

具有初始缺陷弹性板的稳定性分析

徐 凯 宇

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所 上海 200072)

(潘立宙推荐, 1994年10月5日收到)

摘 要

本文以 Marguerre 方程为基础, 用奇异性理论研究了初始挠度缺陷以及横向载荷对弹性板屈曲后分叉解的影响。借助于普适开折的原理, 在单特征值局部邻域内将该问题的失稳分析转化为三次代数方程的讨论, 从而确定出分叉解的性态。同时绘出了在不同参数下的分叉解支, 讨论了几何缺陷和横向载荷对特征值的影响。

关键词 缺陷 普适开折 特征值 分叉

一、引 言

由于种种原因, 实际工程结构中总是在不同程度上存在着各种各样的缺陷。因此理想的完善结构只具有理论的意义。一个结构只要具有初始缺陷, 一般就不再是分叉问题, 它们大多数以极值点的形态失稳^[1], 有极值点存在时临界载荷敏感地依赖于初始缺陷; 或者在缺陷的影响下, 结构的失稳问题转化为一个弯曲问题^{[2][3]}。长期以来, 带有缺陷结构的稳定性研究一直是一个非常活跃的领域。关于带有初始挠度弹性板的非线性方程, 最初由 Marguerre^[4]导出, 这一方程仍然在平板的后屈曲超载性能分析以及浅壳的非线性分析中得到广泛地应用。大量的数值分析主要集中在有限元法和能量法上^{[5][6]}。在定性研究方面, Poston 和 Stewart^[7]利用突变理论分析了具有横向载荷作用的平板在边界上受压后的屈曲行为, Gaspar^[8]研究了具有初始挠度板的全局分支解。

本文将对任意形状的弹性板, 在边界为夹紧的条件下, 运用奇异性理论^[9], 考虑在板边界受压时, 带有初始挠度以及同时受横向载荷作用的弹性板的屈曲行为, 给出了一些分析结果。

二、控制方程的导出和基本性质

设弹性薄板所占区域为 $\Omega \subset R^2$, 在无外力作用时不是完全位于 $x-y$ 平面上的平板, 这一微小缺陷可用挠度 $aw_0(x, y)$ 表示, $a \in R$, w_0 是已知函数。用 $\beta q_0(x, y)$ 表示作用在板面上的横向载荷, $\beta \in R$ 。现考察在板的边界上夹紧并承受水平方向压力 $\lambda \psi(x, y)$, $(x, y) \in \partial\Omega$, $\lambda \in R$ 。那么应力函数 $f(x, y)$ 和附加挠度 $w(x, y)$ 满足的无量纲 Marguerre 方程和相应的边界条件

为⁽⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 f &= -\frac{1}{2}[w, w] - \alpha[w_0, w] \\ \Delta^2 w &= [w + \alpha w_0, f + \lambda F_0] + \beta q_0 \end{aligned} \right\} \quad (\Omega) \quad (2.1)$$

$$f = f_s = f_y = 0, \quad w = w_x = w_y = 0 \quad (\partial\Omega) \quad (2.2)$$

式中 $F_0(x, y)$ 是以下定解问题的解.

$$\Delta^2 F_0 = 0 \quad (\Omega) \quad (2.3)$$

$$F_{0,ss} = \psi_{(n)}, \quad F_{0,ns} = \psi_{(ns)} \quad (\partial\Omega) \quad (2.4)$$

这里 $\psi_{(n)}$, $\psi_{(ns)}$ 分别是 ψ 沿法线和切线方向上的投影, Δ^2 是双调和算子, 方括号 $[\cdot, \cdot]$ 定义为

$$[u, v] = u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx} - 2u_{xy}v_{xy} \quad (2.5)$$

为了导出算子方程, 引进 Hilbert 空间

$$H = \left\{ u \in W_0^{2,2}(\Omega) \mid \langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v \quad \forall u, v \in W_0^{2,2}(\Omega) \right\}$$

任取 $\forall \varphi, \eta \in H$, 乘以方程(2.1)两端后积分, 并注意到边界条件(2.2), 可得到

$$\int_{\Omega} \Delta^2 f \cdot \varphi = \langle f, \varphi \rangle, \quad \int_{\Omega} \Delta^2 w \cdot \eta = \langle w, \eta \rangle, \quad \int_{\Omega} [f, w] \cdot \eta = b(f, w; \eta)$$

式中

$$b(u, v; \varphi) = \int_{\Omega} [(u_{xy}v_y - u_{yy}v_x)\varphi_x + (u_{xy}v_x - u_{xx}v_y)\varphi_y] \quad (2.6)$$

记 $c_1(u; \varphi) = b(F_0, u; \varphi)$, $c_2(u; \varphi) = b(w_0, u; \varphi)$

由 Riesz 表示定理, 存在双线性算子 B , $\langle B(u, v), \varphi \rangle = b(u, v; \varphi)$, $\forall \varphi \in H$, 以及线性算子 A, G 和 g , 使得

$$\langle Au, \varphi \rangle = c_1(u; \varphi), \quad \langle Gu, \varphi \rangle = c_2(u; \varphi), \quad \langle g, \varphi \rangle = \int_{\Omega} q_0 \varphi$$

那么控制方程(2.1)、(2.2)的解 (f, w) 满足

$$\left. \begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &= -\frac{1}{2}b(w, w; \varphi) - \alpha c_2(w; \varphi) \\ \langle w, \eta \rangle &= b(w, f; \eta) + \lambda c_1(w; \eta) + \alpha c_2(f; \eta) + \alpha \lambda c_1(w_0; \eta) + \beta \langle g, \eta \rangle \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

将 b , c_1 和 c_2 的表达式代入到(2.7)中, 注意到对任意 $\varphi, \eta \in H$ 成立, 因此有

$$f = -\frac{1}{2}B(w, w) - \alpha Gw \quad (2.8)$$

$$w - \lambda Aw + \alpha^2 G^2 w + \alpha Q(w) + C(w) = \alpha \lambda p + \beta g \quad (2.9)$$

式中

$$Q(w) = B(w, Gw) + \frac{1}{2}GB(w, w) \quad (2.10)$$

$$C(w) = \frac{1}{2}B(w, B(w, w)) \quad (2.11)$$

$$p = Aw_0 \quad (2.12)$$

最后定解问题归结为求解两个非耦合的算子方程(2.8)和(2.9)。

为了进一步的讨论, 我们研究算子方程的几个性质. Berger^[10]已证明:

1. $B: H \times H \rightarrow H$ 是双线性有界算子, 且

$$\langle B(u, v), w \rangle = \langle B(w, v), u \rangle \quad (2.13)$$

2. 对固定的 $u_0 \in H$, $B(u_0, v)$ 是映 $H \rightarrow H$ 的紧算子.

3. A 是有界线性自伴紧算子.

$$4. C(\sigma w) = \sigma^3 C(w) \quad \forall \sigma \in R \quad (2.14)$$

$$\langle C(w), w \rangle = \|B(w, w)\|^2 \quad (2.15)$$

$$\langle C(w), w \rangle \geq 0, \quad \langle C(w), w \rangle = 0 \iff w = 0 \quad (2.16)$$

因为 $\langle Gu, \varphi \rangle = \langle B(w_0, u), \varphi \rangle$, 所以我们马上得到

5. G, G^2 均是有界线性自伴紧算子.

关于算子方程(2.9)中的非线性项 Q 有如下性质

6. $Q(w)$ 是二次齐式, 即 $\forall \sigma \in R$

$$Q(\sigma w) = \sigma^2 Q(w) \quad (2.17)$$

事实上, 由(2.10)式可得

$$\begin{aligned} Q(\sigma w) &= B(\sigma w, G\sigma w) + \frac{1}{2}GB(\sigma w, \sigma w) \\ &= \sigma^2 B(w, Gw) + \frac{1}{2}\sigma^2 GB(w, w) = \sigma^2 Q(w) \end{aligned}$$

三、缺陷参数和横向载荷对分叉解的影响

我们首先考察算子方程(2.9)的求解问题, 若解得 w , 代入方程(2.8)便可算出 f . 先讨论完善板 ($\alpha = \beta = 0$) 的线性特征值问题. 从方程(2.9)的线性化可得^[11]

$$(I - \lambda A)w = 0, \quad w \in H \quad (3.1)$$

设 $1/\lambda_0$ 是 A 的特征值, 那么 $\lambda_0 \neq 0$ ^[12], 其力学意义是临界载荷. 作代换 $\mu = \lambda - \lambda_0$, 那么方程(2.9)化为

$$\begin{aligned} w - (\lambda_0 + \mu)Aw + \alpha^2 G^2 w + \alpha Q(w) \\ + C(w) - \alpha(\lambda_0 + \mu)p - \beta g = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

进一步, 设 $1/\lambda_0$ 是 A 的单特征值, 即有

$$\dim \ker(I - \lambda_0 A) = 1 = \dim \text{coker}(I - \lambda_0 A) \quad (3.3)$$

设投影算子 $P: H \rightarrow H$, $\text{Range}(P) = \ker(I - \lambda_0 A)$, 通过 Lyapunov-Schmidt 过程约化, $Aw \in H$, $w = Pw + (I - P)w$. 现取 $e_1 \in \ker(I - \lambda_0 A)$, $\|e_1\| = 1$, 那么

$$w = ue_1 + v, \quad u \in R, \quad v \in \{\ker(I - \lambda_0 A)\}^\perp$$

方程(3.2)的约化形式是

$$\begin{aligned} k(u, \mu, \alpha, \beta)e_1 \equiv & P(I - (\lambda_0 + \mu)A)(ue_1 + v^*(u, \mu, \alpha, \beta)) + P(\alpha^2 G^2(ue_1 \\ & + v^*(u, \mu, \alpha, \beta))) + P(\alpha Q(ue_1 + v^*(u, \mu, \alpha, \beta))) \\ & + P(C(ue_1 + v^*(u, \mu, \alpha, \beta))) - P(\alpha(\lambda_0 + \mu)p) - P(\beta g) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中

$$v = v^*(u, \mu, \alpha, \beta) = O(|u|^3 + |\alpha||u|^2) \quad (3.5)$$

因此, 方程(3.2)的解就等价于求下述一维代数方程的解.

$$k: R \times R \times R \times R \rightarrow R, \quad k(u, \mu, \alpha, \beta) = 0 \quad (3.6)$$

注意到 $\forall w \in H$, $Pw = \langle w, e_1 \rangle e_1$, 而 $\langle v^*, e_1 \rangle = 0$, $A(ue_1) = uAe_1 = ue_1/\lambda_0$, 再利用 A 的自伴性得

$$\langle Av^*, e_1 \rangle = \langle v^*, Ae_1 \rangle = \langle v^*, e_1/\lambda_0 \rangle = 0$$

此即 $Av^* \in \{\text{span}(e_1)\}^\perp$, $P(Av^*) = 0$. (3.4)式右端便可写成

$$\begin{aligned} & \langle C(ue_1 + v^*), e_1 \rangle + \alpha \langle Q(ue_1 + v^*), e_1 \rangle + (\alpha^2 \langle G^2 e_1, e_1 \rangle - \mu/\lambda_0)u \\ & - \alpha(\lambda_0 + \mu) \langle p, e_1 \rangle - \beta \langle g, e_1 \rangle + \alpha^2 \langle G^2 v^*, e_1 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

考虑到上一节中性质5, 式中

$$\langle G^2 e_1, e_1 \rangle = \langle Ge_1, Ge_1 \rangle = \|Ge_1\|^2 \geq 0 \quad (3.8)$$

利用算子 C, Q, G 的性质及 (3.5) 式, 最后方程 (3.6) 可写成

$$\begin{aligned} k(u, \mu, \alpha, \beta) &= C_0 u^3 + \alpha C_1 u^2 + \left(\alpha^2 C_2 - \frac{\mu}{\lambda_0} \right) u - \alpha(\lambda_0 + \mu) C_3 \\ & - \beta C_4 + \text{hot.} = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

式中

$$C_0 = \langle Ce_1, e_1 \rangle, C_1 = \langle Qe_1, e_1 \rangle, C_2 = \langle G^2 e_1, e_1 \rangle \geq 0$$

$$C_3 = \langle p, e_1 \rangle = \langle Aw_0, e_1 \rangle = \frac{1}{\lambda_0} \langle w_0, e_1 \rangle, C_4 = \langle g, e_1 \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{hot.} &= O(|u|^4 + (|\alpha|^2 + |\mu|)u^2 + (|\mu|^2 + |\alpha|^3 + |\beta|)|u| \\ & + (|\alpha| + |\mu| + |\beta|)^2) \end{aligned}$$

当 $\alpha = \beta = 0$, 方程 (3.9) 退化成平板稳定性分叉方程

$$k^0(u, \mu) = k(u, \mu, 0, 0) = C_0 u^3 - \frac{\mu}{\lambda_0} u + \text{hot.} = 0 \quad (3.10)$$

并且 $k^0(u, \mu)$ 满足

$$\left. \begin{aligned} k^0(0, 0) &= 0, k_{\mu}^0(0, 0) = 0, k_{u\mu}^0(0, 0) = 0, k_{\mu\mu}^0(0, 0) = 0 \\ k_{uu}^0(0, 0) &= 6C_0 > 0, k_{u\mu}^0(0, 0) = -\frac{1}{\lambda_0} \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

上式中利用了 C 的性质 (2.16) 式. 因此满足文献 [13] 中命题 3.1.2 的条件, 所以有如下的结论.

定理 3.1 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 是方程 (3.10) 的分叉点, 其分叉图完全由

$$C_0 u^3 - \frac{\mu}{\lambda_0} u = 0 \quad (3.12)$$

所确定.

这里又一次证明了弹性平板在单特征值处必然发生分叉这一结论.

为了研究初始缺陷以及横向载荷对分叉解的影响, 必须考虑 (3.12) 式左端项的普适开折.

定理 3.2 $F(u, \mu, \alpha, \beta) = C_0 u^3 + \alpha C_1 u^2 - \frac{\mu}{\lambda_0} u - \alpha \lambda_0 C_3 - \beta C_4$ 是 $h(u, \mu) = C_0 u^3 - u\mu/\lambda_0$ 的普适开折.

证 h 在 $(u, \mu) = (0, 0)$ 处满足条件 (3.11), F 是一个 2-参数展开, 而

$$\det \begin{bmatrix} h_u & h_{uu} & h_{u\mu} & h_{uuu} \\ h_\mu & h_{\mu u} & h_{\mu\mu} & h_{\mu uu} \\ F_{t_2} & F_{t_2 u} & F_{t_2 \mu} & F_{t_2 uu} \\ F_{t_1} & F_{t_1 u} & F_{t_1 \mu} & F_{t_1 uu} \end{bmatrix} (0,0) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda_0} & 6C_0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda_0} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= -\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 \cdot 2 \neq 0$$

式中

$$t_1 = \alpha C_1, \quad t_2 = -(\alpha \lambda_0 C_3 + \beta C_4) \quad (3.13)$$

据文献[9]知, $F(u, \mu, \alpha, \beta)$ 是 $h(u, \mu)$ 的普适开折。

由一般的奇异性理论, 参数 (α, β) 对平板在屈曲后分叉解支所有可能的影响反映在方程

$$F(u, \mu, \alpha, \beta) = 0 \quad (3.14)$$

的分叉图中。因为 $\langle C e_1, e_1 \rangle \neq 0$, 方程(3.14)可简单地写成

$$F(u, \gamma, \alpha_1, \alpha_2) = u^3 + \alpha_1 u^2 - \gamma u + \alpha_2 = 0 \quad (3.15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{C_1}{C_0} \alpha = \frac{\langle Q e_1, e_1 \rangle}{\langle C e_1, e_1 \rangle} \alpha \\ \alpha_2 &= -\frac{\alpha \lambda_0 C_3 + \beta C_4}{C_0} = -\frac{\alpha \lambda_0 \langle p, e_1 \rangle + \beta \langle g, e_1 \rangle}{C_0} \\ \gamma &= \mu / \lambda_0 C_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

普适开折包含着分叉问题的种种可能的扰动。那么, 不同的参数所对应的分叉图结构会有相应的变化, 所以还必须讨论持久性问题。

设 $F(\cdot, \cdot, \alpha)$ 为 h 的 k -参数普适开折, $\alpha \in R^k$, 称为持久的, 若有 α 的一邻域 $U \subset R^k$ 使 $F(\cdot, \cdot, \alpha)$ 与 $F(\cdot, \cdot, \beta)$, $\forall \beta \in U$, 接触等价(接触等价的定义见文献[9]), 否则就称为在 α 处非持久。出现非持久性的情形有下列三种。

(a) 分叉点, 其集合为

$$F = u^3 - \gamma u + \alpha_1 u^2 + \alpha_2 = 0$$

$$F_u = 3u^2 - \gamma + 2\alpha_1 u = 0$$

$$F_\gamma = -u = 0$$

从以上三个方程中消去 (u, γ) 得

$$\alpha_2 = 0 \quad (3.17)$$

(b) 滞后点集满足

$$F = u^3 - \gamma u + \alpha_1 u^2 + \alpha_2 = 0$$

$$F_u = 3u^2 - \gamma + 2\alpha_1 u = 0$$

$$F_{uu} = 6u + 2\alpha_1 = 0$$

消去 (u, γ) , 得

$$\alpha_2 = \alpha_1^3 / 27 \quad (3.18)$$

(c) 双极限点集满足

$$F_u(u_1, \gamma, \alpha_1, \alpha_2) = 3u_1^2 - \gamma + 2\alpha_1 u_1 = 0$$

$$F_u(u_2, \gamma, \alpha_1, \alpha_2) = 3u_2^2 - \gamma + 2\alpha_1 u_2 = 0$$

$$F(u_1, \gamma, \alpha_1, \alpha_2) = u_1^3 - \gamma u_1 + \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 = 0$$

$$F(u_2, \gamma, \alpha_1, \alpha_2) = u_2^3 - \gamma u_2 + \alpha_1 u_2^2 + \alpha_2 = 0$$

$$u \neq u_2$$

容易得出上述方程组无解, 从而我们得到

定理3.3 $R^2 \setminus \{(a_1, a_2) \in R^2 \mid a_2 = 0\} \cup \{(a_1, a_2) \in R^2 \mid a_2 = a_1^3 / 27\}$ 把原点 $(0, 0)$ 的一个邻域

分成四个连通分支，当 (α_1, α_2) 和 (α_1^1, α_2^1) 属于同一连通分支时 $F(u, \gamma, \alpha_1, \alpha_2)$ 和 $F(u, \gamma, \alpha_1^1, \alpha_2^1)$ 接触等价，即它们所确定的分叉图的性态完全一致。

原点附近四个连通分支如图1所示。

我们分别对四个区域及两条曲线上绘出相应的分叉图。区域A（区域C是其镜面反射）和区域D（区域B是其镜面反射）中的分叉图分别如图2和图3所示。

在 $\alpha_2 = 0$ 上得到的是一枝分叉，在 $\alpha_2 = \alpha_1^3 / 27$ 上根据上述的讨论得到的是滞后曲线，两者的图形见图4和图5。

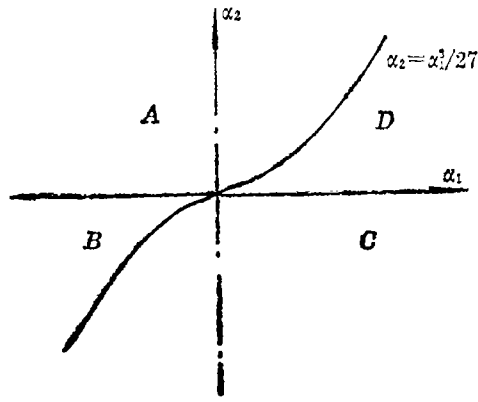


图 1

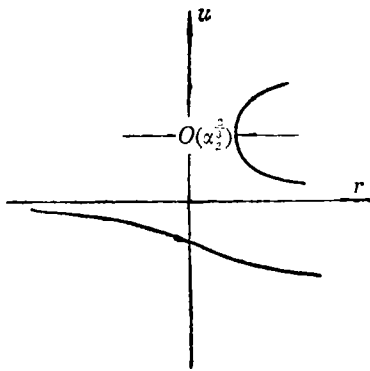


图2 ($\alpha_2 > 0$)

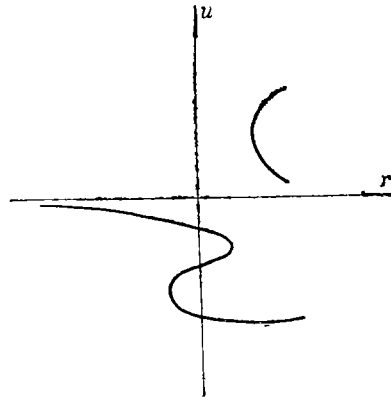


图3 ($\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$)

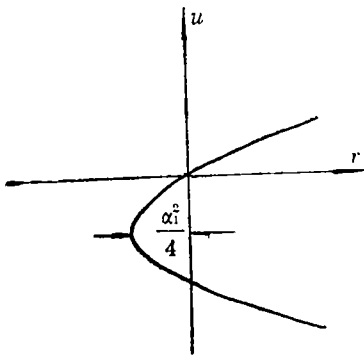


图4 ($\alpha_1 > 0$)

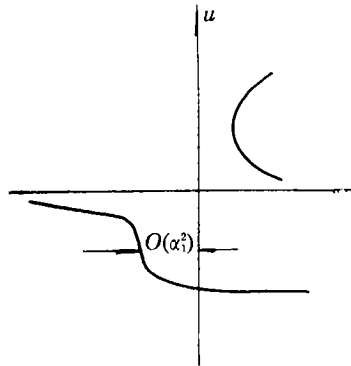


图5 ($\alpha_1 > 0$)

根据本节得到的结果，以下就具有明显力学意义的参数 α, β 对分叉解的影响作讨论，可得出如下结论。

1. 同时带有初始挠度和横向载荷，即 $\alpha, \beta \neq 0$

由(3.17)及(3.18)确定出 $\alpha-\beta$ 平面上两条分离曲线为

$$\left. \begin{aligned} \alpha\lambda_0\langle p, e_1 \rangle + \beta\langle g, e_1 \rangle &= 0 \\ -(\alpha\lambda_0\langle p, e_1 \rangle + \beta\langle g, e_1 \rangle) &= \frac{\alpha^3}{27} \cdot \frac{C_1^3}{C_0^3} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

对给定的 α, β 值, 其分叉图分别由图2~图5之一所确定。

2. 只有初始挠度缺陷, 即 $\alpha \neq 0, \beta = 0$ 。

此时分离曲线退化成

$$\alpha\langle p, e_1 \rangle = 0, \quad \alpha\lambda_0\langle p, e_1 \rangle = -\frac{\alpha^3}{27} \cdot \frac{C_1^3}{C_0^3} \quad (3.20)$$

普适开折变为

$$F = u^3 - \gamma u + \frac{C_1}{C_0} \alpha u^2 - \frac{\alpha\lambda_0\langle p, e_1 \rangle}{C_0} \quad (3.21)$$

1° 若 $\langle p, e_1 \rangle = 0$, 即 $\langle w_0, e_1 \rangle = 0, C_1 = \langle Qe_1, e_1 \rangle \neq 0$, 那么分叉图如图4所示。初始挠度缺陷参数对原临界载荷的影响是

$$\lambda^* = \lambda_0 - O(\alpha^2) \quad (3.22)$$

2° 若 $w_0 = u_0 e_1, (u_0 \neq 0)$, 力学意义是初始挠度可由特征函数表出, 那么由第二节中 Q 和 C 的性质可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{C_1}{C_0}\alpha\right)\left(\frac{\alpha\lambda_0}{C_0}\langle p, e_1 \rangle\right) &= \frac{\alpha^2}{C_0^2} \lambda_0 \langle Qe_1, e_1 \rangle \cdot \langle Aw_0, e_1 \rangle \\ &= \frac{\alpha^2}{C_0^2} u_0 \langle Qe_1, e_1 \rangle = \frac{3}{2} \frac{\alpha^2}{C_0^2} u_0^2 \|B(e_1, e_1)\|^2 \end{aligned}$$

而 $\|B(e_1, e_1)\|^2 = \langle C(e_1), e_1 \rangle > 0$, 这说明(3.21)式中二次项系数与常数项系数反号, 分叉图如图2所示。初始挠度缺陷参数对原临界载荷值的影响是一个正数, 即为

$$\lambda^* = \lambda_0 + O(\alpha^{2/3}) \quad (3.23)$$

3° 若 $\langle p, e_1 \rangle \neq 0$, 即 $\langle w_0, e_1 \rangle \neq 0, C_1 = \langle Qe_1, e_1 \rangle \neq 0$, 则(3.20)中第一式不被满足, 弹性板不会出现分叉解枝。又如果 α 满足(3.20)中第二式, 这时分叉图如图5所示。缺陷对原临界载荷的影响是

$$\lambda^* = \lambda_0 - O(\alpha^2) \quad (3.24)$$

3. 无初始挠度缺陷, $\alpha = 0, \beta \neq 0$ 。

这时(3.19)两式退化成

$$\beta\langle g, e_1 \rangle = 0 \quad (3.25)$$

相应的普适开折为

$$F = u^3 - \gamma u - \frac{\beta\langle g, e_1 \rangle}{C_0} \quad (3.26)$$

因为(3.26)式中不含二次项, 所以当 $\langle g, e_1 \rangle \neq 0$ 时解枝如图2。载荷参数对原临界载荷的影响同(3.23)式。

最后应该指出的是, 本文所研究的微小初始缺陷和横向载荷对弹性平板屈曲性态的影响。第一, 作为一种渐近理论, 它的局限性在于只在分叉点附近适用; 第二, 由于普适开折的形式取决于分叉方程的非线性阶数, 而 Marguerre 方程是一个具有三次非线性性质的控制方程(见第二节), 所以决定了本文中只能最多考察两个参数的影响。

衷心地感谢程昌钧教授和周哲玮教授在本文的写作过程中给予作者的精心指导。

参 考 文 献

- [1] J. M. T. Thompson and G. W. Hunt, Dangers of structural optimization, *Engineering Optimization*, (1) (1974), 99—110.
- [2] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York (1959).
- [3] J. M. Coan, The influence of curvature on the buckling of structures, *J. Appl. Mech.*, 18 (1951), 143.
- [4] K. Marguerre, Zur theorie gekrummten platte grosser formänderung, *Proc. 5th Int. Cong. Appl. Mech.*, John Wiley & Sons Inc., New York (1938), 93—101.
- [5] Chia Chuenyuan, *Nonlinear Analysis of Plates*, McGraw-Hill, New York (1980), 96—107.
- [6] Xu Kaiyu, Buckling of a rectangular plate with small initial deflection, *ICNM-I Symp.*, ed. by Chien Weizang, Beijing University Press, Beijing (1993), 630—632.
- [7] T. Poston and I. Stewart, *Catastrophe Theory and Its Applications*, Pitman, London (1988).
- [8] Z. Gaspar, Critical imperfection theory, *J. Struc. Mech.*, 11 (1983), 297—325.
- [9] M. Golubitsky and D. Schaeffer, A theory for imperfect bifurcation via singularity theory, *Comm. Pure Appl. Math.*, 32 (1979), 21—98.
- [10] M. Berger, On von Kármán equations and the buckling of a thin elastic plate I. The clamped plate, *Comm. Pure Appl. Mech.*, 20 (1967), 687—719.
- [11] 程昌钧、朱正佑, 《结构的屈曲与分叉》, 兰州大学出版社 (1991).
- [12] 张恭庆、林源渠, 《泛函分析讲义》, 北京大学出版社 (1987).
- [13] 陈予恕、唐云等, 《非线性动力学中的现代分析方法》, 科学出版社 (1992), 88—116.

Analysis of Stability on Elastic Plates with Initial Imperfections

Xu Kaiyu

(Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract

On the basis of Marguerre equations, the influence on a bifurcation diagram of an elastic plate affected by initial deflection imperfection and transverse loading is studied with the help of the singularity theory. This paper applies universal unfolding principles, it is put forward that the unstable analysis of this problem can transform into the study of a triple algebraic equation in the neighborhood of a simple eigenvalue. Thus the bifurcated states are decided, and the bifurcation diagrams are drawn up following distinct parameters. Then the quantitative series of interfering with eigenvalues are discussed.

Key words imperfection, universal unfolding, eigenvalue, bifurcation