

宾汉流体沿斜面流动的稳定性分析*

王培光 王振东

(河北大学数学系, 保定 071002) (天津大学力学系, 天津 300072)
(蔡树棠推荐, 1994年12月1日收到)

摘 要

本文讨论了在二维扰动情况下, 宾汉流体沿斜面流动的稳定性问题。在长波解情况下, 得到了临界雷诺数的近似表示, 并分析了屈服应力对流动稳定性的影响。

关键词 Bingham流体 屈服应力 临界雷诺数 稳定性

一、引 言

由于流体沿斜面流动的稳定性问题在感光材料涂布, 泥石流的防治等领域中的应用^[1,2], 使得人们对稳定性问题的讨论越来越多。对于二层牛顿流体, 幂律流体和微弹性流体已有一些较好结果^{[3]~[6]}, 但对粘塑性问题的讨论尚未见到。本文以二层Bingham流体模型为例, 讨论其沿斜面流动的稳定性问题和屈服应力对流动稳定性的影响。

二、稳定性问题和边界条件

本文讨论二维扰动情况, 建立坐标系如图1所示。

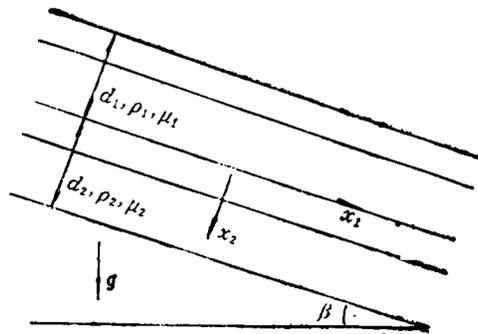


图 1

对于Bingham流体, 其本构方程为

* 河北省自然科学基金资助项目

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ij} &= -p\delta_{ij} + \left(\mu + \tau_0 / \left| \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \right|^{1/2} \right) \dot{\gamma}_{ij}, & \frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij} &\geq \tau_0^2 \\ \dot{\gamma}_{ij} &= 0, & \frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij} &\leq \tau_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中: τ_{ij} 是应力张量, $\dot{\gamma}_{ij} (= \partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j)$ 是形变速率, μ 是塑性粘度, τ_0 是屈服应力。

对于二层流体, 引进下列无量纲参数

$$\begin{aligned} x &= x_1/d_2, \quad y = x_2/d_2, \quad t = t_1 \bar{u}_2(d_2) \\ \delta &= d_1/d_2, \quad r = \rho_1/\rho_2, \quad \mu = \mu_1/\mu_2 \\ \tau_1 &= \tau_{10}/\rho_1 g d_2 \sin \beta, \quad \tau_2 = \tau_{20}/\rho_2 g d_2 \sin \beta \\ u_i &= \bar{u}_i / \bar{u}'_2(d_2) d_2, \quad v_i = \bar{v}_i / \bar{u}'_2(d_2) d_2, \quad p_i = \bar{p}_i / \rho_i [\bar{u}'_2(d_2)]^2 d_2 \end{aligned}$$

这里符号 1, 2 分别表示上、下二层流体, 上标“—”表示各种平均流动量。

对于二层 Bingham 流体可视为四层流体流动问题。在基本流动为平行流动的假定下, 则由运动方程和 (1) 在自由表面处剪切应力为零, (2) 在界面处速度分量连续, 剪切应力连续; (3) 在固壁处无滑移性, 可求得基本流速

$$\left. \begin{aligned} U_{11}(y) &= a_1(-\delta + \tau_1)^2 + b_1(-\delta + \tau_1) + k_1, & -\delta \leq y \leq -\delta + \tau_1 \\ U_{12}(y) &= a_1 y^2 + b_1 y + k_1, & -\delta + \tau_1 \leq y \leq 0 \\ U_{21}(y) &= a_2 \tau_2^2 + b_2 \tau_2 + k_2, & 0 \leq y \leq \tau_2 \\ U_{22}(y) &= a_2 y^2 + b_2 y + k_2, & \tau_2 \leq y \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

其中

$$a_1 = -\frac{r}{2\mu(1+r\delta-r\tau_1-\tau_2)}$$

$$a_2 = \frac{\mu}{r} a_1$$

$$b_1 = -\frac{r}{\mu(1+r\delta-r\tau_1-\tau_2)}$$

$$b_2 = -\frac{r\delta-r\tau_1-\tau_2}{(1+r\delta-r\tau_1-\tau_2)}$$

$$k_1 = a_2 \tau_2^2 + b_2 \tau_2 + k_2$$

$$k_2 = \frac{(1/2) + r\delta - r\tau_1 - \tau_2}{1 + r\delta - r\tau_1 - \tau_2}$$

考虑主流的扰动情况, 令

$$u_i = U_i + \tilde{u}_i, \quad v_i = \tilde{v}_i, \quad p_i = \bar{p}_i + \tilde{p}_i \quad (2.3)$$

其中上标符号“~”表示扰动量。

引进扰动流函数 $\psi(x, y, t)$, 并设

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) \exp\{i\alpha(x - ct)\} \quad (2.4)$$

其中 $\alpha (= 2\pi d_2 / \lambda)$ 是扰动波数; λ 是扰动波长, $c (= c_r + ic_i)$ 是扰动波速。

则同 [4] 类似分析可得扰动方程

$$\begin{cases} i\alpha R_1[(U_1-c)(\varphi_1''-\alpha^2\varphi_1)-U_1''\varphi_1] = (\varphi_1''/U_1'')'' + 2\alpha^2\{-2(y+\delta-\tau_1)/U_1' \\ \quad + 1/U_1''\}\varphi_1' + (1/U_1'')\alpha^4\varphi_1 + (1/U_1'')''\alpha^2\varphi_1 \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} i\alpha R_2[(U_2-c)(\varphi_2''-\alpha^2\varphi_2)-U_2''\varphi_2] = (\varphi_2''/U_2'')'' + 2\alpha^2\{-2(y+r\delta \\ \quad -r\tau_1)/U_2' + 1/U_2''\}\varphi_2' + (1/U_2'')\alpha^4\varphi_2 + (1/U_2'')''\alpha^2\varphi_2 \end{cases} \quad (2.6)$$

其中符号 ' 为对 y 求微商, R 是雷诺数.

在方程(2.5)和(2.6)中, $c = c_r + ic_i$, c_i 的符号将决定流动是否稳定, $c_i = 0$ 可给出流动稳定与否的临界条件.

下面给出方程(2.5)~(2.6)所应满足的边界条件. 规定边界条件取处如下:

在自由表面处 $y = -\delta + \xi(x, t)$, 上层流体界面处 $y = -\delta + \tau_1 + \xi_1(x, t)$; 在上下层流体界面处 $y = \eta(x, t)$, 下层流体界面处 $y = \tau_2 + \xi_2(x, t)$.

由线性化运动学条件

$$\begin{aligned} \text{自由界面处} \quad & \partial\xi/\partial t + U_{11}\partial\xi/\partial x = -\partial\psi_{11}/\partial x \\ \text{上层流体界面处} \quad & \partial\xi_1/\partial t + U_{12}\partial\xi_1/\partial x = -\partial\psi_{12}/\partial x \\ \text{上下层流体界面处} \quad & \partial\eta/\partial t + U_{21}\partial\eta/\partial x = -\partial\psi_{21}/\partial x \\ \text{下层流体界面处} \quad & \partial\xi_2/\partial t + U_{22}\partial\xi_2/\partial x = -\partial\psi_{22}/\partial x \\ \text{其中} \quad & \psi_{lj} = \varphi_{lj}(y) \exp\{i\alpha(x-ct)\} \quad (l, j = 1, 2) \end{aligned}$$

可求得

$$\begin{aligned} \xi &= [\varphi_{11}(-\delta)/c_1] \exp\{i\alpha(x-ct)\} \\ \xi_1 &= [\varphi_{12}(-\delta+\tau_1)/c_1'] \exp\{i\alpha(x-ct)\} \\ \eta &= [\varphi_{21}(0)/c_2] \exp\{i\alpha(x-ct)\} \\ \xi_2 &= [\varphi_{22}(\tau_2)/c_2'] \exp\{i\alpha(x-ct)\} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} c_1 &= c - U_{11}(-\delta), \quad c_1' = c - U_{12}(-\delta + \tau_1) \\ c_2 &= c - U_{21}(0), \quad c_2' = c - U_{22}(\tau_2) \end{aligned}$$

边界条件是:

在自由表面处, 切应力为零, 法向应力与表面张力引起的法向应力相平衡.

在界面处, 速度分量连续, 切应力连续, 法向应力差等于表面张力引起的法向应力.

在固壁处, 无滑移.

对于Bingham流体, 可分为液体状态和固体状态两部分. 对塑性区部分(固体状态), 由本构方程可知 $\varphi_{11}(y), \varphi_{21}(y)$ 分别是常数, 再由界面处速度分量连续的条件可求得 $\varphi_{11}(y) = \varphi_{12}(-\delta + \tau_1), \varphi_{21}(\tau_2) = \varphi_{22}(y)$. 因而有 $\xi = \xi_1, \eta = \xi_2$.

至此本文讨论的问题转化为 Bingham 流体的流体部分沿斜面流动问题, 边界条件的取处为

$$y = -\delta + \tau_1 + \xi, \quad y = \tau_2 + \eta$$

进一步注意到在小扰动情况下 $\xi \ll 1, \eta \ll 1$, 边界条件的取处可分别为 $y = -\delta + \tau_1, y = \tau_2$.

为方便, 分别用 U_1, U_2 表示 $U_{12}, U_{22}, \varphi_1, \varphi_2$ 分别表示 $\varphi_{12}, \varphi_{22}$; 进一步令

$$\begin{aligned} F_j(y) &= \alpha(\cot\beta/R_j + \alpha^2 S_j)\varphi_j/c_j + \alpha U_j' \varphi_j - \alpha(U_j - c) \\ &\quad - i[(\varphi_j''/U_j'')' + (1/U_j'')'\alpha^2\varphi_j - (4y/U_j'' - 1/U_j'')\alpha^2\varphi_j] \end{aligned} \quad (j = 1, 2)$$

则边界条件的数学表示为

$$(i) \quad \varphi_1''(-\delta + \tau_1) + \alpha^2\varphi_1(-\delta + \tau_1) + U_1''(-\delta + \tau_1)\varphi_1(-\delta + \tau_1)/c_1 = 0$$

- (ii) $F_1(-\delta + \tau_1) = 0$
 (iii) $\varphi_1^i(0) = \varphi_1^i(\tau_2) - [U_2^i(\tau_2) - U_2^i(0)]\varphi_2(\tau_2)/c_2 = 0$
 (iv) $\varphi_1(0) = \varphi_2(\tau_2)$
 (v) $r(\varphi_1''(0) + \alpha^2\varphi_1(0))/U_1''(0) - (\varphi_1''(\tau_2) + \alpha^2\varphi_2(\tau_2))/U_1''(\tau_2) + (r-1)\varphi_2(\tau_2)/c_2 = 0$
 (vi) $rF_1(0) - F_2(\tau_2) = 0$
 (vii) $\varphi_2(1) = 0$
 (viii) $\varphi_2^i(1) = 0$

其中 $S_j = T_j/\rho_j d_2 U_j^2$, T_j 是表面张力。

在本文的讨论中, 我们有 $R_1 = R_2 = R$.

三、长波解和结论

方程 (2.5) 和 (2.6) 与边界条件 (i)~(viii) 构成了特征值问题。本文考虑长波情况, 采用 Yih^[7] 的方法将特征函数 φ_1 , φ_2 和特征值 c 展成 α 的幂级数形式

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{10} + \alpha\varphi_{11} + \alpha^2\varphi_{12} + \dots \\ \varphi_2 &= \varphi_{20} + \alpha\varphi_{21} + \alpha^2\varphi_{22} + \dots \\ c &= c_0 + \alpha\Delta c + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

将 (3.1) 代入方程 (2.5)、(2.6) 和边界条件, 合并 α 的零次幂项, 我们有

$$\varphi_{10}(y) = Dy^2 + Ay + B, \quad \varphi_{20}(y) = y^2 - 2y + 1 \quad (3.2)$$

其中

$$\begin{aligned} B &= (\tau_2 - 1)^2, \quad A = B(2a_2\tau_2 + b_2 - b_1)/c_{20} - 2(\tau_2 - 1) \\ D &= 1/\mu - a_1(r-1)B/rc_{20} \end{aligned}$$

再由边界条件 (i) 可求得 c_{20} 满足的方程

$$2(c_{20} + l)D + 2a_1(D(-\delta + \tau_1)^2 + A(-\delta + \tau_1) + B) = 0 \quad (3.3)$$

其中

$$l = U_2(\tau_2) - U_1(-\delta + \tau_1)$$

求得 c_{20} 后, 由 $c_0 = c_{20} + U_2(\tau_2)$ 可求出 c_0 .

将 α 的一次幂系数合并, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{11}(y) &= A_1 \left(yU_1 - 2 \int_0^y U_1 dy \right) + B_1 U_1 + D_1 y + E_1 + i\alpha R K_1(y) \\ \varphi_{21}(y) &= A_2 \left(yU_2 - 2 \int_0^y U_2 dy \right) + B_2 U_2 + D_2 y + E_2 + i\alpha R K_2(y) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

其中

$$\begin{aligned} K_1(y) &= - \int_0^y \int_0^y \left\{ U_1'' \int_0^y \int_0^y (Ay + B + c_0 D) U_1'' dy dy \right\} dy dy \\ K_2(y) &= \int_0^y \int_0^y \left\{ U_2'' \int_0^y \int_0^y (U_2^i(1)y - U_2^i(1) - c_0) U_2'' dy dy \right\} dy dy \end{aligned}$$

$A_j, B_j, D_j, E_j (j=1, 2)$ 可由边界条件确定。

在一阶近似中, 我们的目的是求出 Δc , 再由判别条件求出临界雷诺数 R_c , 经计算可得

$$\Delta c = i\{(G/H)R - (\phi/H)\cot\beta\} \tag{3.5}$$

对于给定的 r, δ, μ, τ , $\Delta c = ic_i$, 流动稳定性的条件为

$$(G/H)R - (\Phi/H)\cot\beta \leq 0 \tag{3.6}$$

临界雷诺数 $R_o = \Phi \cot\beta / G$

这里 $\Phi = L\varphi_{10}(-\delta + \tau_1)/c_{10} + M[(r-1)\varphi_{20}(\tau_2)/c_{20} + r\varphi_{10}(-\delta + \tau_1)/c_{10}]$

$$G = 2a_2 K_1''(-\delta + \tau_1) + K_1(-\delta + \tau_1)/c_{10} + (\delta - \tau_1)K_2'(1)/c_{10} \\ + (K_2'(1) - K_2(1)) [2a_2(\tau_2 - 1) - N/r] / \varphi_{20}(\tau_2) \\ + (-L + M)(-K_1''(-\delta + \tau_1) + Ac_{10} + M) [B(rU_1(0) \\ - U_2'(\tau_2)) - c_{20}(rDU_1'(0) + rA - U_2'(\tau_2) + U_1'(1))]$$

其中

$$L = \delta - \tau_1 + [(\delta - \tau_1)(U_1(-\delta + \tau_1) + U_1(0)) + 2\int_0^{-\delta + \tau_1} U_1 dy] / c_{10} \\ N = [1 + (U_1(-\delta + \tau_1) - U_1(0) + (\delta - \tau_1)U_1'(0)) / c_{10}] / r \\ M = B(\delta - \tau_1) / c_{10} + (U_2'(1) + 2\int_0^1 U_2 dy) [(U_2'(\tau_2) - U_2'(1)) / c_{10} - N] / \varphi_{20}(\tau_2)$$

若 $R < R_o, c_i < 0$, 此时流动稳定, 反之 $R > R_o, c_i > 0$ 时相反。

$\tau_1 = \tau_2 = 0$, 即为牛顿流体情况^[9]。将 $\tau_1 = \tau_2 = 0$ 代入本文结果, 得到了与 [3] 一致的结果。

本文对不同厚度的 δ , 数值计算了 μ, τ 对流动稳定性的影响。

μ 的变化对 R_o 的影响与二层牛顿流体的稳定性有着定性一致的结果。

本文主要讨论屈服应力 τ 对稳定性的影响。

δ 一定时, 若 τ_1, τ_2 同时增加, $R_o / \cot\beta$ 增大, 从而说明屈服应力使流动趋于稳定。表1~2 给出了 $r = 0.9, \tau_1 = \tau_2$ 时, $R_o / \cot\beta$ 随 τ 的变化规律。由表可看出, $\delta < 1$ 时 $R_o / \cot\beta$ 变化更为明显。

$\delta = 0.1$ 时, 表3~4 给出了 $\delta = 0.1$ 时 $R_o / \cot\beta$ 随 τ 的变化情况。可以看出, 当 τ_1 固定 τ_2 变化时, $R_o / \cot\beta$ 增加但不明显, 反之 $R_o / \cot\beta$ 变化显著, 即 τ_1 对流动稳定性影响较大。

本文分析限于二维长波 ($\alpha \ll 1$) 和小扰动振幅 ($\zeta \ll 1, \eta \ll 1$) 的情况。

表1 $\delta = 0.1, r = 0.9, \tau_1 = \tau_2$

表2 $\delta = 1, r = 0.9, \tau_1 = \tau_2$

$R_o / \cot\beta$ μ	τ				$R_o / \cot\beta$ μ	τ			
	0.02	0.04	0.06	0.08		0.04	0.08	0.10	0.15
0.1	2.1404	2.2431	2.4120	3.0469	0.1	0.0159	0.0163	0.0168	0.0175
0.3	2.3223	2.4765	2.8945	4.8997	0.3	0.2798	0.2891	0.2945	0.3108
0.5	2.5077	2.7611	3.4569	6.8586	0.5	0.3589	0.3617	0.3789	0.3909

表3 $\delta = 0.1, \tau_1 = 0.02, r = 0.9$

表4 $\delta = 0.1, \tau_2 = 0.05, r = 0.9$

$R_o / \cot\beta$ μ	τ_2				$R_o / \cot\beta$ μ	τ_1			
	0.02	0.05	0.07	0.08		0.02	0.04	0.06	0.08
0.1	2.1404	2.1607	2.1704	2.1815	0.1	2.1607	2.2714	2.4621	3.6746
0.3	2.3223	2.3544	2.3694	2.3861	0.3	2.3544	2.5066	2.9143	5.0323
0.5	2.5077	2.5522	2.5812	2.5948	0.5	2.5522	2.8049	3.6560	7.5802

参 考 文 献

- [1] 王振东, 感光材料涂液薄膜沿斜面流动的稳定性, *感光材料*, 4 (1980), 7.
- [2] 范椿, 一维定常泥石流的数学模型, *力学与实践*, 16(1) (1994), 50.
- [3] T.W. Kao, Role of viscosity stratification in the stability of two-layer flow down an incline, *J. Fluid Mech.*, 33(3) (1968), 561.
- [4] Fan Chun, et al., Stability of two layers of power law fluids flow down an inclined plane, *10th Inter. Congress on Rheology*, Sydney (1988).
- [5] S. Zahorski, Role of elasticity stratification in two-layer flow down an inclined plane, *Arch. Mech. Stos.*, 21 (1969), 571.
- [6] S.I. Weinstein, Wave propagation in the flow of shear-thinning fluids down an inclined plane, *AICHE J.*, 12 (1990), 36.
- [7] C.S. Yih, Stability of liquid down an inclined plane, *Phys. Fluids*, 6 (1963), 321.

The Analysis of Stability of Bingham Fluid Flowing Down and Inclined Plane

Wang Peiguang

(Department of Mathematics, Hebei University, Baoding
071002, P.R. China)

Wang Zhendong

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072,
P.R. China)

Abstract

In this paper, the stability problem of Bingham fluids flowing down an inclined plane is studied with respect to two dimensional disturbances. The critical Reynolds number is given in the case of long waves, and the effect of yield stress on stability is analysed.

Key words Bingham fluid, yield stress, critical Reynolds number, stability