$-\frac{G_iG_i''-3G_i'^2}{G_i^5}\frac{du_i}{dx}=\frac{d^3u_i}{dt^3}, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{du_i}{dx}\cdot\frac{1}{G_i}\right)\frac{1}{G_i}\right]\frac{1}{G_i}\right\}\frac{1}{G_i}=\frac{1}{G_i^4}\frac{d^4u_i}{dx^4}-6\frac{G_i'}{G_i^5}\frac{d^3u_i}{dx^3}$$
$$-\frac{4G_iG_i''-15G_i'^2}{G_i^6}\frac{d^2u_i}{dx^2}-\frac{-10G_iG_i'G_i''+15G_i'^3+G_i^2G_i^{(3)}}{G_i^7}\frac{du_i}{dx}=\frac{d^4u_i}{dt^4},$$

……

$$\overbrace{\frac{d}{dx}\left\{\cdots\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{du_i}{dx}\cdot\frac{1}{G_i}\right)\frac{1}{G_i}\right]\frac{1}{G_i}\cdots\right\}}^{n_j\text{次}}\frac{1}{G_i}=\frac{d^{n_j}u_i}{dt^{n_j}}$$

这里　$i=1,2$，$n_j(j=1,2,3,4)$.

将(10)代入方程组(7)，即可化为常系数线性方程组(9)．依据文[1]方程组(9)的解的表达式可求得，代入变换组(8)，从而可得方程组(7)的解$w_1(y)$，$w_2(y)$．故方程组(7)可积．

注　文[2]的定理1,2,3仅在于研究方程组(5)的特殊情形的可积性，因而本文的定理2是文[2]的推广．同时还容易看出，该文的定理1可视为文[3]定理3.3及文[4]的有关定理的拓广，此文的定理3也可视为文[3]定理3.1,3.2的拓广．

定理4　设f_1、$f_2\in C^{n+1}$，a,b,c,A均为常数，且$A\neq0$，$c\neq0$，$a^2+bc\neq0$．又a_1,b_1,c_1,d_1为非零常数，n为正整数，约定$f_i^{(0)}=f_i$．$(i=1,2)$，则常微分方程组：

$$a_1 f_1^{(n)}(x) + a_1 A f_1^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) + b_1 f_2^{(n)}(x) + b_1 A f_2^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = 0,$$
$$c_1 f_1^{(n)}(x) + c_1 A f_1^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) + d_1 f_2^{(n)}(x) + d_1 A f_2^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = 0 \tag{11}$$

是可积的。

证明 我们仿照文[5]定理1的证明方法，将方程组(11)的每个方程对x求导可得

$$a_1 f_1^{(n+1)}(x) - a_1 A\frac{a^2+bc}{(cx-a)^2} f_1^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)$$
$$+b_1 f_2^{(n+1)}(x) - b_1 A\frac{a^2+bc}{(cx-a)^2} f_2^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = 0$$
$$c_1 f_1^{(n+1)}(x) - c_1 A\frac{a^2+bc}{(cx-a)^2} f_1^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)$$
$$+d_1 f_2^{(n+1)}(x) - d_1 A\frac{a^2+bc}{(cx-a)^2} f_2^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = 0 \tag{12}$$

由(11)可得

$$a_1 f_1^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) + b_1 f_2^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = -A(a_1 f_1^{(n-1)}(x) + b_1 f_2^{(n-1)}(x))$$
$$c_1 f_1^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) + d_1 f_2^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) = -A(c_1 f_1^{(n-1)}(x) + d_1 f_2^{(n-1)}(x)) \tag{13}$$

将(13)代入(12)得

$$a_1 f_1^{(n+1)}(x) + a_1 A^2\frac{a^2+bc}{(cx-a)^2} f_1^{(n-1)}(x) + b_1 f_2^{(n+1)}(x) + b_1 A^2\frac{a^2+bc}{(cx-a)^2} f_2^{(n-1)}(x) = 0$$
$$c_1 f_1^{(n+1)}(x) + c_1 A^2\frac{a^2+bc}{(cx-a)^2} f_1^{(n-1)}(x) + d_1 f_2^{(n+1)}(x) + d_1 A^2\frac{a^2+bc}{(cx-a)^2} f_2^{(n-1)}(x) = 0 \tag{14}$$

令 $$y_1 = f_1^{(n-1)}(x),\quad y_2 = f_2^{(n-1)}(x) \tag{15}$$

将(15)代入(14)经整理后将方程组：

$$a_1(cx-a)^2 y_1'' + a_1 A^2(a^2+bc)y_1 + b_1(cx-a)^2 y_2'' + b_1 A^2(a^2+bc)y_2 = 0$$
$$c_1(cx-a)^2 y_1'' + c_1 A^2(a^2+bc)y_1 + d_1(cx-a)^2 y_2'' + d_1 A^2(a^2+bc)y_2 = 0. \tag{16}$$

这已是文[2]定理1研究的特例，从而可用文[2]定理1的方法，求出其解的表达式，再将此解的表达式代入(15)，然后再积分$n-1$次，即可得方程组(11)的解$f_1(x)$，$f_2(x)$。故原方程组(11)可积。

定理5 设$f_1, f_2 \in C^{n+1}$，$g_1, g_2 \in C^1$，常数$c \neq 0$，$a^2+bc \neq 0$，又 a_1，b_1，c_1，d_1 为非零常数，n成正整数，约定$f_i^{(0)} = f_i (i=1,2)$。则常数分方程组：

$$a_1 f_1^{(n)}(x) + a_1(cx-a) f_1^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) + g_1(x) + b_1 f_2^{(n)}(x)$$
$$+b_1(cx-a) f_2^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) + g_2(x) = 0$$
$$c_1 f_1^{(n)}(x) + c_1(cx-a) f_1^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) + g_1(x) + d_1 f_2^{(n)}(x)$$
$$+d_1(cx-a) f_2^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right) + g_2(x) = 0 \tag{17}$$

是可积的。

证明 仿照文[6]定理的证明方法，将方程组(17)的每个方程对x求导可得

$$\begin{aligned} &a_1 f_1^{(n+1)}(x)+a_1 c f_1^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)-a_1\frac{a^2+bc}{cx-a}f_1^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+g_1'(x)\\ &\quad +b_1 f_2^{(n+1)}(x)+b_1 c f_2^{(n+1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)-b_1\frac{a^2+bc}{cx-a}f_2^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+g_2'(x)=0\\ &c_1 f_1^{(n-1)}(x)+c_1 c f_1^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)-c_1\frac{a^2+bc}{cx-a}f_1^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+g_1'(x)\\ &\quad +d_1 f_2^{(n-1)}(x)+d_1 c f_2^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)-d_1\frac{a^2+bc}{cx-a}f_2^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+g_2'(x)=0 \end{aligned} \tag{18}$$

由(17)可得

$$\begin{aligned} &a_1 f_1^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+b_1 f_2^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)\\ &\quad =-\frac{1}{cx-a}\left(a_1 f_1^{(n)}(x)+b_1 f_2^{(n)}(x)+g_1(x)+g_2(x)\right)\\ &c_1 f_1^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+d_1 f_2^{(n-1)}\left(\frac{ax+b}{cx+a}\right)\\ &\quad =-\frac{1}{cx-a}\left(c_1 f_1^{(n)}(x)+d_1 f_2^{(n)}(x)+g_1(x)+g_2(x)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_1 f_1^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+b_1 f_2^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)=-\left[a_1\frac{a^2+bc}{cx-a}f_1^{(n-1)}(x)\right.\\ &\quad \left.+b_1\frac{a^2+bc}{cx-a}f_2^{(n-1)}(x)+g_1\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+g_2\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)\right]\\ &c_1 f_1^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+d_1 f_2^{(n)}\left(\frac{ax+b}{cx+a}\right)=-\left[c_1\frac{a^2+bc}{cx-a}f_1^{(n-1)}(x)\right.\\ &\quad \left.+d_1\frac{a^2+bc}{cx-a}f_2^{(n-1)}(x)+g_1\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+g_2\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)\right] \end{aligned}$$

将上面四式代入(18)，并令

$$y_1=f_1^{(n-1)}(x),\quad y_2=f_2^{(n-1)}(x) \tag{19}$$

经整理后可得方程组：

$$\begin{aligned} &a_1(cx-a)^2y_1''-a_1c(cx-a)y_1'+a_1(a^2+bc)^2y_1+b_1(cx-a)^2y_2''\\ &\quad -b_1c(cx-a)y_2+b_1(a^2+bc)^2y_2\\ &\quad =c(cx-a)(g_1(x)+g_2(x))-(a^2+bc)(cx-a)\left[g_1\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)\right.\\ &\quad \left.+g_2\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)\right]-(cx-a)^2(g_1'(x)+g_2'(x)). \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &c_1(cx-a)^2y_1''-c_1c(cx-a)y_1'+c_1(a^2+bc)^2y_1-d_1(cx-a)^2y_2''\\ &\quad -d_1c(cx-a)y_2'+d_1(a^2+bc)^2y_2 \end{aligned}$$

$$=c(cx-a)(g_1(x)+g_2(x)-(a^2+bc)(cx-a)\left[g_1\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)\right.$$

$$\left.+g_2\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)\right]-(cx-a)^2(g_1'(x)+g_2'(x)).$$

再仿照定理4的推导方法，可知方程组(17)可积.

我们再借助于文[7]定理2，可将定理4推广为

定理6 设f_1，$f_2\in C^{n+1}$. n与m都是正整数，且$1\leqslant m\leqslant n$，k为实数，常数 $A\neq 0$，$c\neq 0$，$a^2+bc\neq 0$，a_1，b_1，c_1，d_1为非零常数，则常微分方程组：

$$\begin{cases} a_1f_1^{(n)}(x)+a_1A(cx-a)^kf_1^{(n-m)}\left(\dfrac{ax+b}{cx-a}\right)+b_1f_2^{(n)}(x) \\ \quad +b_1A(cx-a)^kf_2^{(n-m)}\left(\dfrac{ax+b}{cx-a}\right)=0 \\ c_1f_1^{(n)}(x)+c_1A(cx-a)^kf_1^{(n-m)}\left(\dfrac{ax+b}{cx-a}\right)+d_1f_2^{(n)}(x) \\ \quad +d_1A(xc-a)^kf_2^{(n-m)}\left(\dfrac{ax+b}{cx-a}\right)=0 \end{cases} \tag{21}$$

是可积的.

事实上，对于方程组(21)，借助于文[7]定理2，可化为

$$\begin{cases} a_1(cx-a)^{n+m}f_1^{(n+m)}(x)+Q_1a_1(cx-a)^{n+m-1}f_1^{(n+m-1)}(x)+\cdots \\ \quad +Q_ia_1(cx-a)^{n+m-i}f_1^{(n+m-i)}(x)+\cdots+Q_ma_1(cx-a)^nf_1^{(n)}(x) \\ \quad +Q_{m+1}a_1(cx-a)^{n-m}f_1^{(n-m)}(x)+b_1(cx-a)^{n+m}f_2^{(n+m)}(x) \\ \quad +Q_1b_1(cx-a)^{n+m-1}f_2^{(n+m-1)}(x)+\cdots+Q_ib_1(cx-a)^{n+m-i}f_2^{(n+m-i)}(x) \\ \quad +\cdots+Q_mb_1(cx-a)^nf_2^{(n)}(x)+Q_{m+1}(cx-a)^{n-m}f_2^{(n-m)}(x)=0 \\ c_1(cx-a)^{n+m}f_1^{(n+m)}(x)+Q_1c_1(cx-a)^{n+m-1}f_1^{(n+m-1)}(x)+\cdots \\ \quad +Q_ic_1(cx-a)^{n+m-i}f_1^{(n+m-i)}(x)+\cdots+Q_mc_1(cx-a)^nf_1^{(n)}(x) \\ \quad +Q_{m+1}c_1(cx-a)^{n-m}f_1^{(n-m)}(x)+d_1(cx-a)^{n+m}f_2^{(n+m)}(x) \\ \quad +Q_1d_1(cx-a)^{n+m-1}f_2^{(n+m-1)}(x)+\cdots+Q_id_1(cx-a)^{n+m-i}f_2^{(n+m-i)}(x) \\ \quad +\cdots+Q_md_1(cx-a)^nf_2^{(n)}(x)+Q_{m+1}d_1(cx-a)^{n-m}f_2^{(n-m)}(x)=0 \end{cases} \tag{22}$$

其中

$$Q_i=(-1)^ic_m^i(k-m+1)(k-m+2)\cdots(k-m+i)c^i\ (i=1,2,\cdots,m)$$

$$Q_{m+1}=(-1)^{m+1}A^2(a^2+bc)^{k+m}.$$

方程组(22)已是文[2]定理1研究的特例，从而可用文[2]定理1的方法，求出原方程组(21)解的表达式. 于是得知方程组(21)可积.

注 很明显本文定理4,5,可视为文[5],[6],[7]相应定理的拓广.

参 考 文 献

[1] 陈银通、杨彩梅，高阶常系数常微分方程组的一种求解法，广东民族学院学报（自然科学版），4(1990).

[2] 陈银通、杨彩梅，一类可化为常系数的变系数方程组的解法，广东民族学院学报（自然科学版），4(1991)，7—10.

[3] 李鸿祥. 几类可积的非线性常微分方程——高阶方程, 应用数学和力学, 11(6)(1990), 521—527.
[4] 汤光宋、董巨清, 高阶非线性常微分方程的可积类型, 应用数学和力学, 12(11)(1991),1029—1035.
[5] 汤光宋, 常微分方程的两个新的可积类型, 北京工业大学学报, 18(3)(1992), 92—94.
[6] 汤光宋, 可积常微分方程的新类型, 山东轻工业学院学报(自然科学版), 7(1)(1993), 71—73.
[7] 董巨清、汤光宋, 可化为Euler方程的新可积类型, 开封大学学报, 1993年第1、2期, 50—57.

Integrable Types of Nonlinear Ordinary Differential Equation Sets of Higher Orders

Tang Guangsong

(*Mathematics Department, Jianghan University, Wuhan* 430010)

Yuan Cunde

(*Mathematics Department, Shanxi Teachers University, Linfen* 041004)

Abstract

Because of the extensive applications of nonlinear ordinary differential equation in physics, mechanics and cybernetics, there have been many papers on the exact solution to differential equation in some major publications both at home and abroad in recent years. Based on these papers and in virtue of Leibniz formula, and transformation sets technique, this paper puts forth the solution to nonlinear ordinary differential equation set of higher-orders; moreover, its integrability is proven. The results abtained are the generalization of those in the references.

Key words nonlinear ordinary differential equation set, transformation set