

弹塑性问题线性互补方程的凝缩解法

殷福新 孙焕纯

(大连理工大学力学系, 大连 116023)

(1994年7月25日收到)

摘 要

本文提出了将由变分不等方程导出的弹塑性问题的线性互补方程采用凝缩求解的方法, 在避免了迭代计算所节省的时间之外又进一步大大节省了计算时间, 极大地提高了对大型结构进行弹塑性分析的效率。

关键词 变分不等方程 弹塑性 线性互补方程 Lemke 算法

一、前 言

近年来用数学规划方法无需迭代求解弹塑性问题的新思想已逐渐为人们所接受^[1,2,3]。该方法是通过变分不等方程^[1], 虚能量不等式^[2]或参变量变分原理^[3], 把弹塑性问题直接归结为一线性互补方程组, 然后用 Lemke 算法求解。该方法的特点是在计算过程中避免了繁琐的迭代, 这不仅简化了计算, 而更重要的是提高了了解的精度和增加了求解问题的规模。但用此方法求解弹塑性问题时, 在每个载荷增量步内多次将矩阵相乘, 而且求解高阶线性互补方程耗费了机时。本文的主要思想就是先用 Lemke 算法或其它求解弹塑性问题的有限元法对整个结构进行弹塑性分析, 在几个增量步内将结构自动划分为只含有弹性单元的弹性区、含有全部塑性单元和部分弹性单元的混合区以及两者交界处构成的公共区(或称为接触区)。结构被划分后, 弹性区和混合区要分别对待, 并且仅对混合区内的单元用 Lemke 算法进行弹塑性分析, 就通常的工程结构而言, 混合区只是整个结构的很小一部分。这样就降低了矩阵的阶数, 矩阵相乘时元素相乘的次数明显减少而且降低了线性互补方程的阶数, 从而在每载荷增量步内节省了大量的计算时间。本文的算例说明此方法是行之有效的。如果此方法用在热弹塑性分析或结构的动力弹塑性分析时, 效益是十分明显的。

二、变分不等方程简介

设 $\Omega \in \mathbf{R}^3$ 是固体所占据的一开区域, 其边界为 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f$, Γ_u 为给定位移的边界, Γ_f 为给定外力的边界。应力张量 $\sigma \in \mathbf{R}^6$ 由材料特性确定为 $u \in \mathbf{R}^3$ 的函数。

问题1 求位移场 $u = \{u_i\}$, 满足:

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) + f_i = \rho u_i \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (2.1)$$

$$u_i = u_{gi} \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \quad \text{在 } \Gamma_f \text{ 上} \quad (2.3)$$

式中 ρ 是固体的密度, $u_g = \{u_{gi}\} \in \mathbf{R}^3$ 和 $p = \{p_i\} \in \mathbf{R}^3$ 分别为 Γ_u 和 Γ_f 上给定的位移和表面力密度, σ_{ij} 是应力张量分量.

为方便起见引入记号:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega$$

定义集合:

$$U_{ad} = \{\mathbf{u} = \{u_i\} \mid \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^3, \mathbf{u} = \mathbf{u}_g, \text{ 在 } \Gamma_u \text{ 上}\}$$

问题2 求位移场 $\mathbf{u} \in U_{ad}$, 满足:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + (\rho \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - \int_{\Gamma_f} p_i (v_i - u_i) d\Gamma \geq 0 \\ \forall \mathbf{v} \in U_{ad} \quad (2.4)$$

对于问题1只需求问题2.

对于增量形式有变分不等方程:

$$A(d\mathbf{u}, \mathbf{v} - d\mathbf{u}) - (d\mathbf{f}, \mathbf{v} - d\mathbf{u}) + (\rho d\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - d\mathbf{u}) - \int_{\Gamma_f} d p_i (v_i - du_i) d\Gamma \geq 0 \\ \forall \mathbf{v} \in U_{ad}^d \quad (2.5)$$

式中, U_{ad}^d 定义为:

$$U_{ad}^d = \{d\mathbf{u} \mid d\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^3, d\mathbf{u} = d\mathbf{u}_g, \text{ 在 } \Gamma_u \text{ 上}\}$$

三、方程的导出与凝缩

将固体区域 Ω 划分为弹性区 Ω_e 和混合区 Ω_m , 两区域的接触边界为 Γ_c , 则有 $\Omega = \Omega_e \cup \Omega_m$. 在下面的各符号中, 上、下标 e, m, c 分别代表弹性区、混合区和公共区 (即弹性区和混合区的接触边界). 区域 Ω 被划分后, 两区域的连续性由 Γ_c 上的下述条件给出:

$$\mathbf{U}_c^e = \mathbf{U}_c^m, \quad \mathbf{P}_c^e \mathbf{n} + \mathbf{P}_c^m \mathbf{n} = 0 \quad (3.1)$$

在域 Ω_m 内增量形式的本构方程、屈服条件和互补条件分别为:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\lambda \Phi_{,kl}) \quad (3.2)$$

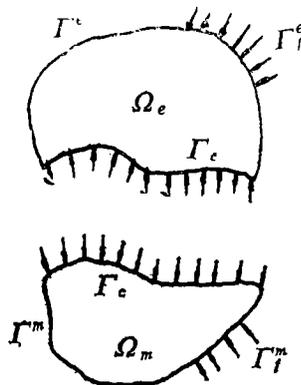
$$\psi(\sigma_{ij}, \bar{\varepsilon}_p) = \Phi(\sigma_{ij}) - H \left(\int d\bar{\varepsilon}_p \right) \leq 0 \quad (3.3)$$

$$d\lambda \psi(\sigma_{ij}, \bar{\varepsilon}_p) = 0 \quad (3.4)$$

式中 C_{ijkl} 为弹性常数, $d\varepsilon_{kl}$ 为全应变增量, $d\lambda \Phi_{,kl}$ 为塑性应变增量, $d\lambda$ 为流动因子, $d\lambda \geq 0$, $\Phi_{,kl} = \partial \Phi / \partial \sigma_{kl}$ 为应力梯度, $\Phi(\sigma_{ij})$ 为塑性势函数, $\psi(\sigma_{ij}, \bar{\varepsilon}_p)$ 是屈服函数. 本文采用等向强化 Mises 屈服准则.

对式 (3.3) 进行泰勒展开, 取其线性项, 并代入 (3.4) 式则有:

$$\psi_0 + \psi_{,kl} d\sigma_{kl} + \psi_{,\bar{\varepsilon}_p} d\bar{\varepsilon}_p \leq 0 \quad (3.5)$$



$$d\lambda(\psi_0 + \psi, \varepsilon_{kl} d\sigma_{kl} + \psi, \bar{\varepsilon}_p d\bar{\varepsilon}_p) = 0 \tag{3.6}$$

$$d\lambda \geq 0 \tag{3.7}$$

定义记号:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_m} \varepsilon_{ij}(u) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(v) d\Omega$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \lambda) = \int_{\Omega_m} \lambda C_{ijkl} \Phi_{,ij} \varepsilon_{kl}(v) d\Omega$$

把式(3.2)代入式(2.5), (3.5)和(3.6), 并注意到 $\psi, \varepsilon_{kl} = \Phi, \varepsilon_{kl}$, $\psi, \bar{\varepsilon}_p = -H, \bar{\varepsilon}_p$ 和 $d\bar{\varepsilon}_p = d\lambda$, 则分别有:

$$a(d\mathbf{u}, \mathbf{v} - d\mathbf{u}) - b(d\mathbf{u}, \mathbf{v} - d\mathbf{u}, d\lambda) - (d\mathbf{f}, \mathbf{v} - d\mathbf{u}) + \rho d\mathbf{u}, \mathbf{v} - d\mathbf{u} - \int_{\Gamma_f^m} d p_i (v_i - du_i) d\Gamma \geq 0 \tag{3.8}$$

$$\psi_0 + C_{ijkl} \Phi_{,ij} (d\varepsilon_{kl} - d\lambda \Phi_{,kl}) - H, \bar{\varepsilon}_p d\lambda \leq 0 \tag{3.9}$$

$$d\lambda [\psi_0 + C_{ijkl} \Phi_{,ij} (d\varepsilon_{kl} - d\lambda \Phi_{,kl}) - H, \bar{\varepsilon}_p d\lambda] = 0 \tag{3.10}$$

$$d\lambda \geq 0 \tag{3.11}$$

式(3.8)~(3.11)即为域 Ω_m 内弹塑性问题的增量形式的变分不等方程和互补条件。

对式(3.8)~(3.11)进行有限元离散, 取单元的形函数为 \mathbf{N} , 设 $d\mathbf{u}$, $d\lambda$, \mathbf{v} 的节点列向量分别为 \mathbf{U} , Λ 和 \mathbf{V} , 则有:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U}, \mathbf{v} - d\mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{V} - \mathbf{U}), d\varepsilon = \mathbf{D}\mathbf{U}$$

式(3.8)~(3.11)的离散形式为:

$$(\mathbf{V}^T - \mathbf{U}^T) (\mathbf{K}^m \mathbf{U}^m + \mathbf{M}^m \dot{\mathbf{U}}^m - \mathbf{Q}\Lambda - \mathbf{P}^m - \mathbf{P}^m_0) \geq 0 \tag{3.12}$$

$$\mathbf{H}\mathbf{U}^m - \mathbf{R}\Lambda + \mathbf{P}^m_0 \leq 0 \tag{3.13}$$

$$\Lambda^T (\mathbf{H}\mathbf{U}^m - \mathbf{R}\Lambda + \mathbf{P}^m_0) = 0 \tag{3.14}$$

$$\Lambda \geq 0 \tag{3.15}$$

式中:

$$\mathbf{K}^m = \sum_k \int_{\Omega^k} \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} d\Omega$$

$$\mathbf{M}^m = \sum_k \int_{\Omega^k} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega$$

$$\mathbf{Q} = \sum_k \int_{\Omega^k} \mathbf{D}^T \mathbf{C} (\nabla \Phi) d\Omega$$

$$\mathbf{H} = \sum_k \int_{\Omega^k} (\nabla \Phi)^T \mathbf{C} \mathbf{D} d\Omega$$

$$\mathbf{R} = \sum_k \int_{\Omega^k} [(\nabla \Phi)^T \mathbf{C} (\nabla \Phi) + H, \bar{\varepsilon}_p] d\Omega$$

$$\mathbf{P}^m = \sum_k \int_{\Omega^k} \mathbf{N}^T d\mathbf{f} d\Omega + \sum_k \int_{\Gamma_f^m} \mathbf{N}^T d\mathbf{P} d\Gamma$$

$$\mathbf{P}^m_0 = \sum_k \int_{\Gamma_f^c} \mathbf{N}^T d\mathbf{P} d\Gamma$$

$$\mathbf{P}^m_0 = \sum_k \int_{\Omega^k} \psi_0 d\Omega$$

$$\Omega^k \in \Omega_m, \Gamma_i^k \in \Gamma_i^m; \Gamma_i^k \in \Gamma_o.$$

本文仅考虑静态问题, 由 \mathbf{V} , \mathbf{U}^m 的任意性, 并引入松弛因子向量 $\boldsymbol{\mu} \geq 0$, (3.12)~(3.15) 式变为:

$$\mathbf{K}^m \mathbf{U}^m - \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{P}^m - \mathbf{P}_c^m = 0 \quad (3.16)$$

$$\boldsymbol{\mu} - \mathbf{R} \boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{H} \mathbf{U}^m + \mathbf{P}_0^m = 0 \quad (3.17)$$

$$\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\Lambda}^T = 0, \boldsymbol{\mu} \geq 0, \boldsymbol{\Lambda} \geq 0 \quad (3.18)$$

式(3.16)~(3.18)即为域 Ω_m 内的方程。同理, 在式(3.2)中令 $d\lambda = 0$, 并代入(2.5), 取与前面相同的形函数进行有限元离散, 则有:

$$(\mathbf{V}^T - \mathbf{U}^{eT}) (\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e + \mathbf{M}^e \dot{\mathbf{U}}^e - \mathbf{P}^e - \mathbf{P}_c^e) \geq 0$$

式中 \mathbf{K}^e , \mathbf{P}^e , \mathbf{M}^e , \mathbf{P}_c^e 的表达式的形式与 \mathbf{K}^m , \mathbf{M}^m , \mathbf{P}^m , \mathbf{P}_c^m 的相同, 只是 $\Omega^k \in \Omega_o$, $\Gamma_i^k \in \Gamma_o$, $\Gamma_i^k \in \Gamma_i^o$ 。

同样, 仅考虑静态问题, 并由 \mathbf{U}^e , \mathbf{V}^e 的任意性可得:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e - \mathbf{P}^e - \mathbf{P}_c^e = 0 \quad (3.19)$$

此式即为域 Ω_o 内的方程。

在 Ω 内将离散化的结构的节点按弹性区、公共区和混合区的顺序重新编号, 可得到与方程(3.16)~(3.19)等价的方程:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{c,c}^m & \mathbf{K}_{c,m}^m \\ \mathbf{K}_{m,c}^m & \mathbf{K}_{m,m}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_c^m \\ \mathbf{U}_m^m \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_c^m \\ \mathbf{Q}_m^m \end{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} - \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{c'}^m \\ \mathbf{P}_m^m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{c''}^m \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.20)$$

$$\boldsymbol{\mu} - \mathbf{R} \boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{H}' \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_c^m \\ \mathbf{U}_m^m \end{Bmatrix} + \mathbf{P}_0^m = 0 \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{c,c}^e & \mathbf{K}_{c,o}^e \\ \mathbf{K}_{o,c}^e & \mathbf{K}_{o,o}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_c^e \\ \mathbf{U}_o^e \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_c^e \\ \mathbf{P}_o^e \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{c''}^e \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.22)$$

将式(3.20)和(3.22)展开后就有:

$$\mathbf{K}_{c,c}^m \mathbf{U}_c^m + \mathbf{K}_{c,m}^m \mathbf{U}_m^m - \mathbf{Q}_c^m \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{P}_{c'}^m - \mathbf{P}_{c''}^m = 0 \quad (3.23)$$

$$\mathbf{K}_{m,c}^m \mathbf{U}_c^m + \mathbf{K}_{m,m}^m \mathbf{U}_m^m - \mathbf{Q}_m^m \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{P}_m^m = 0 \quad (3.24)$$

$$\mathbf{K}_{c,c}^e \mathbf{U}_c^e + \mathbf{K}_{c,o}^e \mathbf{U}_o^e - \mathbf{P}_c^e = 0 \quad (3.25)$$

$$\mathbf{K}_{o,c}^e \mathbf{U}_c^e + \mathbf{K}_{o,o}^e \mathbf{U}_o^e - \mathbf{P}_o^e - \mathbf{P}_{c''}^e = 0 \quad (3.26)$$

从(3.25)式解出 \mathbf{U}_c^e :

$$\mathbf{U}_c^e = \mathbf{K}_{c,c}^{-1} \mathbf{P}_c^e - \mathbf{K}_1 \mathbf{U}_o^e \quad (3.27)$$

式中 $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{c,o}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{c,c}$

(3.27)式代入(3.26)式, 则有:

$$\mathbf{K}_2 \mathbf{U}_o^e + \mathbf{K}_3 \mathbf{P}_c^e - \mathbf{P}_o^e - \mathbf{P}_{c''}^e = 0 \quad (3.28)$$

其中: $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_{o,c}^e - \mathbf{K}_{o,c}^e \cdot \mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_{o,c}^e \cdot \mathbf{K}_{c,c}^{-1}$

利用式(3.1)消去(3.23)和(3.28)式中的 $\mathbf{P}_{c''}^m$ 和 $\mathbf{P}_{c''}^e$, 可得:

$$\mathbf{K}_4 \mathbf{U}_c^m + \mathbf{K}_{c,m}^m \mathbf{U}_m^m - \mathbf{Q}_c^m \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{P}_{c'}^m + \mathbf{K}_3 \mathbf{P}_c^e - \mathbf{P}_c^e = 0 \quad (3.29)$$

其中: $\mathbf{K}_4 = \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_{c,c}^m$

联立方程(3.29)和(3.24)可得:

$$\bar{K} \begin{Bmatrix} U_c^m \\ U_m^m \end{Bmatrix} - Q' \Lambda - P_1 = 0 \tag{3.30}$$

式中:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_4 & K_{c m}^m \\ K_{m c}^m & K_{m m}^m \end{bmatrix}, Q' = \begin{bmatrix} Q_c^m \\ Q_m^m \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{Bmatrix} P_c^{m'} - K_3 P_e^e + P_c^{e'} \\ P_m^m \end{Bmatrix}$$

由方程(3.30)解出:

$$\begin{Bmatrix} U_c^m \\ U_m^m \end{Bmatrix} = \bar{K}^{-1} Q' \Lambda + \bar{K}^{-1} P_1 \tag{3.31}$$

代入(3.21), 则得:

$$\mu + [H' \bar{K}^{-1} Q' - R] \Lambda + H' \bar{K}^{-1} P_1 + P_0^m = 0 \tag{3.32}$$

$$\mu \Lambda^T = 0, \Lambda \geq 0, \mu \geq 0 \tag{3.33}$$

方程(3.32)和(3.33)即为凝缩后的数学规划问题, 可用 Lemke 算法求解, 其求解过程为:
 a: 用 Lemke 算法从互补方程(3.32), (3.33)中解出 Λ ; b: 把 Λ 代入(3.31)求出 U_c^m 和 U_m^m ; c: 把 U_c^m (即 U_c^e) 代入式(3.27)求出 U_e^e ; d: 求出本增量步内的应力增量; e: 累加应力和位移, 继续下一步加载, 重复以上求解过程直至结构完全破坏或载荷加完为止。

在用上述方法求解弹塑性问题时, 总刚度阵只需形成一次, 经变换求逆后存起来, 在以后求解时调用即可, 而矩阵 H' , Q' , R 以及向量 P_0^m 则在每个载荷增量步内都需重新形成, 因为它们与此次加载前的单元的应力状态有关。

如果设混合区 Ω_m 的单元数为 M_m , 节点数 (也包括公共区的节点) 为 N_m , 结构的单元总数为 M , 结点总数为 N , 则形成互补方程(3.32)和(3.33) 至少需要 $4N_m^2 M_m + 2N_m M_m^2 + 2N_m M_m$ 次乘法运算, 没凝缩前形成互补方程则至少要需 $4N^2 M + 2NM^2 + 2NM$ 次乘法运算。对于工程实际问题, 即使混合区的单元数和节点数是整个结构的一半, 每载荷增量步内所用的计算时间也减少到原来的四分之一以上。在对结构进行初始计算时, 如果划分出的混合区域越接近真实的塑性区域, 用此方法计算的效率也就越高。

四、计算过程中的几个主要措施^[4]

a. 区域的划分

结构的塑性区域的确切范围事先是难以确定的, 为找到混合区 Ω_m 可首先求出在全部载荷作用下的结构的各单元的等效应力 σ_i 与材料屈服应力 σ_s 的比值的最大值, $AL = [\sigma_i / \sigma_s]_{\max}$, 根据 AL 的大小将全部载荷中超出弹性的部分分成 3~6 等份, 份数随 AL 的增大而增加, 最多不超过 6。然后对整个结构进行弹塑性分析, 求出最终状态单元的等效应力与屈服应力之比 σ_i / σ_s , 把 $\sigma_i / \sigma_s \geq a$ 的单元划为混合区 Ω_m , 其余部分则为弹性区 Ω_e 。这里 a 可定义为划分系数, 反映区域划分过程中的误差, 在本文取 $a = 0.8$ 。在理论上分析 a 很有意义, 但比较困难, 需进一步研究。

b. 弹性区的校核

结构区域的划分是在少数几个增量步内进行的,因此在混合区域内难免漏掉真实的塑性单元,这就需要在计算过程中不断地对弹性区域的单元进行应力校核,如果发现有单元进入塑性则需把 α 取小些,对结构重新划分区域,退回到前一个载荷增量步内接着计算。

c. 区域隔离

结构的区域划分完毕后,程序对弹性区 Ω_e ,公共区 Γ_e 和混合区 Ω_m 的节点和单元重新编号。在计算过程中把弹性区和塑性区当作两个独立的部分,只在混合区域 Ω_m 上采用 Lemke 算法,通过公共区的节点传递彼此之间的影响。

区域的划分和隔离均由程序自动完成。

五、实例数值计算

为了验证本文方法的正确性和有效性,作者用FORTRAN语言编制了计算机程序,并在微机上对四种不同形状的结构进行了计算。对结构进行有限元离散时采用的是常应力三角形单元。在以下4个算例中,算例1,2和4的材料相同,即弹性模量 $E=1.96 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ 泊松比 $\nu=0.3$,结构厚取 $t=1.0 \times 10^{-3} \text{m}$,屈服应力 $\sigma_s=2.94 \times 10^8 \text{N/m}^2$,材料为理想弹塑性的,服从 Mises 屈服准则;算例3采用的是线性强化材料,服从 Mises 屈服准则,屈服应力满足 $\sigma_s=2.94 \times 10^7 + 6.6836 \times 10^8 \varepsilon_p$ ($0 \leq \varepsilon_p \leq 0.022$), $\sigma_s=4.41 \times 10^7 \text{N/m}^2$ ($\varepsilon_p \geq 0.022$),且弹性模量 $E=7.056 \times 10^{10} \text{N/m}^2$,泊松比 $\nu=0.34$,厚度 $t=3 \times 10^{-3} \text{m}$ 。由于例2,3和4的几何形状和载荷关于两个坐标轴对称,取其四分之一进行分析即可。在算例1中,载荷仅关于 y 轴对称,取其一半进行计算。在各算例的有限元网格图中,中心标“·”号的单元为真实塑性区的单元,这些单元与标“×”号的单元一起构成了混合区的单元。

算例1 均布载荷作用下的简支梁

结构的几何尺寸见图1(a),厚度 t , $l/h=5$ 。结构的一半被划分为84个节点,132个单元,图1(b)为有限元网格图、真实塑性区及混合区分布图。图1(c)为加载过程中塑性区扩展图。计算得屈服载荷、极限载荷分别为 $Q_e=0.0545103\sigma_s \cdot t$ 和 $Q_p=0.0823364\sigma_s \cdot t$,形状系数 $f=Q_p/Q_e=1.5105$,而理论解为 $Q_e=0.05333\sigma_s \cdot t$, $Q_p=0.07999\sigma_s \cdot t$, $f=1.50$,可见本文的解与理论解符合得相当好。

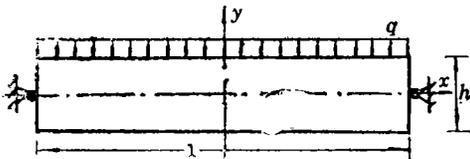


图1(a) 均布载荷作用下的简支梁

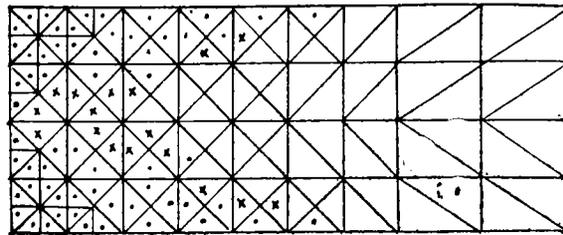


图1(b) 简支梁有限元网格图、真实塑性区及混合区分布图

算例2 均匀拉伸下V型缺口板的弹塑性分析

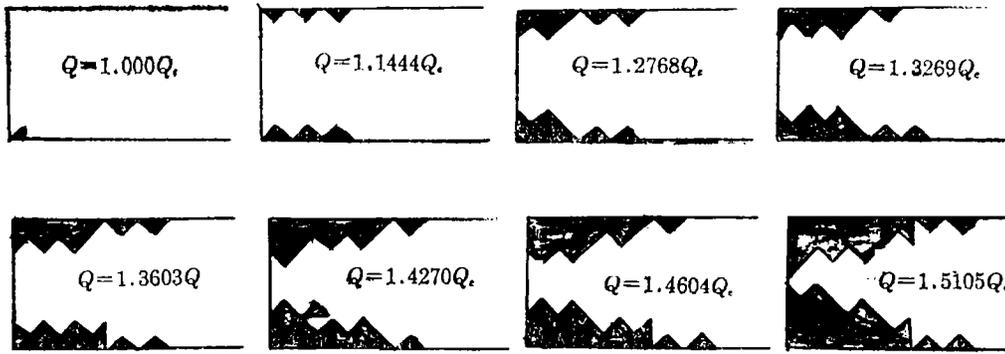


图1(c) 塑性区扩展图

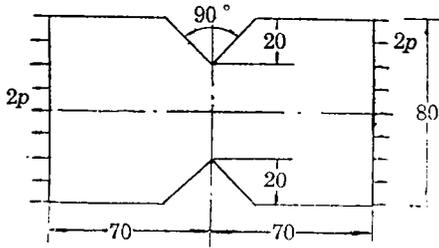


图2(a) V型缺口板 (单位: mm)

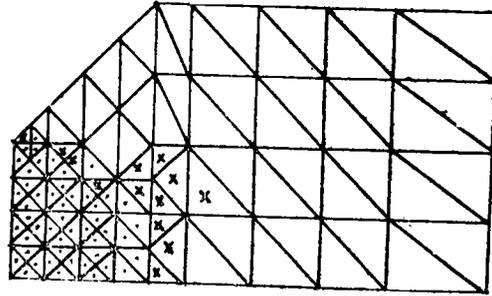


图2(b) V型缺口板有限元网格、真实塑性区及混合区分布图

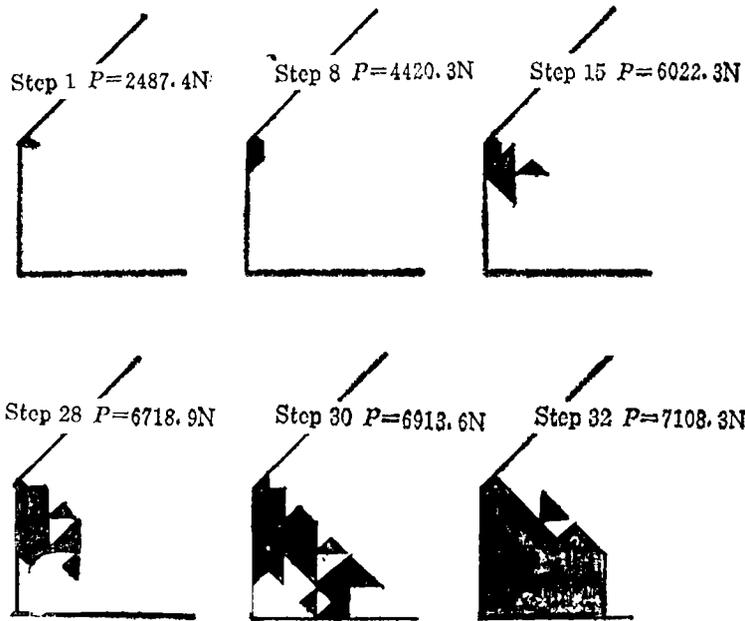


图2(c) 塑性区扩展图

结构的几何尺寸见图2(a) (单位为 $1 \times 10^{-3}m$)，结构的有限元网格图如图2(b)所示。图2(c)和2(d)分别为本文方法所得到的塑性区扩展图和文献[5]的塑性区扩展图。与文献[5]相比，本文方法所得到的各单元进入塑性的顺序及各应力状态所对应的载荷值完全一致，

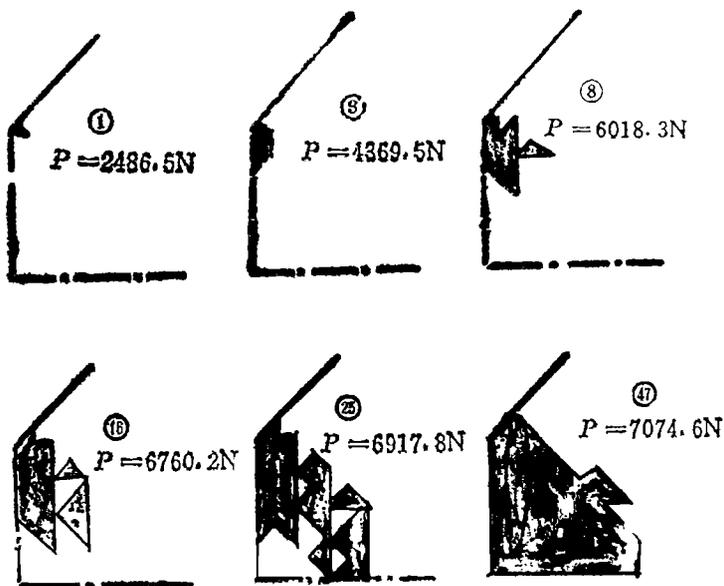


图2(d) 加载过程中塑性区的扩展

算例3 受均匀拉伸的裂纹板

结构的几何尺寸和有限元网格形式分别见图3(a)和图3(b), 结构的节点总数为61, 单元总数为94. 图3(c)为加载过程中结构进入塑性的过程. 图3(d)为文献[6]的结果, 两者符合得很好. 在图3(c)中, 最后一次加载表示塑性区已扩展到中心线.

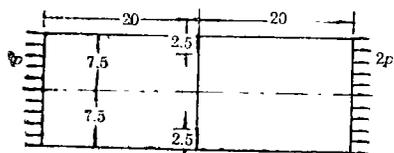


图3(a) 裂纹板 (单位, mm)

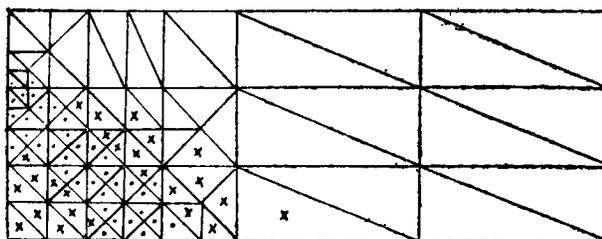


图3(b) 裂纹板有限元网格图、真实塑性区及混合区分布图

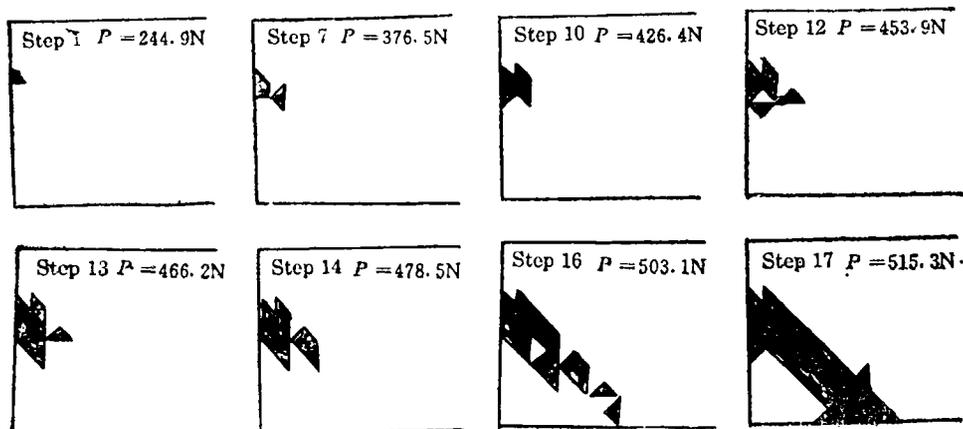


图3(c) 塑性区扩展图

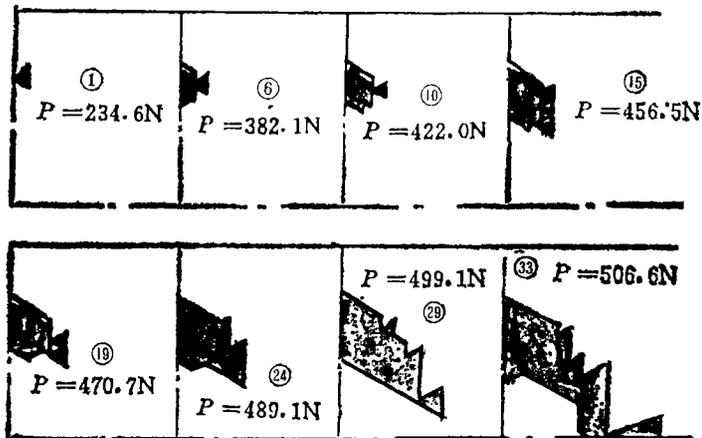


图3(d) Yamada 的塑性区域扩展

算例4 受均匀拉伸的半圆形缺口板

结构及缺口的几何尺寸如图4(a)所示。结构的四分之一被划分为138个节点，233个单元

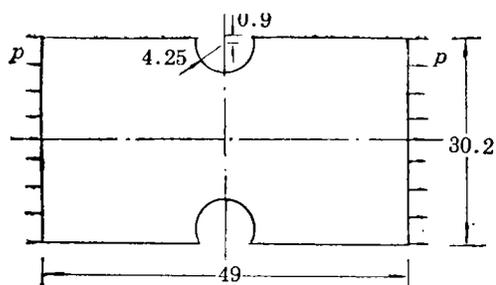


图4(a) - 均匀拉伸作用下的半圆形缺口板
(单位: mm)

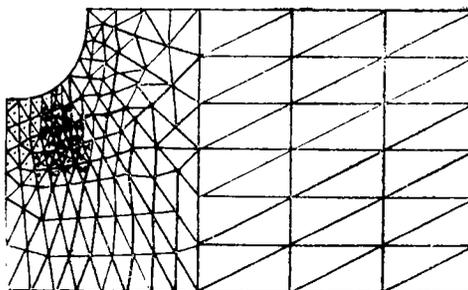


图4(b) 半圆形缺口板有限元网格图、
真实塑性区及混合区分布图

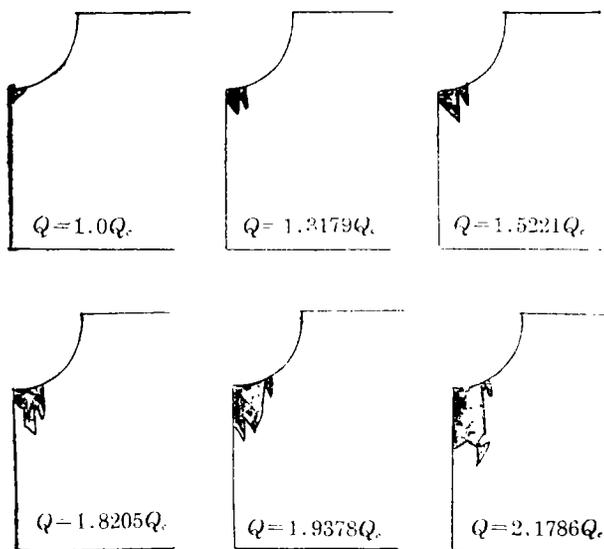


图4(c) 塑性区扩展图

(见图 4(b))。图 4(c) 中给出了结构各单元进入塑性的顺序, 其中 Q_0 为屈服载荷, 当 $Q=2.1786Q_0$ 时载荷全部加完。

在图 1(b)~图 4(b) 中, 真实塑性区 (中心标“·”的单元) 是采用凝缩法得到的, 混合区 (中心标“·”的单元和标“×”的单元构成) 是对整个结构进行有限步分析后而划分出来的。从图中可以看到混合区完全包含了真实的塑性区。作者对上述 4 个算例在整个结构 (Ω) 上用 Lemke 算法进行了弹塑性分析并与凝缩法计算的结果相比较, 计算结果表明在对应的每一载荷增量步内载荷增量相等的情况下, 两种方法得到的计算结果完全相同 (塑性区的扩展, 单元的应力, 节点的位移等都相等)。

表 1 给出了采用两种方法对上面四个算例进行弹塑性分析时在每一载荷增量步内所耗费的机时以及两者之比。表 2 列出了各算例的混合区单元数, 混合区及公共区的节点数, 结构的单元总数和节点总数也列于此表上。从表 1 中可以看到, 采用凝缩法后在每一载荷增量步内所用的机时与采用凝缩法前相比明显减少, 并且前者不到后者的 35%, 特别是当混合区只占整个结构 (Ω) 的很小一部分时, 两者之比更小, 也就是说采用凝缩法后节省的机时更多, 如例 4, 两者之比不到 3%。

表 1 每载荷增量步内所用机时的比较 (单位: 秒)

机时 方法	算 例			
	筒 支 梁	V 型 缺 口 板	裂 纹 板	半 圆 形 缺 口 板
本文方法	9.66	3.79	3.68	3.96
不采用凝缩	31.09	15.66	10.54	147.91
两者之比	31.1%	24.2%	34.9%	2.7%

表 2 单元、节点划分情况

节点、单元数	算 例			
	筒 支 梁	V 型 缺 口 板	裂 纹 板	半 圆 形 缺 口 板
Ω_i 内或 Γ_c 上				
混合区 Ω_m 单元数	77	63	61	50
单元总数 (Ω)	132	108	94	233
混合区 Ω_m 、公共区 Γ_c 节点数	63	44	44	42
节点总数 (Ω)	84	69	61	138

六、结 束 语

本文在用 Lemke 算法对结构进行弹塑性分析时采用了凝缩法, 算例表明用本文的方法进行结构的弹塑性分析是切实可行和有效的, 并且效益十分明显。与不采用凝缩法相比, 本文的方法在计算时可节省大量时间, 但所用内存不变。对于一个工程实际问题, 如果能凭工程经验预测结构中的塑性区, 并把此区域当作混合区用凝缩法进行初始计算, 划分出新的混合区再用凝缩法进行分析, 这样不仅可以更进一步节省计算时间而且还可以大量节省内存。

参 考 文 献

- [1] Sha Desong, Sun Huanchun, Zhang Zongding and Yin Fuxin, A variational

- inequality principle in solid mechanics and application in physically nonlinear problems, *Communications in Applied Numerical Methods*, 6 (1990), 35—45.
- [2] 孙焕纯, 自由—移动边界问题发展概况及其一类虚能量不等式和弱解, *山东工程学院学报*, 5 (2) (1991).
- [3] 张柔雷等, 参变量最小势能原理的有限元参数二次规划解, *计算结构力学及其应用*, 4(1) (1987), 1—11.
- [4] 任其全, 弹塑性有限元分析的凝缩法, *航空学报*, 6(6) (1985), 590—596.
- [5] 陈铁云等, 矩阵更新法在平面应力问题弹—塑性有限元分析中的应用, *上海力学*, 3(2) (1982), 1—16.
- [6] Y. Yamada, et al., Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method, *Int. J Mech. Sci.*, 10 (1968), 348—354.
- [7] G. Duvaut and J. L. Lions, *Les Inequations en Mecanique et en Physique*, 王耀东译, 《力学和物理学中的变分不等方程》, 科学出版社 (1987).

A Condensed Method for Linear Complementary Equations of Elasto-Plastic Problems

Yin Fuxin Sun Huanchun

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P.R. China)

Abstract

This paper presents a condensed method for linear complementary equations of elasto-plastic problems derived from the variational inequations. The present method cuts down computing time enormously and greatly promotes the efficiency of the elasto-plastic analysis for large scale structures.

Key words variational inequations, elasto-plasticity, linear complementary equations, Lemke algorithm