

一个具有两个吸引子的偏微分方程组*

王冠香 徐振源

(苏州大学, 苏州 215006) (无锡轻工业学院, 无锡 214000)

刘 曾 荣

(苏州大学, 中科院力学所LNM室, 苏州 215006)

摘 要

本文构造了一个具有两个吸引子的反应扩散方程组, 并讨论了吸引子的结构。

关键词 不变区 吸引子 Hopf 分叉

一、引 言

近年来, 关于高维和无穷维动力系统的时空复杂性的研究已成为非线性科学的焦点。对时空结构的研究主要是从两个方面着手的。一方面是通过数值计算和理论分析直接讨论某些简单的较高维系统的动力行为; 另一方面是从理论上证明无穷维系统在充分长时间后可以约化为有限维系统。这方面已有许多杰出的研究论文。R. Temam^[1]建立的紧吸引子和惯性流形理论可谓最卓越。但此理论要求系统的所有轨道都指数收敛到一个惯性流形上的整体吸引子, 也就是说, 要求吸引子的吸引盆是整个希尔伯特空间。众所周知, 在微分动力学理论和有限维常微方程组理论中, 在相空间中仅有一个吸引子的有限维动力系统并非普遍的。类似地, 也应该有一些无穷维动力系统具有不止一个吸引子。这个观点先是在[3]中提出的。本文构造了一个具有两个吸引子的反应扩散系统, 讨论了它们的结构, 并指出没有任何轨线连接此两吸引子, 从而不存在一个紧的连通的惯性流形包含两者。

二、具有两个吸引子的反应扩散系统

2.1. 系统及稳态解

考虑如下反应扩散方程组

*国家自然科学基金资助的课题。

戴世强推荐, 1994年12月26日收到。

$$\left. \begin{aligned} u_t &= du_{xx} + au - v - \frac{1}{2}u^2 + uv \\ v_t &= dv_{xx} + u - \frac{1}{2}v^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中 $0 \leq a < \frac{1}{2}$, $x \in \Omega = (0, 1)$, $d > 0$. 给予 Neumann 边界条件

$$\left. \begin{aligned} u_x(0, t) &= u_x(1, t) = 0 \\ v_x(0, t) &= v_x(1, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

和初始条件

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \\ v(x, 0) &= v_0(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

为方便起见, (2.1)~(2.3) 写成

$$\mathbf{u}_t = D\Delta\mathbf{u} + F\mathbf{u} \quad (2.1)'$$

$$\mathbf{u}_x(0, t) = \mathbf{u}_x(1, t) = 0 \quad (2.2)'$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0 \quad (2.3)'$$

其中
$$D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1(u, v) \\ f_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au - v - \frac{1}{2}u^2 + uv \\ u - \frac{1}{2}v^2 \end{pmatrix}.$$

易见 (2.1)'~(2.3)' 具有两个稳态解, $\mathbf{u} = (0, 0)^T$ 和 $\mathbf{u} = (2, 2 - 2a)^T$. 我们有如下结果*

引理 2.1 稳态解 $\mathbf{u} = (2, 2 - 2a)^T$ 是稳定的而 $(0, 0)^T$ 是不稳定的.

证明 (2.1)' 的关于 $(2, 2 - 2a)^T$ 的变分方程是

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{pmatrix} d \frac{\partial}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & d \frac{\partial}{\partial x^2} \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

及初始条件 $\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{u}(1, t) = 0$. 此方程的特征值为 $-dn^2\pi^2 + \lambda$ ($n = 0, 1, \dots$), 其中 $\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$. 显然, 特征值的实部均为负. 因而稳态解 $(2, 2 - 2a)^T$ 是稳定的.

$(0, 0)^T$ 的不稳定性可类似证明. (Q.E.D)

为获得 (2.1)' 的解的进一步性质, 需要有先验估计. 为此, 下面证明 (2.1) 有有界正不变区.

2.2. 不变区

现在我们来构造 (2.1)' 的有界不变区. 为此, 需要如下两个辅助微分系统

$$E_{1\pm} \begin{cases} u_t = f_1(u, v) \\ v_t = u \end{cases}$$

$$E_{2\pm} \begin{cases} u_t = f_1(u, v) \\ v_t = u - u^2 \end{cases}$$

还要用到 J. Smoller^[2]的如下定理:

引理2.2 Σ 是相空间中的凸集, 如果 F 在 $\partial\Sigma$ 上均指向 Σ 内部, 则 Σ 为 (2.1)' 的不变区.

令 $0 < \varepsilon \ll 1, 0 < v_0 < +\infty$. 采取下列步骤构造凸区域 Σ (见图1).

I. 当 $\varepsilon \leq u \leq 1$ 时, 自点 $A(1, v_0)$ 起作 E_1 的轨道

$\varphi(u, v; 1, v_0) = 0$. 它交直线 $u = \varepsilon$ 于点 $B(\varepsilon, v_1)$. 显然, E_1 的方向场决定了 $v_1 > v_0$.

II. 当 $-\varepsilon \leq u \leq \varepsilon$ 时, 自点 B 起作直线 $v = k_1 u + b_1$, 其中

$$k_1 = \varepsilon / f_1(\varepsilon, v_1) < 0. \text{ 它交直线 } u = -\varepsilon \text{ 于点 } C(-\varepsilon, v_2).$$

III. 易得曲线 $f_1(u, v) = 0$ 的渐近线为 $l: v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} - a$. 现自点 $C(-\varepsilon, v_2)$ 起作 E_1 的另

一条轨线 $\varphi(u, v; -\varepsilon, v_2) = 0$, 它交直线 l 于点 $D(u_3, v_3)$.

IV. 令 $d = v_3 - v_3'$, 其中 v_3' 满足 $f_1(u_3, v_3') = 0$. 现自点 $D(u_3, v_3)$ 起作直线 $v = k_2 u + b_2$,

其中 $k_2 = u_3 / f_1(u_3, v_3) > 0$. 它交直线 $v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} - a - 2d$ 于 $E(u_4, v_4)$.

V. 自点 $E(u_4, v_4)$ 起作 E_2 的轨线 $\psi(u, v; u_4, v_4) = 0$, 它交直线 $u = -\varepsilon$ 于点 $G(-\varepsilon, v_5)$ 且 $v_5 < 0$.

VI. 自点 $G(-\varepsilon, v_5)$ 起作直线 $v = k_3 u + b_3$, 其中 $k_3 = (-\varepsilon - \varepsilon^2) / f_1(-\varepsilon, v_5) < 0$. 它交直线 $u = \varepsilon$ 于点 $I(\varepsilon, v_6)$.

VII. 自点 $I(\varepsilon, v_6)$ 起作直线 $u = v_6$, 它交直线 $u = 1$ 于点 $J(1, v_6)$.

闭曲线 $ABCDEFGHIJA$ 所围凸区域记为 Σ . 当 $u \neq 0, f_1(u, v) < 0$ 时, $\frac{u}{f_1(u, v)} < \frac{f_2(u, v)}{f_1(u, v)}$,

所以 F 在 \widehat{AB} 和 \widehat{CD} 上指向 Σ 内部. 类似地, 当 $u < 0, f_1(u, v) > 0$ 时, $\frac{u - u^2}{f_1(u, v)} < \frac{f_2(u, v)}{f_1(u, v)}$

所以 F 在 \widehat{EG} 上指向 Σ 内部. 在直线 IJ 和 JA 上, F 显然指向 Σ 内部. 据方向场的连续性, 当 ε 充分小时, F 在直线 BC, GI 和 DE 上指向 Σ 内部. 所以, 据引理 2.2, Σ 是 (2.1)' 的有界不变区.

2.2. 两个吸引子

在存在有界不变区的条件下, 如果 u_0 在 $\bar{\Omega}$ 上连续 (取值于 Σ 上), 则 (2.1)' \sim (2.3)' 的解在 $\bar{\Omega}$ 上连续 (取值于 Σ 上) (见 [2]). 利用逼近并取极限, 易得下述结果.

引理2.3 对任意的 $u_0 \in L^2(\Omega; \Sigma)$, (2.1)' \sim (2.3)' 存在唯一的整体解 $u(t) \in L^2(\Omega; \Sigma), \forall t; u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^2), \forall T > 0$; 并且映射 $S(t): u_0 \rightarrow u$ 在 $L^2(\Omega)^2$ 上连续, $\forall t \geq 0$.

另外, F 在 Σ 上是连续有界的. 这样, Temam 定理 ([1]Th III.1.3) 的所有条件均满足. 所以, (2.1)' \sim (2.3)' 在 $L^2(\Omega; \Sigma)$ 中有一个紧连通的吸引子.

另一方面, 据引理 2.1, 点 $(2, 2 - 2a)$ 也是一个吸引子, 它吸引进入其某个邻域的所有轨道. 而且, 从这邻域出发的所有轨道, 随时间 t 的增加, 都不可能进入 Σ .

综上所述, 得到本文的主要结果.

定理 (2.1)' \sim (2.3)' 具有两个独立的吸引子, 各自吸引其自身某个邻域内的所有轨道.

三、吸引子的结构

右方吸引子的结构是显然的。下证左方吸引子是随着参数 a 的值越过0, 从稳态解 $(0, 0)$ Hopf分叉而出的渐近稳定的周期解。

据引理2.3, (2.1)' ~ (2.3)'在 Σ 上有光滑半流 $F_a^*(\mathbf{u})$ 。容易验证 $F_a^*(\mathbf{u})$ 满足以下条件:

1. 光滑性条件

$F_a^*(\mathbf{u})$ 关于 $t, \mathbf{u}, a(t \geq 0)$ 是连续的, $F_a^*(\mathbf{u})$ 关于 \mathbf{u} 和 a 是 $C^{k+1}(k \geq 5)$ 的。

2. 谱条件

(1)对 $t \in [0, T]$ 和 a 于0附近, $F_a^*(0) = 0$ 。(2)半群 $D_{\mathbf{u}}F_a^*(0)$ 有无穷小母元 A_a 并且 $\exp(t\sigma(A_a)) = \sigma(D_{\mathbf{u}}F_a^*(0)) \setminus \{0\}, \forall t > 0$ 。(3) A_a 有一对简单的共轭特征值 $\lambda(a) = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, $\lambda(0) = \pm i$ 并且 $\frac{d}{da} \operatorname{Re}(\lambda(a)) \Big|_{a=0} = \frac{1}{2} > 0$ 。(4)存在 $\delta > 0$ 使得当 a 在0附近时, $\operatorname{Re}(\sigma(A_a) \setminus \{\lambda(a)\}) \leq -\delta < 0$ 。

记 A_a^* 为映射

$$\mathbf{u} \longrightarrow \begin{pmatrix} d \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a & -1 \\ 1 & d \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

其定义域为 $D(A_a^*) = \left\{ (u, v) \in H^2[0, 1] \times H^2[0, 1] \mid \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \text{ 在 } x=0, 1 \text{ 处} \right\}$ 选取

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \bar{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

$$q^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{q}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

显然有 $\langle A_0^* \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A_0 \mathbf{v} \rangle$, $A_0 q = iq$, $A_0^* q^* = -iq^*$, $\langle q^*, q \rangle = 1$ 和 $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$, 其中

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \bar{f}^T \cdot g dx$. 令 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = xq + \bar{x}\bar{q} + w = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, 在 $x-w$ 坐标系中,

(2.1) ~ (2.3) 成为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ix + \langle q^*, F \rangle \\ \frac{dw}{dt} &= A_0 w + H(x, \bar{x}, w) \end{aligned} \right\}$$

其中 $H(x, \bar{x}, w) = F - \langle q^*, F \rangle q - \langle \bar{q}^*, F \rangle \bar{q}$.

简单计算可得

$$\langle q^*, F \rangle = x^2 \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i \right) + x\bar{x} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$+\bar{x}^2\left(-\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)+o(|x|^3)+o(|x||w|),$$

$$\langle q^*, F \rangle = x^2\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)+x\bar{x}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$+\bar{x}^2\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i\right)+o(|x|^3)+o(|x||w|),$$

$$H=0(|x|^3)+o(|x||w|),$$

$$\bar{w}_{20}=(2i-A_0)^{-1}H_{20}=0,$$

$$\bar{w}_{21}=-A_0^{-1}H_{11}=0$$

$$\bar{w}_{02}=\bar{w}_{20}=0.$$

因此

$$\frac{dx}{dt}=ix+x^2\left(-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i\right)+x\bar{x}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)+\bar{x}^2\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)+o(|x|^4),$$

$$g_{20}=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i, \quad g_{11}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i,$$

$$\operatorname{Re}C_1(0)=\operatorname{Re}\left\{\left(\frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right\}=-\frac{1}{4}<0.$$

所以, 据[4] (见第五章), 当 a 从负值经过 0 变到正值时, 渐近轨道稳定的周期解从零解分叉而出。

注: 当参数 a 的值越过 $\frac{1}{2}$ 时, (2.1)~(2.3) 的动力学结构将出现分叉。如果 $a > \frac{1}{2}$, 两个吸引子将合并为一个, 也就是说, 系统将只有一个吸引子。有关详细讨论将另文给出。

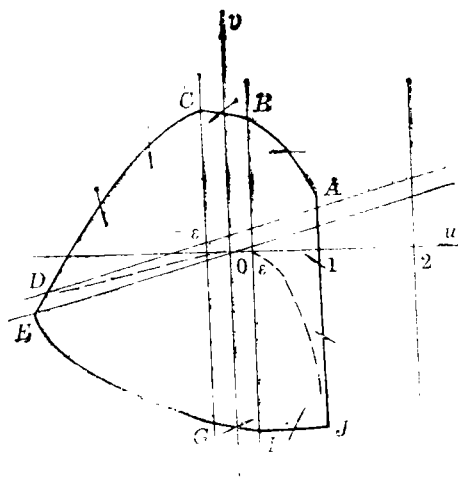


图 1

参 考 文 献

- [1] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag(1988).
- [2] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag

(1983).

- [3] 刘曾荣, 徐振源, 从具体例子看惯性流形概念的推广, 力学学报, 24(4), 1992.
- [4] B. D. Hassard, Kazarinoff and Wan Y.H., *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, Cambridge University Press(1981).

An Example of PDE with Two Attractors

Wang Guanxiang Xu Zhengyuan

(*Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou 215006*)

Liu Zengrong

(*LNM, Institute of Mechanics Academy, Beijing 100081*)
(*Suzhou University, Suzhou 215006*)

Abstract

A system of reaction-diffusion equations with two attractors is given in this paper. The construction of the attractors is discussed.

Key words invariant region, attractors, Hopf bifurcation