应用数学和力学，第16卷 第11期(1995年11月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

慢扩张旋转流的稳定性分析(Ⅰ)—理论研究*

夏 南 尹协远

(中国科技大学近代力学系，合肥 230026)

(蔡树棠推荐，1995年7月19日收到)

摘 要

本文研究了无粘不可压慢扩张旋转流的稳定性问题．采用多重尺度展开法对有慢扩张的旋转流的非对称扰动进行线化稳定性研究．导出了零阶及一阶扰动模所应满足的微分方程及由于慢扩张引起振幅变化的控制方程．将Plaschko关于慢扩张喷流的结果推广到具有慢扩张的旋转流情况．

关键词 稳定性 旋转流 旋涡运动 喷流

一、引 言

无粘不可压旋转流的稳定性研究有着很强的应用背景．它对于各种旋转机械流场，发动机内流场，旋涡运动及其破碎机理的研究有着重要的作用．长期以来分析主要集中于无扩张的旋转流．一些研究者采用数值方法解线化扰动方程，给出了时间增长率和空间增长率随各参数变化的情况[1]~[3]．另一些则采用分析与数值相结合的方法，给出各种稳定性判据[4]~[6]．对于这样一种“平行”的轴对称旋转流，由于基本流径向速度分量为零，很容易得出其线化小扰动方程组，并进而可以得出关于任意扰动模的二阶常微分方程．以此为基础可以进行各种稳定性分析和计算．在一些实际的流动中如飞机尾涡，发动机内的旋转喷流存在着慢扩张．这样一种具有慢扩张的旋转流的稳定性研究就复杂的多．Faler和Leibovich[7]及Tsai和Widnall[8]利用有慢扩张旋转管流的实验来研究涡破碎问题．当然在实验中管壁的粘性会对基本流产生一定的影响．在理论分析上采用局部平行假设，由实测的速度剖面，采用“平行”的轴对称旋转流稳定性分析方法来进行研究．另一方面由于喷气噪声研究的需要，很多作者轴对称喷流进行了大量研究．当然这是无旋转的流动Bouthier[9]．Crighton和Gaster[10]，Plaschko[11]都研究了有慢扩张的喷流．它们采用多重尺度方法导出了慢扩张喷流线化扰动方程及扰动振幅的控制方程．本文的工作则是将Plaschko的工作推广到带有旋转的慢扩张流．导出慢扩张旋转流的线化扰动方程及扰动振幅控制方程，为进一步的稳定性分析奠定基础．

* 国家自然科学基金资助项目．
1993年7月11日收到初稿．

二、线化扰动方程

在柱坐标(x,r,ϕ)下，不可压无粘流的基本方程为

$$\frac{\partial u^*}{\partial t}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial r}+\frac{w^*}{r}\ \frac{\partial u^*}{\partial \phi}+\frac{\partial p^*}{\partial x}=0 \tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t}+u^*\frac{\partial v^*}{\partial x}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial r}+\frac{w^*}{r}\ \frac{\partial v^*}{\partial \phi}-\frac{w^2}{r}+\frac{\partial p^*}{\partial r}=0 \tag{2.1b}$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t}+u^*\frac{\partial w^*}{\partial x}+v^*\frac{\partial w^*}{\partial r}+\frac{w^*}{r}\ \frac{\partial w^*}{\partial \phi}+\frac{w^*v^*}{r}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial p^*}{\partial \phi}=0 \tag{2.1c}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x}+\frac{\partial v^*}{\partial r}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial w^*}{\partial \phi}+\frac{v^*}{r}=0 \tag{2.1d}$$

设物理量为定常平均量与非定常扰动量之和

$$u=U(x,r)+u(t,x,r,\phi) \tag{2.2a}$$

$$v^*=V(x,r)+v(t,x,r,\phi) \tag{2.2b}$$

$$w^*=W(x,r)+w(t,x,r,\phi) \tag{2.2c}$$

$$p^*=P(x,r)+p(t,x,r,\phi) \tag{2.2d}$$

式中U，V，W，P分别为轴向、径向和周向平均速度分量和平均压力，u，v，w，p为相应的脉动速度和压力分量，平均流应满足轴对称流的Eler方程

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\ \frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial P}{\partial x}=0 \tag{2.3a}$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x}+V\ \frac{\partial V}{\partial r}-\frac{W^2}{r}+\frac{\partial P}{\partial r}=0 \tag{2.3b}$$

$$U\frac{\partial W}{\partial x}+V\ \frac{\partial W}{\partial r}+\frac{WV}{r}=0 \tag{2.3c}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{V}{r}=0 \tag{2.3d}$$

设流线在x方向的斜率为ε，由于是慢扩张流，因此ε为一小量，$\varepsilon\ll 1$. 由量级分析可知，

$$U=O(1),\quad r=O(1),\quad \frac{r}{x}=O(\varepsilon),\quad x=O(\varepsilon^{-1}) \tag{2.4}$$

因此可定义一慢变坐标

$$X=\varepsilon x \tag{2.5}$$

可以看出$X=O(1)$，由(2.3d)可知$V=O(\varepsilon)$，因此可设

$$V=\varepsilon\bar{V} \tag{2.6}$$

这里$\bar{V}=O(1)$，由(2.3a)及(2.3c)可得

$$P=O(1),\quad W=O(1) \tag{2.7}$$

因此忽略高阶小量可由(2.3b)得到

$$\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{W^2}{r} \tag{2.8}$$

将上述各式代入(2.1)式，略去高阶项得到线化扰动方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+N\right)u+N'U+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{2.9a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+N\right)v+\varepsilon N'V-\frac{2W}{r}w+\frac{\partial p}{\partial r}=0 \tag{2.9b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+N\right)w+N'W+\frac{1}{r}(vW+\varepsilon Vw)+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \phi}=0 \tag{2.9c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi}=0 \tag{2.9d}$$

式中

$$N=\varepsilon V\frac{\partial}{\partial r}+U\frac{\partial}{\partial x}+\frac{W}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{2.10a}$$

$$N'=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial r} \tag{2.10b}$$

在无扩张的轴对称旋转流中，$V=0$.任一物理量的扰动量q的表达式应为

$$q=Q(r)\exp[i(\alpha x+n\phi-\beta t)] \tag{2.11}$$

在慢扩张情况下，根据Bouthier[9]理论则应引入一个快变量s，有

$$s=g(X)/\varepsilon \tag{2.12}$$

$$\alpha=\frac{dg(x)}{dx} \tag{2.13}$$

定义扰动向量

$$\boldsymbol{H}=(u,v,w,p) \tag{2.14}$$

将其按ε展开

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{F}(X,r)+\varepsilon\boldsymbol{G}(X,r)+\cdots]\exp\left\{i\left[\frac{g(x)}{\varepsilon}+n\phi-\beta t\right]\right\} \tag{2.15}$$

其中

$$\boldsymbol{F}(x,r)=(F_x,F_r,F_\phi,F_p) \tag{2.16a}$$

$$\boldsymbol{G}(X,r)=(G_x,G_r,G_\phi,G_p) \tag{2.16b}$$

分别为扰动模的零阶和一阶量．将(2.15)式代入(2.9)式则可得到零级近似方程和一阶近似方程．分别写为

$$i\gamma F_x+U'F_r+i\alpha F_p=0 \tag{2.17a}$$

$$i\gamma F_r-\frac{2W}{r}F_\phi+F_p'=0 \tag{2.17b}$$

$$i\gamma F_\phi+\frac{(rW)'}{r}F_r+\frac{in}{r}F_p=0 \tag{2.17c}$$

$$i\alpha F_x+F_r'+\frac{F_r}{r}+\frac{in}{r}F_\phi=0 \tag{2.17d}$$

$$i\gamma G_x+U'G_r+i\alpha G_p=T_1 \tag{2.18a}$$

$$i\gamma G_r-\frac{2W}{r}G_\phi+G_p'=T_2 \tag{2.18b}$$

$$i\gamma G_\phi+\frac{(rW)'}{r}G_r+\frac{in}{r}G_p=T_3 \tag{2.18c}$$

$$iaG_x+G_r'+\frac{G_r}{r}+\frac{in}{r}G_\phi=T_4 \tag{2.18d}$$

式中

$$\gamma=aU-\beta+\frac{nW}{r} \tag{2.19}$$

$$T_1=-\bar{V}F_x'-\frac{\partial}{\partial x}(UF_x+F_p) \tag{2.20a}$$

$$T_2=-U\frac{\partial F_r}{\partial x}-(\bar{V}F_r)' \tag{2.20b}$$

$$T_3=-U\frac{\partial F_\phi}{\partial x}-F_x\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{V}{r}(rF_\phi)' \tag{2.20c}$$

$$T_4=\frac{\partial F_x}{\partial x} \tag{2.20d}$$

上标"′"表示对r的导数。可以看出零阶模方程和一阶模方程左端在形式上完全一样，只不过后者右端项不为零。即为非齐次的。$T_1\sim T_4$为基本流和零阶量的函数。对方程（2.20）可消去任意三个量。得到一个变量的二阶常微分方程。若消去G_x，G_r，G_ϕ 可得出关于G_p的方程为

$$\begin{aligned}G_p''+\left(\frac{1}{r}-\frac{B'}{B}\right)G_p'-\Big[\frac{B}{r^2}\left(a^2+\frac{n^2}{r^2}\right)+\frac{2nW}{\gamma r^2}\Big(\frac{1}{r}+\frac{aU'}{\gamma}\\+\frac{n}{\gamma r^2}(rW)'+\frac{B'}{B}\Big)-\frac{2nW'}{\gamma r^2}\Big]G_p=-T\end{aligned} \tag{2.21}$$

式中

$$B=\gamma^2-\frac{2W}{r^2}(rW)' \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}T=-\frac{iaB}{\gamma^2}T_1-\Big[\frac{1}{r}-\frac{B'}{B}-\frac{2nW}{\gamma r^2}\Big)T_2-T_2'+i\Big[\frac{2W'}{\gamma r}-\frac{n}{r}\\-\frac{2W}{\gamma r}\left(\frac{B'}{B}+\frac{aU'}{\gamma}\right)\Big]T_3+i\frac{2W}{\gamma r}T_3'+\frac{iB}{\gamma}T_4\end{aligned} \tag{2.23}$$

零阶扰动模的方程与一阶左侧相同，只是$T=0$，即方程为齐次

$$\begin{aligned}F_p''+\left(\frac{1}{r}-\frac{B'}{B}\right)F_p'-\Big[\frac{B}{\gamma^2}\left(a^2+\frac{n^2}{r^2}\right)+\frac{2nW}{\gamma r^2}\Big(\frac{1}{r}+\frac{aU'}{\gamma}\\+\frac{n}{\gamma r^2}(rW)'+\frac{B'}{B}\Big)-\frac{2nW'}{\gamma r^2}\Big]F_p=0\end{aligned} \tag{2.24}$$

在无旋转的慢扩张喷流情况下，$W=0$，$\gamma=a(U-c)$，$\gamma'=aU'$，$c=\frac{\beta}{a}$，$B=\gamma^2$，$B'=2\gamma\gamma'$。方程简化为

$$G_p''+\left(\frac{1}{r}-\frac{2U'}{U-c}\right)G_p'-\left(a^2+\frac{n^2}{\gamma^2}\right)G_p=-T \tag{2.25}$$

其中

$$T=-iaT_1+\left(\frac{2U'}{U-c}-\frac{1}{r}\right)T_2-T_2'-\frac{in}{r}T_3+ia(U-c)T_4 \tag{2.26}$$

这正是Plaschko的结果。对于其它三个扰动分量也可导出类似的公式。

三、振幅变化控制方程

方程(2.21)可简写为

$$LG_p = -T \tag{3.1}$$

或

$$G_p'' + c_1 G_p' + c_2 G_p = -T \tag{3.2}$$

$$F_p'' + c_1 F_p' + c_2 F_p = 0 \tag{3.3}$$

若F_p^0为无扩张旋转流的解，其也满足同样的方程，即有

$$F_p^{0''} + c_1 F_p^{0'} + c_2 F_p^0 = 0 \tag{3.4}$$

则零阶解可为

$$F_p(X, r) = A(X) F_p^0(X, r) \tag{3.5}$$

$A(X)$为不同X位置的振幅．对非齐次方程(3.2)应找出一伴随函数$\tilde{F}_p^0$使得$\int_0^\infty \tilde{F}_p^0 LG_p dr = 0$，可以得到此伴随函数为

$$\tilde{F}_p^0 = \frac{rF_p^0}{\gamma^2 - \frac{2W}{r^2}(rW)'} = \frac{rF_p^0}{B} \tag{3.6}$$

由此有等式

$$\int_0^\infty \tilde{F}_p^0 T dr = 0 \tag{3.7}$$

由T的表达式里可以看出有三部分，即扰动模对r的导数，基本流对X的导数及扰动模对X的导数。对F_x，F_r，F_ϕ同样有(3.5)式，可统一写为

$$\boldsymbol{F}(X, r) = A(X)\boldsymbol{F}^0 \tag{3.8}$$

将其代入T的表达式，可将T简写为

$$T = Q_1 \frac{dA}{dX} + Q_2 A \tag{3.9}$$

利用式(3.7)，最后得到关于振幅$A(X)$的常微分方程

$$K(X)\frac{dA}{dX} + l(X)A(X) = 0 \tag{3.10}$$

令

$$l(X) = l_1(X) + l_2(X) \tag{3.11}$$

式中

$$K(X) = \int_0^\infty \frac{rF_p^0}{B}\Big\{\frac{iaB}{\gamma^2}(UF_x^0 + F_p^0) - \Big(\frac{B'}{B} + \frac{2nW}{\gamma r^2}\Big)UF_r^0 + U'F_r^0 - iUF_x^0 a + i\Big[\frac{2W}{\gamma r}\Big(\frac{B'}{B} + \frac{aU'}{\gamma}\Big) - \frac{2W'}{\gamma r}\Big]UF_\phi^0 - i\frac{2W}{\gamma r}(UF_\phi^0)' - \frac{iB}{\gamma}F_x^0\Big\}dr \tag{3.12}$$

$$l_1(X) = \int_0^\infty \frac{rF_p^0}{B}\Big\{\frac{iaB}{\gamma^2}\bar{V}F_x^{0\prime} + i\Big[\frac{n}{r} + \frac{2W}{\gamma r}\Big(\frac{B'}{B} + \frac{aU'}{\gamma}\Big) - \frac{2W'}{\gamma r}\Big]\frac{\bar{V}}{r}(rF_\phi^0)' - i\frac{2W}{\gamma r}\Big(\frac{\bar{V}}{r}(rF_\phi^0)'\Big)' + (\bar{V}F_r^0)'' + \Big[\frac{1}{r} - \frac{B'}{B} - \frac{2nW}{\gamma r^2}\Big](\bar{V}F_r^0)'\Big\}dr \tag{3.13}$$

$$
\begin{aligned}
l_2(X)=\int_0^\infty \frac{rF_\phi^0}{B}\Big\{&-i\frac{2W}{\gamma r}\Big(F_x^0\frac{\partial W}{\partial X}\Big)'+\frac{iaB}{\gamma^2}F_x^0\frac{\partial U}{\partial X}+i\Big[\frac{n}{r}\\
&+\frac{2W}{\gamma r}\Big(\frac{B'}{B}+\frac{aU'}{\gamma}\Big)-\frac{2W'}{\gamma r}\Big]F_x^0\frac{\partial W}{\partial X}+\frac{iaB}{\gamma^2}\Big(U\frac{\partial F_x^0}{\partial X}+\frac{\partial F_\phi^0}{\partial X}\Big)\\
&-\Big(\frac{B'}{B}+\frac{2nW}{\gamma r^2}\Big)U\frac{\partial F_r^0}{\partial X}+U'\frac{\partial F_r^0}{\partial X}-iU\frac{\partial}{\partial X}(aF_x^0)\\
&+i\Big[\frac{2W}{\gamma r}\Big(\frac{B'}{B}+\frac{aU'}{\gamma}\Big)-\frac{2W'}{\gamma r}\Big]U\frac{\partial F_\phi^0}{\partial X}\\
&-i\frac{2W}{\gamma r}\Big(U\frac{\partial F_\phi^0}{\partial X}\Big)'-\frac{iB}{\gamma}\frac{\partial F_x^0}{\partial X}\Big\}dr
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

这里l_1描述了径向速度的影响，而l_2则为流向速度U和W影响的项．很容易证明，在无旋转慢扩张喷流的情况下，上述诸式则简化为Plaschko[11]的式子．

方程(3.10)～(3.14)即为描述慢扩张旋转流由于基本流流线的扩张而引起扰动模振幅变化的方程．

慢扩张旋转流和无扩张旋转流有很大的差别．首先对基本流来说后者流向速度U和旋转速度W不随轴向位置x发生变化．因此只需在一个x位置上分析就可决定流动是稳定还是不稳定．对稳定的流动，扰动模是不随x位置发生变化的．而对慢扩张流其流向速度U和旋转速度W是随轴向位置发生变化的．即使用“平行”旋转流的稳定性判据来分析，可能在一些x位置流动是稳定的，而在另一些位置又可能是不稳定的．同时对于稳定的流动其扰动模也会随着x位置发生变化．因此其稳定性分析就更为复杂得多．

四、结　束　语

对慢扩张旋转流用多重尺度法，导出其线化的零阶和一阶扰动方程，并进而导出由于慢扩张而引起的扰动振幅所应满足的积分微分方程．而Plaschko的方程正是这一关系在无旋转情况下的特例．

致谢　作者对美国Connecticut大学教授 J.D.Lin 的指导和帮助表示衷心的感谢！

参　考　文　献

[1] M. Lessen and F. Paillet, The stability of a trailing line vortex. Part 1. Inviscid theory, *J. Fluid Mech.*, 63(1974), 753—763.

[2] P. W. Duck and M. R. Foster, The inviscid stability of a trailing line vortex, *ZAMP.*, 31(1980), 524—532.

[3] Yin Xieyuan and Xia Nan., The investigation of spatial instability of swirling flow, *Advance in Applied Math. and Mech. in China*, Pergamon Press. 3(1991),75—85.

[4] S. Leibovich and K. Stewartson, A sufficient condition for instability of columnar vortices, *J. Fluid Mech.*, 126(1983),335—356.

[5] H. Ludwieg, Stabilitat der stromung in einem zylindrischen Ringraum, *ZGW*,

9(1961), 530—361.

[6] L. N. Howard and A. S. Gupta, On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flow, *J. Fluid Mech.*, 14(1962), 463—476.

[7] J. H. Faler and S. Leibovich, Disrupted states of vortex flow and vortex breakdown, *The Physics of Fluids*, 20(9)(1977), 1385—1400.

[8] C. Y. Tsai and S. E. Widnall, Examination of group-velocity criterion for breakdown of vortex flow in a divergent duct, *Phys. Fluids*, 23(5)(1980), 864—870.

[9] M. Bouthier, *J. Méc.*, 11(1972), 599.

[10] D. G. Crighton and M. Gaster, Stability of slowly diverging jet flow, *J. Fluid Mech.*, 77(1976), 397—413.

[11] P. Plaschko, Helical instability of slowly divergent jet *J. Fluid Mech.*, 92 (1979), 209—215.

Stability Analysis of Slowly Divergent Swirling Flow (I) ——Theory

Xia Nan Yin Xieyuan

(Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract

The stability of inviscid incompressible swirling flow with slow divergence is investigated. A multiple scale expansion is used to develop a linear stability study of slowly divergent swirling flow with non-axisymmetric disturbances. The differential equations of zero-order and first-order disturbance module and governing equation of amplitude variation due to slowly divergent flow are derived. The Plaschko's equation for slowly divergent swirl-free jet has been extended to slowly divergent flow with swirl in the present study.

Key words stability, swirling flow, vortex flow