

扰动的 Couette-Poiseuille 流的 特征值的计算

宋金宝 陈建宁

(内蒙古大学数学系, 呼和浩特 010021)

(李家春推荐, 1994年12月30日收到)

摘 要

本文考虑的问题是二维粘性渠流。对0到2000之间的雷诺数, 计算了平稳扰动的 Couette-Poiseuille 流的下游特征值。其特征方程类似于 Orr-Sommerfeld 方程。所用的方法是谱方法和初值方法(复合矩阵方法)。就几种有趣的流量, 给出了相应的特征值的计算结果。这些特征值确定了扰动的衰减率。

关键词 下游 特征值问题 Couette-Poiseuille 流

一、引 言

Bramley 和 Dennis^[1-3] 以及其它作者^[4,5] 得到了二维粘性渠流 Poiseuille 的平稳扰动特征值。在这篇文章中, 我们讨论的问题也是二维粘性渠流。我们假定基本流和 Couette-Poiseuille 流的差在下游指数型地衰减。Navier-Stokes 方程在 Couette-Poiseuille 流的小扰动下被线性化之后, 导出了类似于 Orr-Sommerfeld 方程的扰动的 Couette-Poiseuille 流的特征方程。其特征值确定了平稳扰动的衰减率。

为了计算扰动的 Poiseuille 流的特征值, 几种方法已经被使用。如 Bramley 在 [1] 中及 Bramley 和 Dennis 在 [2] 中使用的谱方法; Bramley 和 Dennis 在 [3] 中使用的初值方法。在这篇文章中, 我们利用这些方法计算了扰动的 Couette-Poiseuille 流的下游特征值。这些特征值对于边条件的确定是重要的。

二、方 程

设渠的宽度为 h , 运动学粘性系数为 ν 。若取特征长度 h , 特征速度 U 及雷诺数 $R = Uh/\nu$, 那么无量纲的流函数 ψ 满足方程

$$R \left(\psi_r \frac{\partial}{\partial x} - \psi_z \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \nabla^2 \psi = \nabla^4 \psi \quad (2.1)$$

* 1994年2月25日第一次收到。

这里 x 是(无量纲)下游坐标, y 是(无量纲)纵坐标,原点在渠的底部,设下游远方趋于Couette-Poiseuille流,即:当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\psi \rightarrow \psi_0(y) = (3\alpha - V)y^2 + (V - 2\alpha)y^3$$

$$\psi_x \rightarrow 0$$

这里, α 是流量, V 是滑移速度, $\psi_0(y)$ 是Couette-Poiseuille流的流函数.这个流的运动是由上壁对下壁的相对位移及压力梯度而产生的,它的速度曲线对于渠的中线不对称.当 $V = 0$ 且 $\alpha = 1$ 时正是Poiseuille流.这种情形已由Wilson^[4]等人^{[1~3],[5]}进行了讨论.所以我们只考虑 $V \neq 0$ 的情形.为了简单我们假定 $V = 1$.

我们下面寻求(2.1)的扰动解.我们假定

$$\psi(x, y) = \psi_0(y) + \varepsilon \phi(y) e^{-\lambda x} \quad (2.2)$$

这里

$$\psi_0(y) = (3\alpha - 1)y^2 + (1 - 2\alpha)y^3 \quad (2.3)$$

ε 是一个小量.将(2.2)代入(2.1)且忽略 ε 的平方项有

$$\phi^{iv} + 2\lambda^2 \phi'' + \lambda^4 \phi = \lambda R \{ -\psi_0'(\phi'' + \lambda^2 \phi) + \psi_0''' \phi \} \quad (2.4)$$

其中

$$\psi_0' = 2(3\alpha - 1)y + 3(1 - 2\alpha)y^2$$

$$\psi_0''' = 6(1 - 2\alpha)$$

及边条件

$$\phi(0) = \phi(1) = \phi'(0) = \phi'(1) = 0 \quad (2.5)$$

上面的方程类似于Orr-Sommerfeld方程.主要的差别是在现在的方程里 λ 是特征值而不是Orr-Sommerfeld方程里的波数;方程对 λ 是非线性的且 λ 一般是复的.可以证明,若 λ 是一个特征值,那么 λ^* (λ 的复共轭)也是.由于增长的模不满足 $x = \infty$ 处的边条件,因而我们只对衰减的模感兴趣.象刚才提到的那样,特征值关于实轴是对称的,因此我们只把注意力集中到 λ 平面的第一象限.对每个雷诺数 R ,有无穷多个特征值,这些特征值可按其实部的模来排序.

问题是对所有的 R 求出特征值 λ ,而特征函数是不重要的.物理上,最感兴趣的问题是找出实部最小的特征值来.因为对于这些特征值,扰动维持的时间最长.

在下面的两节中将分别给出两种求解上述特征值问题的方法.由于这些方法在相应的参考文献中已被详细地叙述,因此我们只给出主要的结果.

三、复合矩阵方法

复合矩阵方法是由Gilbert和Backus^[6]提出的(或参阅Ng和Reid[7]).

设 $\Phi = [\phi, \phi', \phi'', \phi''']^T$,那么方程(2.4)可写成一阶微分方程组

$$\Phi' = A\Phi \quad (3.1)$$

这里

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_2 & 0 & c_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$c_1 = -2\lambda^2 - \lambda R \psi_0'$$

$$c_2 = \lambda R \psi_0''' - \lambda^3 R \psi_0' - \lambda^4$$

又设 Φ_1 和 Φ_2 是方程 (3.1) 满足初条件

$$\Phi_1 = [0, 0, 1, 0]^T \text{ 和 } \Phi_2 = [0, 0, 0, 1]^T \quad (3.3)$$

的两个解。考虑 4×2 解矩阵

$$\Psi(y) = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \\ \phi_1'' & \phi_2'' \\ \phi_1''' & \phi_2''' \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

矩阵 Ψ 的 2×2 余子式是,

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2, & p_2 &= \phi_1 \phi_2'' - \phi_1'' \phi_2 \\ p_3 &= \phi_1 \phi_2''' - \phi_1''' \phi_2, & p_4 &= \phi_1' \phi_2'' - \phi_1'' \phi_2' \\ p_5 &= \phi_1' \phi_2''' - \phi_1''' \phi_2', & p_6 &= \phi_1'' \phi_2''' - \phi_1''' \phi_2'' \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

按照 Ng 和 Reid 的 [7], 可以证明 $P = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)^T$ 满足微分方程组

$$P'(y) = B(y)P(y) \quad (3.6)$$

这里

$$B(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c_2 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 1 \\ 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$P(y)$ 满足边条件

$$P(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 1]^T \quad (3.8)$$

在 $y=1$ 处的边条件为 $p_1(0)=0$ 。对给定的 α 和 R , 我们选择一个初值 λ , 然后修改它直到 $p_1(0)=0$ 。

四、谱方法

Orszag^[8] 讨论了求解特征值问题时使用 Chebyshev 多项式比用其它正交多项式的优点。他证明: 如果一个线性微分方程的系数是无限次可微的, 那么得到的近似其误差当 $N \rightarrow \infty$ 时, 比 $1/N$ 的任何幂都下降得快。这里 N 是近似中所使用的 Chebyshev 多项式的数目。因此, 我们用 Chebyshev 多项式来得到满足边条件 (2.5) 的方程 (2.4) 的近似解。

由于 Chebyshev 多项式 $T_n(z)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上对于权函数 $\omega(z) = (1-z^2)^{-1/2}$ 是正交的, 且 $z = -1 + 2y$ 把区间 $[0, 1]$ 映成 $[-1, 1]$, 那么我们在一开始就将方程 (2.4) 和边条件 (2.5) 变换到 $[-1, 1]$ 上来讨论将是非常方便的。为此, 我们假定

$$\phi(y) = \phi\left(\frac{z+1}{2}\right) = \bar{\phi}(z)$$

设 $\bar{\phi}(z)$ 和它的导数 $d^q \bar{\phi} / dz^q$ 的 Chebyshev 展开式为

$$\frac{d^q \bar{\phi}}{dz^q} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(q)} T_n(z) \quad (4.1)$$

这里 $a_n^{(0)} \equiv a_n$, $T_n(z)$ 是 n 阶第一类 Chebyshev 多项式. 满足条件 $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$, $n=0, 1, 2, \dots$. 利用 $T_n(z)$ 的性质, 我们可以将 $a_n^{(q)}$ 用 a_n 来表示. 为了方便, 我们引入两簇常数 c_n 和 d_n , 即

$$\left. \begin{aligned} c_n = d_n = 0 & \quad (n < 0); \quad c_0 = 2, \quad d_0 = 1 \\ c_n = d_n = 1 & \quad (n > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

可以证明 ([2])

$$c_n a_n^{(2)} = \sum_{\substack{p=n+2 \\ p=n \pmod{2}}} p(p^2 - u^2) a_p, \quad (n \geq 0) \quad (4.3)$$

$$24c_n a_n^{(4)} = \sum_{\substack{p=n+4 \\ p=n \pmod{2}}} p(p^2 - n^2) [(p-n)^2 - 4][(p+n)^2 - 4] a_p, \quad (n \geq 0) \quad (4.4)$$

这里 $a = b \pmod{2}$ 表示 $a - b$ 可被 2 整除. 由于

$$2zT_s(z) = T_{s+1}(z) + T_{s-1}(z) \text{ 和 } 4z^2T_s(z) = T_{s-2}(z) + 2T_s(z) + T_{s+2}(z)$$

那么 $2z\bar{\phi}(z)$ 和 $4z^2\bar{\phi}(z)$ 的 n 阶 Chebyshev 系数分别是

$$c_{n-1}a_{n-1} + a_{n+1} \quad (n \geq 0) \quad (4.5)$$

和 $c_{n-2}a_{n-2} + (c_n + c_{n-1})a_n + a_{n+2} \quad (n \geq 0) \quad (4.6)$

类似地, $2z\bar{\phi}''(z)$ 和 $4z^2\bar{\phi}''(z)$ 的 n 阶 Chebyshev 系数是 (4.5) 和 (4.6) 式中将 a_n 换为 $a_n^{(2)}$ 得到的式子.

将上述展开式代入 (2.4), 比较两边 $T_n(z)$ 的系数, 我们将 Chebyshev 级数在 $T_{N-1}(z)$ 处截断有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p=n \pmod{2}}}^{N-1} p(p^2 - n^2) [(p-n)^2 - 4][(p+n)^2 - 4] a_p \\ & + \sum_{\substack{p=n+2 \\ p=n \pmod{2}}}^{N-1} \left\{ \left[\frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{1}{16} \lambda R(6\alpha - 1) + \frac{3}{64} \lambda R(1 - 2\alpha)(c_n + c_{n-1}) \right] \right. \\ & \quad \left. p(p^2 - n^2) + \frac{3}{64} \lambda R(1 - 2\alpha) [d_{n-2} p(p^2 - (n-2)^2) + c_n p(p^2 \right. \\ & \quad \left. - (n+2)^2) \right] \} a_p \\ & + \frac{1}{16} \lambda R \sum_{\substack{p=n+1 \\ p=n+1 \pmod{2}}}^{N-1} [c_n p(p^2 - (n+1)^2) + d_{n-1} p(p^2 - (n-1)^2)] a_p \\ & + \frac{3}{16} \lambda R(1 - 2\alpha) n(n-1) a_n - \frac{3}{8} \lambda R(1 - 2\alpha) a_n c_n + \frac{1}{16} \lambda^4 a_n c_n \\ & + \lambda^3 R \left\{ \frac{1}{64} [(6\alpha - 1)c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_n a_{n+1}] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{256} (1-2\alpha) [c_{n-2}a_{n-2} + (c_n^2 + c_{n-1})a_n + c_n a_{n+2}] \} \\
 & = 0, \quad 0 \leq n \leq N-1
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

由于 $T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$ 和 $T_n'(\pm 1) = (\pm 1)^{n-1}n$, 那么边条件 $\phi(\pm 1) = \bar{\phi}'(\pm 1) = 0$ 化为

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{N-1} a_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{N-1} n^2 a_n = 0 \\
 \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n a_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{n-1} n^2 a_n = 0
 \end{aligned} \right\} \tag{4.8}$$

方程 (4.7) 取 $n=0, 1, 2, \dots, N-5$ 与边条件 (4.8) 一起可表示成形式

$$(\lambda^4 C_4 + \lambda^3 C_3 + \lambda^2 C_2 + \lambda C_1 + C_0) D = 0 \tag{4.9}$$

这里 $C_i (i=0, 1, 2, 3, 4)$ 是 N 阶方阵. 这可以化为广义特征值问题

$$(E - \lambda F) X = 0 \tag{4.10}$$

这里

$$E = \begin{pmatrix} C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -C_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

而 $X^T = (\lambda^3 D^T, \lambda^2 D^T, \lambda D^T, D^T)$

由 (4.10) 给出的广义特征值问题可用矩阵列变换和Wilkinson^[9]的QR方法来求解.

五、数值结果

大量的数值结果已经被得到. 在这里, 我们希望尽可能准确地给出其主要结果. 这些结果多数是由第三节中介绍的复合矩阵方法得到的. 因为利用这种方法我们可以得到比较精确的结果. 但是这个方法对特征值 λ 要求一个较为合理的初值. 当 λ 是复值时, 它可以在整个复平面上的任何一个位置, 这样寻求 λ 的初值就成为一个问题而容易失掉 λ 的值. 但这时我们可以先用谱方法来计算 λ , 至少可以得到一个较为准确的初值, 然后再用初值方法来计算 λ . 主要结果由下面的表1~6给出. 实特征值 λ 随 R 的变化可以用图的形式表示. 图1~3分别给出了 $\alpha=0, 0.5$ 和 1 时的正的实特征值. 图4给出了 $\alpha=10$ 时的前几支正的实特征值. 从图中可以看出, 对每种情形, 都有值 R 使得在这个 R 之下没有正的实特征值. 这样的值 (称为 R_0) 分别由表1~6给出.

对 $0 \leq R \leq 2000$, $\alpha=0, 0.5, 1$ 和 10 , 前三支下游特征值分别由表1, 表3, 表5和表6给出. 对 $\alpha=0$ 和 $\alpha=0.5$, 另外三支下游特征值分别由表2和表4给出. 复特征值和它的共轭是成对出现的, 为了简单我们只给出具有正的虚部的那一支特征值.

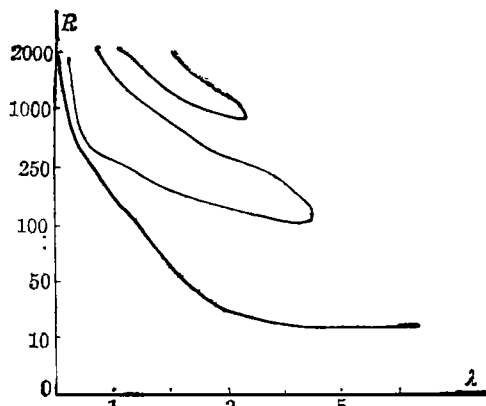


图1 $\alpha=0$ 时正的实特征值图

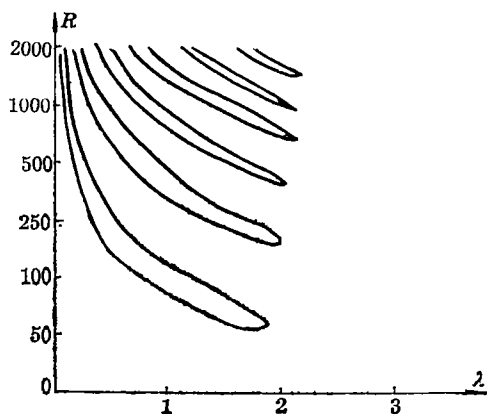


图2 $\alpha=0.5$ 时正的实特征值图

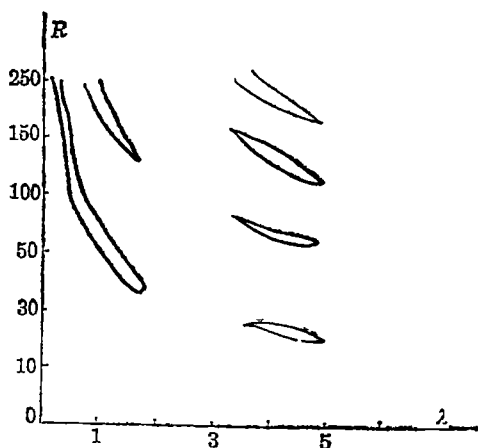


图3 $\alpha=1$ 时正的实特征值图

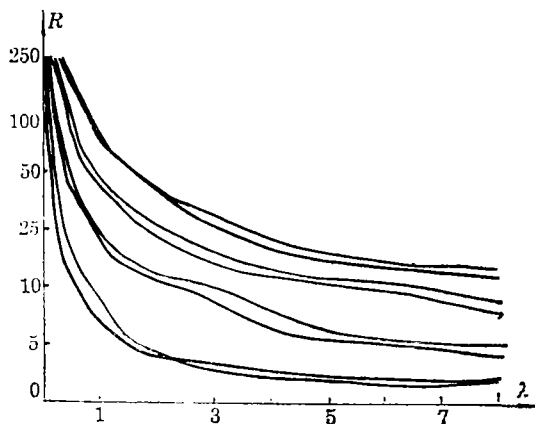


图4 $\alpha=10$ 时的前几支正的实特征值图

表1 $0 \leq R \leq 2000$ 且 $\alpha=0$ 时的前三支下游特征值

| R | λ_I | λ_{II} | λ_{III} |
|-------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| 0 | $4.21239 + 2.25073i$ | $7.49768 + 2.76868i$ | $10.71254 + 3.10315i$ |
| 0.25 | $4.22380 + 2.3353i$ | $7.50326 + 2.76386i$ | $10.71573 + 3.10109i$ |
| 0.5 | $4.23519 + 2.21608i$ | $7.50885 + 2.75895i$ | $10.71895 + 3.09893i$ |
| 1.0 | $4.25787 + 2.18044i$ | $7.52005 + 2.74883i$ | $10.72546 + 3.09434i$ |
| 1.5 | $4.28044 + 2.14378i$ | $7.53130 + 2.73828i$ | $10.73208 + 3.88937i$ |
| 2.5 | $4.32517 + 2.06726i$ | $7.55391 + 2.71575i$ | $10.74565 + 3.07824i$ |
| 5.0 | $4.43440 + 1.85533i$ | $7.61108 + 2.64913i$ | $10.78199 + 3.04328i$ |
| 10 | $4.64290 + 1.30467i$ | $7.72355 + 2.44715i$ | $10.86985 + 2.94104i$ |
| 25 | $3.22247; 9.80471$ | $6.68234 + 1.49752i$ | $11.29275 + 2.29286i$ |
| 50 | $2.28037; 11.72536$ | $5.65550 + 1.39696i$ | $11.51583 + 1.77596i$ |
| 100 | $1.48560; 10.07397$ | $4.08188; 4.44360$ | $10.53017 + 2.45074i$ |
| 250 | 0.70176 | $1.51283; 3.57906$ | $7.55767 + 1.88303i$ |
| 500 | 0.36374 | $0.75341; 2.40803$ | $4.85975 + 1.03113i$ |
| 1000 | 0.18368 | $0.37621; 1.44507$ | $2.55022; 3.27058$ |
| 2000 | 0.09208 | $0.18804; 0.78598$ | $1.18945; 2.06525$ |
| R_c | 14.607 | 98.764 | 850.254 |
| λ_c | 4.84950 | 4.28484 | 3.30495 |

表2 $0 \leq R \leq 100$ 且 $\alpha = 0$ 时的另外三支下游特征值

| R | λ_I | λ_{II} | λ_{III} |
|-------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 0 | 13.89996+3.35221i | 17.07336+3.55109i | 20.23852+3.71677i |
| 0.25 | 13.90201+3.35112i | 17.07480+3.55044i | 20.23957+3.71635i |
| 0.5 | 13.90410+3.34995i | 17.07626+3.54971i | 20.24066+3.71585i |
| 1.0 | 13.90838+3.34735i | 17.07929+3.54802i | 20.24293+3.71464i |
| 1.5 | 13.91278+3.34442i | 17.08247+3.54605i | 20.24535+3.71318i |
| 2.5 | 13.92202+3.33754i | 17.08925+3.54119i | 20.25059+3.70945i |
| 5.0 | 13.94771+3.31450i | 17.10878+3.52398i | 20.26615+3.69552i |
| 10 | 14.01158+3.24348i | 17.15942+3.46823i | 20.30779+3.64857i |
| 25 | 14.31544+2.80139i | 17.40443+3.11019i | 20.51837+3.34105i |
| 50 | 16.41647+2.39431i | 18.64087+2.35802i | 21.45211+2.25358i |
| 100 | 17.11561+2.66385i | 16.71284;31.76841 | 22.79124+2.67424i |
| R_c | | 75.069 | |
| λ_c | | 20.68461 | |

表3 $0 \leq R \leq 2000$ 且 $\alpha = 0.5$ 时的前三支下游特征值

| R | λ_I | λ_{II} | λ_{III} |
|-------------|------------------|------------------|-------------------|
| 0 | 4.21239+2.25073i | 7.49768+2.76868i | 10.71254+3.10315i |
| 0.25 | 4.18133+2.25046i | 7.46657+2.76844i | 10.68140+3.10293i |
| 0.5 | 4.15063+2.24967i | 7.43574+2.76772i | 10.65049+3.10229i |
| 1.0 | 4.09037+2.24659i | 7.37493+2.76493i | 10.58933+3.09975i |
| 1.5 | 4.03161+2.24161i | 7.31524+2.76040i | 10.52906+3.09561i |
| 2.5 | 3.91864+2.22643i | 7.19924+2.74656i | 10.41119+3.08282i |
| 5.0 | 3.66284+2.16334i | 6.92856+2.68799i | 10.13167+3.02719i |
| 10 | 3.25798+1.96956i | 6.46417+2.49559i | 9.63396+2.83411i |
| 25 | 2.59468+1.27601i | 5.49462+1.64631i | 8.48659+1.90593i |
| 50 | 1.95130+0.27690i | 4.10187+1.08876i | 6.87312+1.69622i |
| 100 | 1.32497;0.8246 | 2.99759+0.92741i | 5.25462+0.92413i |
| 250 | 0.55342;0.32225 | 1.73936;1.40179 | 2.98547+0.64521i |
| 500 | 0.27822;0.16066 | 0.90988;0.67717 | 1.83556;1.59553 |
| 1000 | 0.13930;0.08027 | 0.45849;0.3364 | 0.95164;0.7734 |
| 2000 | 0.06972;0.04013 | 0.22966;0.16807 | 0.47848;0.38484 |
| R_c | 55.173 | 196.29 | 417.32 |
| λ_c | 1.8245 | 1.97037 | 2.0424 |

由上面的表和图我们可以发现，当 $0 \leq R < R_c$ 时，每支特征值都是复的而且它们的共轭也是特征值。在 $R = R_c = R_{c,1}$ 时，每支复特征值和它的共轭在实轴上重合，然后当 R 大于 R_c 时它们分成两支实解。这两支实解可能在 $R = R_{c,2}$ 处重合，然后随着 R 的增大，这两支实解又分成一对共轭的复解，而又当 $R_{c,2} < R < R_{c,3}$ 时它们又保持为复的。在 $R = R_{c,3}$ 复解和它的共轭又一次在实轴上重合，依次类推。例如， $\alpha = 1$ 时的第二支特征值（看表 5）， $R_{c,2} = 25.93$ ， $\lambda_{c,2} = 3.60473$ ， $R_{c,3} = 126.375$ ， $\lambda_{c,3} = 1.62096$ 。但在每种情形，对于大雷诺数 R ，我们没有给出具有大模的特征值。这是因为这些特征值很难精确地得到。

作者希望借此感谢 Peter W. Duck 教授提出该研究问题并鼓励作者对该问题进行研究。

表4 $0 \leq R \leq 2000$ 且 $\alpha = 0.5$ 时的另外三支下游特征值

| R | λ_I | λ_{II} | λ_{III} |
|-------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 0 | 13.89996+3.35221i | 17.07336+3.55109i | 20.23852+3.71677i |
| 0.25 | 13.86880+3.35201i | 17.04219+3.55089i | 20.20733+3.71658i |
| 0.5 | 13.83783+3.35140i | 17.01118+3.55031i | 20.17628+3.71601i |
| 1.0 | 13.77643+3.34901i | 16.94961+3.54801i | 20.11460+3.71377i |
| 1.5 | 13.71577+3.34510i | 16.88866+3.54423i | 20.05344+3.71007i |
| 2.5 | 13.59663+3.3329i | 16.76862+3.53238i | 19.93272+3.69844i |
| 5.0 | 13.31125+3.27893i | 16.47909+3.47937i | 19.64011+3.64599i |
| 10 | 12.79155+3.08485i | 15.94374+3.28406i | 19.09307+3.44939i |
| 25 | 11.52371+2.11583i | 14.58882+2.29525i | 17.67265+2.45156i |
| 50 | 9.76966+2.04289i | 12.71889+2.27322i | 15.70259+2.44090i |
| 100 | 7.49648+1.24868i | 10.10028+1.68206i | 12.85479+1.94463i |
| 250 | 4.45834+0.51014i | 6.37132+1.04679i | 8.47196+0.95776i |
| 500 | 2.84549+0.41171i | 3.77060+0.44898i | 5.41394+0.48462i |
| 1000 | 1.60382;1.40363 | 2.31280+0.09734i | 3.09662+0.40281i |
| 2000 | 0.81488;0.69156 | 1.23620;1.09066 | 1.73423;1.58971 |
| R_c | 716.39 | 1092.35 | 1544.37 |
| λ_c | 2.08841 | 2.12184 | 2.14902 |

表5 $0 \leq R \leq 2000$ 且 $\alpha = 1$ 时的前三支下游特征值

| R | λ_I | λ_{II} | λ_{III} |
|-------------|------------------|------------------|-------------------|
| 0 | 4.21239+2.25073i | 7.49768+2.76868i | 10.71254+3.10315i |
| 0.25 | 4.13953+2.26605i | 7.43025+2.77238i | 10.64731+3.10423i |
| 0.5 | 4.06879+2.27806i | 7.36413+2.77405i | 10.58301+3.10349i |
| 1.0 | 3.93363+2.29318i | 7.23577+2.77167i | 10.45716+3.09684i |
| 1.5 | 3.80680+2.29807i | 7.11250+2.76234i | 10.33496+3.08372i |
| 2.5 | 3.57733+2.28364i | 6.8809+2.72553i | 10.10138+3.03978i |
| 5.0 | 3.12956+2.16151i | 6.38394+2.55160i | 9.57884+2.84117i |
| 10 | 2.60931+1.80932i | 5.68659+1.98122i | 8.77758+2.11704i |
| 25 | 2.13872+0.85471i | 3.99606;3.50936 | 6.56289+1.49964i |
| 50 | 1.44953;1.03477 | 2.56145+1.03812i | 5.22028+0.61330i |
| 100 | 0.74513;0.49014 | 2.04604+0.37869i | 2.72817+0.52722i |
| 250 | 0.29972;0.19375 | 0.90994;0.70903 | 1.72534+0.10246i |
| 500 | 0.14997;0.09672 | 0.45773;0.34951 | 0.92598;0.77532 |
| 1000 | 0.07500;0.04834 | 0.22916;0.17420 | 0.46552;0.38307 |
| 2000 | 0.03750;0.02417 | 0.11462;0.08703 | 0.23302;0.19104 |
| R_c | 36.046 | 18.755 | 272.482 |
| λ_c | 1.73512 | 4.81965 | 1.57878 |

表6 $0 \leq R \leq \infty$ 且 $\alpha = 10$ 时的前三支下游特征值

| R | λ_1 | λ_2 | λ_3 |
|-------------|------------------|------------------|-------------------|
| 0 | 4.21239+2.25073i | 7.49768+2.76868i | 10.71254+3.10315i |
| 0.25 | 3.49891+2.3803i | 6.83919+2.75413i | 10.07626+3.04631i |
| 0.5 | 3.00962+2.30292i | 6.31629+2.58960i | 9.53695+2.83658i |
| 1.0 | 2.45788+2.01131i | 5.61056+2.01197i | 8.7417+2.02122i |
| 1.5 | 2.19221+1.73831i | 5.27161+1.10079i | 9.25562;7.19156 |
| 2.5 | 2.0007+1.31996i | 4.25990;3.00621 | 4.77162;4.2599 |
| 5.0 | 2.12834+1.16566i | 1.50206;1.28753 | 6.0948;7.30865 |
| 10 | 1.79663+0.99479i | 0.75407;0.58234 | 2.31387;2.8449 |
| 25 | 1.63573+0.8150i | 0.30199;0.22826 | 0.80192;0.92176 |
| 50 | 1.51219+0.70873i | 0.15102;0.1138 | 0.38829;0.46098 |
| 100 | 1.39278+0.62013i | 0.07552;0.05686 | 0.19279;0.2305 |
| 250 | 1.25286+0.51819i | 0.03021;0.02274 | 0.07697;0.0922 |
| 500 | 1.16037+0.45272i | 0.01510;0.01137 | 0.03847;0.0461 |
| 1000 | 0.99256+0.00669i | 0.00755;0.00568 | 0.01923;0.02305 |
| 2000 | 0.96206+0.00564i | 0.00377;0.00284 | 0.00966;0.01153 |
| R_c | | 1.697 | 1.386 |
| λ_c | | 5.3756 | 8.52505 |

参 考 文 献

- [1] J. S. Bramley, Note on the calculation of eigenvalues for stationary perturbation of Poiseuille flow, *J. Comput. Phys.*, **53** (1984), 524—529.
- [2] J. S. Bramley and S. C. R. Dennis, The calculation of eigenvalues for the stationary perturbation of Poiseuille flow, *J. Comput. Phys.*, **47** (1982), 179—198.
- [3] J. S. Bramley and S. C. R. Dennis, The calculation of eigenvalues for the stationary perturbation of Poiseuille flow using initial value methods, *J. Math. Anal. Appl.*, **101** (1984), 30—38.
- [4] S. D. R. Wilson, The development of Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, **38** (1969), 793—806.
- [5] G. A. Ache, Computation of the eigenvalues for perturbations Poiseuille flow using a two-point boundary value method, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **10** (1989), 1097—1112.
- [6] G. Gilbert and G. E. Backus, Propagator matrices in elastic wave and vibration problems, *Geophysics*, **31** (1966), 325—332.
- [7] B. S. Ng and W. H. Reid, An initial value method for eigenvalue problems using compound matrices, *J. Comput. Phys.*, **30** (1979), 125—136.
- [8] S. A. Orszag, Accurate solution to the Orr-Sommerfeld stability equation, *J. Fluid Mech.*, **50** (1971), 689—703.
- [9] J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Oxford (1965).

The Calculation of Eigenvalues for the Stationary Perturbation of Couette-Poiseuille Flow

Song Jinbao Chen Jianning

*(Department of Mathematics, University of Inner Mongolia, Huhehaote
010021, P. R. China)*

Abstract

The problem considered is that of two-dimensional viscous flow in a straight channel. The decay of a stationary perturbation from the Couette-Poiseuille flow in the downstream is sought. A differential eigenvalue equation resembling the Orr-Sommerfeld equation is solved by using a spectral method and an initial-value method (the compound matrix method) for values of the Reynolds number R between 0 and 2000. The eigenvalues are presented for several of interesting cases with different measures of mass flux. These eigenvalues determine the rate of decay for the perturbation.

Key words downstream, eigenvalue problem, Couette-Poiseuille flow