

# 加筋碟形薄壳的塑性屈曲分析

郝刚 曾广武 郝强

(华中理工大学船舶和海洋工程系 武汉 430074)

(潘立宙推荐, 1994年12月28日收到)

## 摘 要

本文采用非线性前屈曲一致理论分析均布外压下加筋碟形薄壳的塑性屈曲问题,建立了这类壳体的能量表达式和屈曲方程,给出了简明的计算格式。数值分析结果表明,所导出的算法具有较好的精度,计算过程也简单方便。

**关键词** 加筋旋转薄壳 碟形薄壳 均布外压 塑性屈曲

## 一、问题的提出

加筋碟形薄壳是一种由球壳和环壳两部分组合而成的工程结构,常用作导弹的尾罩和潜艇耐压舰体的端部封头等。此时壳体承受均匀分布的外压力,屈曲成为主要的破坏形式。工程上常用加筋球壳公式来估算其临界压力,显然这会带来较大的误差,使用有限元法进行分析则将需要较高的计算费用,不宜用于设计的初始阶段。本文采用非线性前屈曲一致理论进行这类壳体在均布外压作用下的塑性屈曲分析,导出了建立在能量原理基础上的求解公式,可以求解加筋球壳和加筋碟形薄壳的塑性屈曲问题。

## 二、基本方程

本文所讨论壳体的基本形式如图1所示。

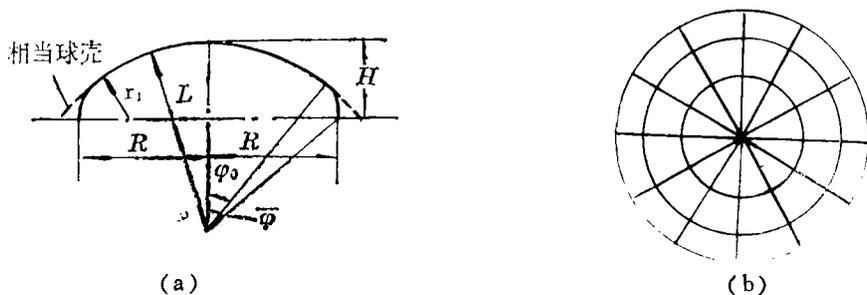


图1 壳体的基本形式

\* 1994年4月10日第一收到。

由文献[1]可得计及几何非线性时壳体的应变关系为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\varphi} &= \varepsilon_{\varphi}^{(1)} + \varepsilon_{\varphi}^{(2)} = \left\{ u' + \frac{w}{R_1} \right\} + \{ 0.5(\beta^2 + \gamma^2) \} \\ \varepsilon_{\theta} &= \varepsilon_{\theta}^{(1)} + \varepsilon_{\theta}^{(2)} = \left\{ \frac{v'}{r} + ur'/r + \frac{w}{R_2} \right\} + \left\{ \frac{1}{2}(\psi^2 + \gamma^2) \right\} \\ \varepsilon_{\varphi\theta} &= \varepsilon_{\varphi\theta}^{(1)} + \varepsilon_{\varphi\theta}^{(2)} = \left\{ \frac{\dot{u}}{r} + r \left( \frac{v}{r} \right)' \right\} + \{ \beta\psi \} \\ k_{\varphi} &= \beta', \quad k_{\theta} = \frac{\dot{\psi}}{r} + \beta \frac{r'}{r}, \quad k_{\varphi\theta} = \frac{\dot{\beta}}{r} - \psi \frac{r'}{r} - \frac{r'}{R_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

式中,  $r = R_2 \sin \varphi$ ,  $\beta = \frac{u}{R_1} - w'$ ,  $\psi = \frac{v}{R_2} - \frac{w}{r}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2} \left( -\frac{\dot{u}}{r} + v' + \frac{vr'}{r} \right)$ ,

$$(\quad)' = \frac{\partial(\quad)}{R_1 \partial \varphi}, \quad (\dot{\quad}) = \frac{\partial(\quad)}{\partial \theta}.$$

上标(1)和(2)分别表示应变中的线性和非线性部分,  $R_1$ 和 $R_2$ 分别为径向和环向曲率半径。

设屈曲前状态为 $e$ , 屈曲时状态为 $p$ , 将屈曲前位移模式代入(2.1)可得屈曲前壳体的应变关系, 屈曲时应变关系可表示为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{p\varphi} &= \varepsilon_{p\varphi}^{(1)} + \varepsilon_{p\varphi}^{(2)} + \varepsilon_{e,p\varphi} = \left\{ u_p' + \frac{w_p}{R_1} \right\} + \left\{ \frac{1}{2}(\beta_p^2 + \gamma_p^2) \right\} + \{ \beta\beta_p + \gamma\gamma_p \} \\ \varepsilon_{p\theta} &= \varepsilon_{p\theta}^{(1)} + \varepsilon_{p\theta}^{(2)} + \varepsilon_{e,p\theta} = \left\{ v_p' \frac{1}{r} + \frac{u_p r'}{r} + \frac{w_p}{R_2} \right\} + \left\{ \frac{1}{2}(\psi_p^2 + \gamma_p^2) \right\} + \{ \psi\psi_p + \gamma\gamma_p \} \\ \varepsilon_{p\varphi\theta} &= \varepsilon_{p\varphi\theta}^{(1)} + \varepsilon_{p\varphi\theta}^{(2)} + \varepsilon_{e,p\varphi\theta} = \left\{ \frac{\dot{u}_p}{r} + r \left( \frac{v_p}{r} \right)' \right\} + \{ \beta_p\psi_p \} + \{ \beta\psi_p + \psi\beta_p \} \\ k_{p\varphi} &= \beta_p', \quad k_{p\theta} = \frac{\dot{\psi}_p}{r} + \beta_p \frac{r'}{r}, \quad k_{p\varphi\theta} = \frac{\dot{\beta}_p}{r} - \psi_p \frac{r'}{r} - \frac{v_p'}{R_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式中,

$$\beta_p = \frac{u_p}{R_1} - w_p', \quad \psi_p = \frac{v_p}{R_2} - \frac{w_p}{r}, \quad \gamma_p = \frac{1}{2} \left( -\frac{\dot{u}_p}{r} + v_p' + \frac{v_p r'}{r} \right)$$

下标 $e,p$ 表示屈曲前后位移交叉所引起的应变。

设 $\theta_m$ 为第 $m$ 根径向加强筋的环向位置,  $Z_m$ 为壳体中面到加强筋形心的距离, 令 $\theta = \theta_m$ 代入(2.1)式与(2.2)式便可得出径向筋的应变关系:

$$\bar{\varepsilon}_{m\varphi} = \varepsilon_{m\varphi} + Z_m k_{m\varphi}, \quad \bar{\varepsilon}_{p,m\varphi} = \varepsilon_{p,m\varphi} + Z_m k_{p,m\varphi} \quad (2.3)$$

式中,  $\varepsilon_{m\varphi} = \varepsilon_{\varphi}|_{\theta=\theta_m}$ ,  $\varepsilon_{p,m\varphi} = \varepsilon_{p\varphi}|_{\theta=\theta_m}$ ,  $k_{m\varphi} = k_{\varphi}|_{\theta=\theta_m}$ ,  $k_{p,m\varphi} = k_{p\varphi}|_{\theta=\theta_m}$ .

同理, 可得出环向筋的应变关系:

$$\bar{\varepsilon}_{c\theta} = \varepsilon_{c\theta} + Z_c k_{c\theta}, \quad \bar{\varepsilon}_{p,c\theta} = \varepsilon_{p,c\theta} + Z_c k_{p,c\theta} \quad (2.4)$$

式中,  $\varepsilon_{c\theta} = \varepsilon_{\theta}|_{\varphi=\varphi_c}$ ,  $\varepsilon_{p,c\theta} = \varepsilon_{p\theta}|_{\varphi=\varphi_c}$ ,  $k_{c\theta} = k_{\theta}|_{\varphi=\varphi_c}$ ,  $k_{p,c\theta} = k_{p\theta}|_{\varphi=\varphi_c}$ .

$\varphi_c$ 为第 $c$ 根环向筋的径向位置,  $Z_c$ 为壳体中面至该环向筋形心的距离。

严格说来, 加筋碟形薄壳的屈曲问题是一个弹塑性屈曲问题, 求解时要区分加载区和卸载区, 十分复杂。但许多资料表明由于问题的复杂性, 使用弹塑性分析方法效果往往并不理想。因此, 本文将加筋碟形薄壳的屈曲作为塑性屈曲问题处理, 即全部采用塑性应力应变关系。

采用塑性屈曲理论和 Mises 屈服准则, 壳体中塑性形变理论的应力应变关系可表示为<sup>[2]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_{\varphi} &= \frac{E}{1-\mu^2} (a_{11}d\varepsilon_{\varphi} + \mu a_{12}d\varepsilon_{\theta} + a_{13}d\varepsilon_{\varphi\theta}) \\ d\sigma_{\theta} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\mu a_{12}d\varepsilon_{\varphi} + a_{22}d\varepsilon_{\theta} + a_{23}d\varepsilon_{\varphi\theta}) \\ d\tau_{\varphi\theta} &= \frac{E}{1-\mu^2} \left( a_{13}d\varepsilon_{\varphi} + a_{23}d\varepsilon_{\theta} + \frac{1-\mu}{2} a_{33}d\varepsilon_{\varphi\theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{4(1-\mu^2)\phi_s}{3[1-(1-2\mu)\phi_s/3]} \left\{ \frac{1}{1+(1-2\mu)\phi_s} - \frac{3(1-\phi_i/\phi_s)}{4[1-(1-2\mu)\phi_s/3]} \cdot \frac{K_2^2}{K} \right\} \\ a_{22} &= \frac{4(1-\mu^2)\phi_s}{3[1-(1-2\mu)\phi_s/3]} \left\{ \frac{1}{1+(1-2\mu)\phi_s} - \frac{3(1-\phi_i/\phi_s)}{4[1-(1-2\mu)\phi_s/3]} \cdot \frac{K_2^2}{K} \right\} \\ a_{33} &= \frac{2(1+\mu)\phi_s}{[1-(1-2\mu)\phi_s/3]} \cdot \left\{ \frac{1}{3} - \frac{(1-\phi_i/\phi_s)}{[1-(1-2\mu)\phi_s/3]} \cdot \left( \frac{\tau_{\varphi\theta}}{\sigma_i} \right)^2 \right\} \\ a_{12} &= \frac{2(1-\mu^2)\phi_s}{3\mu[1-(1-2\mu)\phi_s/3]} \cdot \left\{ \frac{1-(1-2\mu)\phi_s}{1+(1-2\mu)\phi_s} - \frac{3(1-\phi_i/\phi_s)}{2[1-(1-2\mu)\phi_s/3]} \cdot \frac{K_1K_2}{K} \right\} \\ a_{13} &= \frac{(1-\mu^2)(\phi_s-\phi_i)}{[1-(1-2\mu)\phi_s/3][1-(1-2\mu)\phi_i/3]} \cdot \frac{\tau_{\varphi\theta}}{\sigma_i} \cdot \frac{K_1}{K} \\ a_{23} &= \frac{(1-\mu^2)(\phi_s-\phi_i)}{[1-(1-2\mu)\phi_s/3][1-(1-2\mu)\phi_i/3]} \cdot \frac{\tau_{\varphi\theta}}{\sigma_i} \cdot \frac{K_2}{K} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} K &= 1 - \frac{(1-2\mu)(\phi_s-\phi_i)(\sigma_{\varphi}+\sigma_{\theta})^2}{[1+(1-2\mu)\phi_s][3-(1-2\mu)\phi_i]\sigma_i^2} \\ K_1 &= \frac{1}{\sigma_i} \cdot \left\{ \frac{1+(1-2\mu)\phi_s/3}{1+(1-2\mu)\phi_s} \sigma_{\varphi} - \frac{2(1-2\mu)\phi_s/3}{1+(1-2\mu)\phi_s} \sigma_{\theta} \right\} \\ K_2 &= \frac{1}{\sigma_i} \cdot \left\{ -\frac{2(1-2\mu)\phi_s/3}{1+(1-2\mu)\phi_s} \sigma_{\varphi} + \frac{1+(1-2\mu)\phi_s/3}{1+(1-2\mu)\phi_s} \sigma_{\theta} \right\} \\ \phi_s &= E_s^0/E, \quad \phi_i = E_i^0/E \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

这里,  $E_s^0$ 和 $E_i^0$ 分别为单向应力—应变图上的割线模量和切线模量, 与应力强度—应变强度曲线图上的割线模量 $E_s$ 和切线模量 $E_i$ 的关系为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E_s^0} &= \frac{1-2\mu}{3E} + \frac{1}{E_s}, \quad E_s = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \\ \frac{1}{E_i^0} &= \frac{1-2\mu}{3E} + \frac{1}{E_i}, \quad E_i = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

相应的屈服强度为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i^2 &= \sigma_{\varphi}^2 + \sigma_{\theta}^2 - \sigma_{\varphi}\sigma_{\theta} + 3\tau_{\varphi\theta}^2 \\ \varepsilon_i^2 &= \frac{1}{3} \left\{ (\varepsilon_{\varphi} + \varepsilon_{\theta})^2 + \varepsilon_{\varphi\theta}^2 + \frac{3(\varepsilon_{\varphi} + \varepsilon_{\theta})^2}{[1+4(1-2\mu)E_s/(3E)]^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

忽略横向应变和扭转的影响, 则加强筋处于单向应力状态。对于径向筋, 有:

$$d\bar{\sigma}_\varphi = a_m E d\bar{\varepsilon}_\varphi \quad (2.10)$$

其中,

$$a_m = \frac{4\phi_s}{[3(1-\phi_s/3)]} \cdot \left\{ \frac{1}{(1+\phi_s)} - \frac{3}{4} \cdot \frac{(1-\phi_s/\phi_s)}{(1-\phi_s/3)} \cdot \frac{K_1^2}{K} \right\} \quad (2.11)$$

$$K_1 = \frac{(1+\phi_s/3)}{1+\phi_s}, \quad K = 1 - \frac{\phi_s - \phi_s}{(1+\phi_s)(3-\phi_s)}$$

对于环向筋, 有:

$$d\bar{\sigma}_\theta = a_o E d\bar{\varepsilon}_\theta \quad (2.12)$$

其中,

$$a_o = \frac{4\phi_s}{[3(1-\phi_s/3)]} \cdot \left\{ \frac{1}{(1+\phi_s)} - \frac{3}{4} \cdot \frac{(1-\phi_s/\phi_s)}{(1-\phi_s/3)} \cdot \frac{K_2^2}{K} \right\} \quad (2.13)$$

$$K_2 = \frac{(1+\phi_s/3)}{1+\phi_s}$$

### 三、能量表达式

加筋碟形薄壳的总能量可以表示为

$$\Pi = V_s + V_\theta + V_\varphi + U \quad (3.1)$$

式中,  $V_s$ ,  $V_\theta$ 和 $V_\varphi$ 分别为壳体、径向筋及环向筋的变形能,  $U$ 为外力势能。

对于每部分变形能, 可依据所处状态和应变类型进行分解。对本文所讨论问题, 应变可以表示为

$$\varepsilon = \varepsilon_s^{(1)} + \varepsilon_s^{(2)} + \varepsilon_p^{(1)} + \varepsilon_p^{(2)} + \varepsilon_{sp}, \quad k = k_s + k_p \quad (3.2)$$

式中,  $\varepsilon_s^{(i)}$ 和 $\varepsilon_p^{(i)}$  ( $i=1,2$ ) 分别为屈曲前和屈曲时应变的线性项和二次项,  $\varepsilon_{sp}$ 为前屈曲位移和屈曲位移交叉所引起的应变。

以下分别给出各部分变形能的表达式。

#### 3.1 壳体变形能

$$V_s^{(1)} = \frac{C}{2} \int_V \left\{ \left[ a_{11} (\varepsilon_{i\varphi}^{(1)})^2 + a_{22} (\varepsilon_{i\theta}^{(1)})^2 + 2\mu a_{12} \varepsilon_{i\varphi}^{(1)} \varepsilon_{i\theta}^{(1)} + \frac{1-\mu}{2} a_{33} (\varepsilon_{i\varphi\theta}^{(1)})^2 \right] \right. \\ \left. + Z^2 [a_{11} k_{i\varphi}^2 + a_{22} k_{i\theta}^2 + 2\mu a_{12} k_{i\varphi} k_{i\theta} + 2(1-\mu) a_{33} k_{i\varphi\theta}^2] \right\} dv$$

$$V_s^{(2)} = \frac{C}{2} \int_V \left[ a_{11} (\varepsilon_{i\varphi}^{(2)})^2 + a_{22} (\varepsilon_{i\theta}^{(2)})^2 + 2\mu a_{12} \varepsilon_{i\varphi}^{(2)} \varepsilon_{i\theta}^{(2)} + \frac{1-\mu}{2} a_{33} (\varepsilon_{i\varphi\theta}^{(2)})^2 \right] dv$$

$$V_s^{(12)} = C \int_V \left[ a_{11} \varepsilon_{i\varphi}^{(1)} \varepsilon_{i\varphi}^{(2)} + a_{22} \varepsilon_{i\theta}^{(1)} \varepsilon_{i\theta}^{(2)} + \mu a_{12} (\varepsilon_{i\varphi}^{(1)} \varepsilon_{i\theta}^{(2)} + \varepsilon_{i\varphi}^{(2)} \varepsilon_{i\theta}^{(1)}) \right. \\ \left. + \frac{1-\mu}{2} a_{33} \varepsilon_{i\varphi\theta}^{(1)} \varepsilon_{i\varphi\theta}^{(2)} \right] dv$$

$$V_{sp}^{(1)} = C \int_V \left\{ \left[ a_{11} \varepsilon_{sp} (\varepsilon_{p\varphi}^{(1)} + \varepsilon_{s\varphi}^{(1)}) + a_{22} \varepsilon_{sp} (\varepsilon_{p\theta}^{(1)} + \varepsilon_{s\theta}^{(1)}) \right. \right. \\ \left. \left. + \mu a_{12} (\varepsilon_{sp} \varepsilon_{p\theta}^{(1)} + \varepsilon_{sp} \varepsilon_{s\theta}^{(1)} + \varepsilon_{sp} \varepsilon_{p\varphi}^{(1)} + \varepsilon_{sp} \varepsilon_{s\varphi}^{(1)}) + \frac{1-\mu}{2} a_{33} \varepsilon_{sp} (\varepsilon_{p\varphi\theta}^{(1)} + \varepsilon_{s\varphi\theta}^{(1)}) \right] \right\}$$

$$+ Z^2 [a_{11}k_{\theta\varphi}k_{\varphi\varphi} + a_{22}k_{\theta\theta}k_{\varphi\varphi} + \mu a_{12}(k_{\theta\varphi}k_{\varphi\theta} + k_{\theta\theta}k_{\varphi\varphi}) \\ + 2(1-\mu)a_{33}k_{\theta\varphi\theta}k_{\varphi\varphi\theta}] \} dv$$

$$V_{\theta\theta\varphi}^{(2)} = \frac{C}{2} \int_V [a_{11}(\varepsilon_{\theta\varphi}^{(1)})^2 + a_{22}(\varepsilon_{\varphi\theta}^{(1)})^2 + 2\mu a_{12}\varepsilon_{\theta\varphi}^{(1)}\varepsilon_{\varphi\theta}^{(1)} + \frac{1-\mu}{2}a_{33}(\varepsilon_{\theta\varphi\theta}^{(1)})^2] dv$$

$$V_{\theta\theta\varphi}^{(3)} = C \int_V [a_{11}\varepsilon_{\varphi}^{(1)}\varepsilon_{\theta\varphi}^{(1)} + a_{22}\varepsilon_{\varphi\theta}^{(1)}\varepsilon_{\theta\varphi}^{(1)} + (1-\mu)a_{33}\varepsilon_{\theta\varphi\theta}^{(1)}\varepsilon_{\varphi\varphi\theta}^{(1)} \\ + \mu a_{12}(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}\varepsilon_{\theta\varphi\theta}^{(1)} + \varepsilon_{\varphi\theta}^{(1)}\varepsilon_{\theta\varphi\varphi}^{(1)})] dv$$

式中,  $V_{\theta\theta}^{(j)} = V_{\theta\theta}^{(j)}$ ,  $V_{\theta\varphi}^{(j)}$ , 分别表示前屈曲和屈曲状态的变形能,  $j=1, 2, 12$  分别为变形能的线性项、二次项及高次项,  $V_{\theta\theta\varphi}^{(j)}$  ( $j=1, 2, 3$ ) 为屈曲前后能量交叉项.  $C=E/(1-\mu^2)$ ,  $Z$  为任一点距中面的距离, 其正向指向远离曲率中心一边.

### 3.2 径向筋变形能

径向筋的变形能  $V_{\theta} = \sum_m V_{\theta m}$ ,  $V_{\theta m}$  为第  $m$  根径向筋的变形能, 利用式 (3.2) 进行分解,

有:

$$V_{\theta m}^{(1)} = \frac{E}{2} \int_V a_m [(\varepsilon_{im\varphi}^{(1)})^2 + 2(Z_m + Z)\varepsilon_{im\varphi}^{(1)}k_{im\varphi} + (Z_m + Z)^2 k_{im\varphi}^2] dv$$

$$V_{\theta m}^{(2)} = \frac{E}{2} \int_V a_m (\varepsilon_{im\varphi}^{(2)})^2 dv$$

$$V_{\theta m}^{(12)} = E \int_V a_m \varepsilon_{im\varphi}^{(2)} [\varepsilon_{im\varphi}^{(1)} + (Z_m + Z)k_{im\varphi}] dv$$

$$V_{\theta m\theta\varphi}^{(1)} = E \int_V a_m [\varepsilon_{\theta m\varphi}(\varepsilon_{\varphi m\theta}^{(1)} + \varepsilon_{\theta\varphi m}^{(1)}) + (Z_m + Z)(\varepsilon_{\theta m\varphi}k_{\varphi m\theta} \\ + k_{\theta m\varphi}\varepsilon_{\varphi m\theta}^{(1)} + k_{\theta m\varphi}\varepsilon_{\theta\varphi m}^{(1)}) + (Z_m + Z)^2 k_{\theta m\varphi}k_{\varphi m\theta}] dv$$

$$V_{\theta m\theta\varphi}^{(2)} = \frac{E}{2} \int_V a_m [(\varepsilon_{\theta m\varphi}^{(1)})^2 + 2\varepsilon_{\theta m\varphi}\varepsilon_{\varphi m\theta}^{(2)} + 2\varepsilon_{\varphi m\theta}^{(1)}\varepsilon_{\theta m\varphi}^{(1)} \\ + 2(Z_m + Z)(\varepsilon_{\varphi m\theta}^{(2)}k_{\theta m\varphi} + k_{\varphi m\theta}\varepsilon_{\theta m\varphi}^{(1)})] dv$$

$$V_{\theta m\theta\varphi}^{(3)} = E \int_V a_m (\varepsilon_{\varphi m\theta}^{(2)}\varepsilon_{\theta m\varphi}^{(1)}) dv$$

### 3.3 环向筋变形能

环向筋的变形能  $V_{\varphi} = \sum_c V_{\varphi c}$ ,  $V_{\varphi c}$  为第  $c$  根环向筋的变形能, 与径向筋一样, 也可利用式 (3.2) 进行分解. 只需将径向筋各应变能表达式中的下标  $m$  换为  $c$ ,  $\varphi$  变为  $\theta$  便可得到环向筋各部分能量的表达式, 这里不再赘述.

### 3.4 外力势能

利用式 (3.2) 对外力势能进行分解, 有

$$U = \sum_{i=e,p} [U_i^{(1)} + U_i^{(2)} + U_i^{(3)}]$$

式中, 
$$U_i^{(1)} = \int_A p r w_i dA$$

$$U_i^{(2)} = \frac{1}{2} \int_A p [w_i^2 + w_i v_{i\theta} + r w_i u_{i\varphi} + v_i^2 - v_i w_{i\theta} - r u_i w_{i\varphi}] dA$$

$$U_i^{(3)} = \frac{1}{6} \int_A p [w_i^2 u_{i\varphi} - w_i v_{i\varphi} u_{i\theta} - w_i u_{i\varphi} v_{i\theta} - v_i w_{i\varphi} u_{i\theta} - v_i u_{i\varphi} w_{i\theta} + v_i^2 u_{i\varphi} + u_i v_{i\varphi} w_{i\theta} - u_i w_{i\varphi} v_{i\theta} - u_i w_{i\varphi} v_{i\theta} - u_i w_i w_{i\varphi}] dA$$

#### 四、屈曲方程及求解

##### 4.1 屈曲方程

将式(3.1)在 $(u_e, v_e, w_e)$ 处展开, 得屈曲时的能量增量为:

$$\Delta \Pi = \delta \Pi + \frac{1}{2!} \delta^2 \Pi + \frac{1}{3!} \delta^3 \Pi + \dots \quad (4.1)$$

由于壳体在 $(u_e, v_e, w_e)$ 处是平衡的, 故有 $\delta \Pi = 0$ . 由Trefftz定理可得出壳体的屈曲方程

$$\delta(\delta^2 \Pi) = \delta(V_p + U_p) = 0 \quad (4.2)$$

式中, 
$$V_p = 2V_p^{(1)} = 2(V_{\theta p}^{(1)} + V_{\varphi p}^{(1)} + V_{\psi p}^{(1)})$$

$$U_p = C \int_V \left[ (a_{11} \varepsilon_{e\varphi} + \mu a_{12} \varepsilon_{e\theta}) \beta_p^2 + (a_{22} \varepsilon_{e\theta} + \mu a_{12} \varepsilon_{e\varphi}) \psi_p^2 + \frac{1-\mu}{2} \varepsilon_{e\varphi\theta} \beta_p \psi_p \right] dv$$

$$+ \sum_m \int_V a_m [\varepsilon_{em\varphi} \beta_p^2]_{m\varphi} dv + \sum_c \int_V a_c [\varepsilon_{ec\theta} \beta_p^2]_{c\theta} dv$$

$\varepsilon_{e\varphi}$ ,  $\varepsilon_{e\theta}$ ,  $\varepsilon_{e\varphi\theta}$  及  $\varepsilon_{em\varphi}$ ,  $\varepsilon_{ec\theta}$  可由前屈曲分析求得.

##### 4.2 位移函数

由于设置了径向加强筋, 使壳体在屈曲前就产生了非轴对称变形, 但壳体本身是一种旋转壳, 又承受均布外压, 因此周向位移模式可用三角函数来表示; 径向位移模式则取为某种函数的有限组合. 忽略径向和周向变形, 前屈曲位移模式可表示为:

$$w_e(\varphi, \theta) = \sum_i \phi_{A_j} w_{A_j} + X_w(\theta) \sum_i \phi_{B_j} w_{B_j} \quad (4.3)$$

式中,  $\phi_{A_j}$  和  $\phi_{B_j}$  为基函数,  $w_{A_j}$  和  $w_{B_j}$  为待定的广义坐标,  $X_w(\theta)$  可取为三角函数, 这里取  $X_w(\theta) = \cos N\theta$ ,  $N$  为径向筋总数. 基函数可取为符合变形性态的任意函数.

屈曲时, 前屈曲状态的位移增加了一个无限小增量, 这一增量可表示为:

$$\left. \begin{aligned} u_p &= [\phi_u] \{u\} = \sum_{k=1}^P \phi_{u_k} u_k \\ v_p &= [\phi_v] \{v\} = \sum_{j=1}^S \phi_{v_j} v_j \\ w_p &= [\phi_w] \{w\} = \sum_{m=1}^Q \phi_{w_m} w_m \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

根据壳体屈曲的特点, 取基函数为:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{s1} &= \exp[-\beta\varphi^2] \sin^3 c_1 \varphi \cos n\theta \\ \phi_{\theta 1} &= \exp[-\beta\varphi^2] \sin^3 c_2 \varphi \sin n\theta \\ \phi_{\omega 1} &= \exp[-\beta\varphi^2] [\cos^3 c_1 \varphi - \sin^3 c_2 \varphi \cos n\theta] \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

式中,

$$c_1 = (2m-1)\pi/2\bar{\varphi}, \quad c_2 = m\pi\sqrt{\bar{\varphi}}$$

$m$ ——屈曲时径向1/4整波数,

$n$ ——屈曲时周向整波数,

$\beta$ ——屈曲时沿径向的衰减系数.

### 4.3 求解方法

将式(4.3)~式(4.5)代入式(4.2), 经整理可将加筋碟形薄壳的屈曲问题化为求解下述条件极值问题:

$$\left. \begin{aligned} P_{cr} &= \min_{m,n,\beta} P(m,n,\beta, x_0) \\ \text{s.t.} \quad \delta\Pi|_{x=x_0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

式中,  $x_0$ 为平衡点处的位移.

## 五、算 例

为验证本文方法的正确性, 计算了若干典型问题, 现给出部分计算结果.

### 例1 固支球壳

固支球壳承受均布外压, 基本参数为  $R=32\text{cm}$ ,  $t=0.15\text{cm}$ ,  $\nu=60^\circ$ ,  $E=69.627\text{GPa}$ ,  $\sigma_s=254.973\text{MPa}$ ,  $\mu=0.32$ , 材料应力应变曲线初始数据示于表1, 各种方法所得计算结果列于表2, 临界压力随  $m, n$  变化趋势见表3.

表1 材料应力应变曲线数据

$\epsilon \times 10^3$	2.67	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0
$\sigma(\text{MPa})$	196.133	215.746	240.263	257.425	272.625	284.393	301.554	314.107	325.890	333.426	341.271	349.117	356.962

表2 固支球壳临界压力

方 法	$m$	$n$	$P_{cr}(\text{kPa})/\beta$
球壳解	—	13	1864.636/—
无矩理论解	2	7	2047.727/5.2261
弹性解	2	7	2013.796/5.5262
塑性解	3	8	1413.432/17.401

### 例2 固支碟形薄壳

碟形薄壳几何形状如图1(a)所示, 其有关参数为  $r_1=8\text{cm}$ ,  $L=32.1\text{cm}$ ,  $t=0.28\text{cm}$ ,  $R=20\text{cm}$ ,  $H=11.2\text{cm}$ ,  $\varphi_0=30^\circ$ ,  $\mu=0.32$ , 材料物理性质同例1, 屈曲分析结果列于表4, 变换  $r_1/H$  值进行系列计算, 其结果列于表5.

在  $H$  及  $R$  一定的情况下, 碟形薄壳可能具有不同的外部轮廓. 一个极端情况是环壳半径

表3 临界压力 $P_{cr}$ 随 $n, m$ 变化趋势(kPa)

n	m	无矩理论解		弹性解		塑性解	
		$P_{cr}$	$\beta$	$P_{cr}$	$\beta$	$P_{cr}$	$\beta$
7	1	5204.291	0.01628	5116.914	0.01699	1897.293	0.01929
	2	2047.727	5.5489	2013.796	5.5262	1414.511	17.401
	3	2515.013	10.532	2473.335	10.489	1413.629	30.107
	4	3722.310	10.830	3660.626	10.786	1494.239	10.365
8	1	4164.002	0.04178	4093.786	0.04161	1598.092	0.01929
	2	2054.984	5.5226	2020.954	5.2269	1414.903	20.088
	3	2953.959	9.0449	2905.024	9.0461	1413.432	17.401
	4	4428.389	4.2918	4355.035	4.2924	1671.347	4.173
9	1	3428.503	0.01656	3370.840	0.01656	1433.634	0.01929
	2	2168.937	4.8666	2132.946	4.8673	1413.923	17.401
	3	3475.183	7.1849	3417.519	7.1859	1441.774	6.9228
	4	5084.062	1.9896	5004.137	2.4873	1860.027	2.1154

表4 固支碟形薄壳临界压力

方 法	$P_{cr}$ (kPa)	n	m	$\beta$
相当球壳解	6381.111	4	2	8.346
弹性解	4915.693	4	4	13.430
塑性解	2015.465	5	4	11.358

表5 临界压力 $P_{cr}$ 随 $r_1/H$ 变化趋势(kPa)

$r_1/H$	碟形薄壳解			相当球壳解(有矩)			球壳解
	$P_{cr}$	n	m	$P_{cr}$	n	m	
0.0	13040.433	4	2	13040.433	4	2	12096.711
0.25	11235.393	5	3	11776.905	5	2	11009.763
0.50	8271.302	5	3	9548.662	4	2	9215.710
0.714	4915.693	4	4	6381.111	4	2	6490.198
0.75	4257.148	4	4	5664.098	4	2	5824.393
0.85	2657.627	5	4	3280.660	4	2	3591.441
0.90	1949.443	6	4	1916.972	4	2	2239.623
0.95	1513.683	7	6	632.411	4	2	837.558
0.99	1062.619	12	3	26.277	4	2	49.050

表6 加筋碟形薄壳临界压力

模 型 号	计算方法	$P_{cr}$ (kPa)	n	m	$\beta$	与试验解相对误差
1	弹性解	9215.799	7	3	8.346	209.1%
	塑性解	3166.077	3	4	5.3123	6.2%
	试验解	2981.222	—	—	—	—
2	弹性解	9487.395	7	3	8.351	207.8%
	塑性解	3258.353	3	4	5.322	5.7%
	试验解	3082.624	—	—	—	—

等于零,球壳半径为最小;另一极端情况是球壳半径无穷大,而环壳半径也为最大(等于碟形壳高度 $H$ )。在此之间壳体可能有任意多个球壳与环壳半径的组合,由于球壳与环壳半径

之间具有下述关系:

$$L = (R^2 + H^2 - 2Rr_1) / 2(H - r_1)$$

故给定环壳半径 $r_1$ 后球壳半径 $L$ 也将确定。由表5可知, 给定 $R$ 和 $H$ 之后, 碟形壳的临界压力随环壳半径 $r_1$ 的增大而迅速降低。当 $r_1/H=0$ 时 $P_{cr}$ 为最大,  $r_1/H=1$ 时为最小。在 $0 < r_1/H < 0.9$ 范围内, 与相当球壳相比, 碟形薄壳临界压力低于相当球壳临界压力, 在 $r_1/H=0.9$ 时二者几乎相等, 之后碟形壳临界压力随 $r_1/H$ 的增大而高于相当球壳的临界压力。但由于此时球壳半径很大, 相当球壳已趋于一平板, 故其临界压力很低, 弯曲成为主要问题, 工程上不可能采用这类壳体作为受外压作用的容器封头, 故此范围内碟形薄壳实用意义不大。

通过上述分析可得出, 在工程实用范围内, 碟形薄壳的临界压力小于相当球壳的临界压力。若采用相当球壳方法进行设计, 则会得到偏于危险的结果。

### 例3 固支加筋碟形薄壳

为进一步验证本文方法的可靠性, 制作了二个加筋碟形薄壳进行屈曲试验<sup>[3]</sup>, 壳体加筋方式示于图1(b), 对模型1, 筋宽为5.5mm, 高7.3mm, 对模型2, 筋宽为5.5mm, 高为7.4mm, 其余参数同例2。使用本文方法算得临界压力并与试验结果比较列于表6。

### 参 考 文 献

- [1] D. Bushnell, *Computerized Buckling Analysis of Shells*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht (1985).
- [2] 力学所板壳组, 《加肋圆柱板与圆柱壳》, 科学出版社(1983).
- [3] 郝刚、曾广武, 加筋碟形薄壳屈曲试验, 华中理工大学学报, 22(12) (1995).

## Plastic Buckling of Stiffened Torispherical Shell

Hao Gang    Zeng Guangwu    Hao Qiang

(Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering, Huazhong University  
of Science and Technology, Wuhan 430074, P. R. China)

### Abstract

This paper uses the nonlinear prebuckling consistent theory to analyse the plastic buckling problem of stiffened torispherical shell under uniform external pressure. The buckling equation and energy expressions of the shell are built, the calculation formula is presented. Numerical examples show that the method in this paper has better precision and calculating process is very simple.

**Key words** stiffened shell of revolution, torispherical shell, uniform external pressure, plastic buckling