应用数学和力学，第16卷 第12期（1995年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类三阶非线性微分方程解的不稳定性*

卢 德 洲[1]

（张石生推荐，1994年11月10日收到）

摘 要

文献[1]讨论了非线性缓变系统的渐近稳定性，文献[2]讨论了三阶变系数线性微分方程解的不稳定性。本文应用文献[1]、[2]的方法讨论一类三阶非线性微分方程解的不稳定性。

关键词 常微分方程 运动稳定性理论 非线性微分方程

一、引 言

考虑方程

$$\dddot{x}+a(t)\ddot{x}+b(t)\dot{x}+c(t)x=f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) \tag{1.1}$$

其中$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$是t的实连续函数，$f(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$是$t$，$x$，$\dot{x}$，$\ddot{x}$的关于$x$，$\dot{x}$，$\ddot{x}$的非线性实连续函数。

其等价系统为：

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=x_3,\quad \frac{dx_3}{dt}=-c(t)x_1-b(t)x_2-a(t)x_3+f(t, x_1, x_2, x_3) \tag{1.2}$$

假设其对应的线性微分方程组

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=x_3,\quad \frac{dx_3}{dt}=-c(t)x_1-b(t)x_2-a(t)x_3 \tag{1.3}$$

的特征方程

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -c(t) & -b(t) & -a(t)-\lambda \end{vmatrix}=0$$

即

$$\lambda^3+a(t)\lambda^2+b(t)\lambda+c(t)=0 \tag{1.4}$$

的根$\lambda_i(t)$ $(i=1, 2, 3)$中至少有一个具有正实部。

由于$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$是t的实连续函数，因此如果特征方程(1.4)有复根，必共轭成对。

由根与系数的关系知：

---

* 贵州省科学技术基金资助课题。

1 贵州师范大学数学系，贵阳 550000.

$$\left.\begin{aligned}-a(t)&=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\lambda_3(t)\\ b(t)&=\lambda_1(t)\lambda_2(t)+\lambda_2(t)\lambda_3(t)+\lambda_3(t)\lambda_1(t)\\ -c(t)&=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

记 $\Delta(t)=a(t)b(t)c(t)-c^2(t)$ (1.6)

将(1.5)式代入(1.6)式，整理得

$$\begin{aligned}\Delta(t)&=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\{\lambda_1^2(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]\\&\quad+\lambda_1(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]^2+\lambda_2(t)\lambda_3(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]\}\\&=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)[\lambda_1(t)+\lambda_2(t)][\lambda_2(t)+\lambda_3(t)][\lambda_3(t)+\lambda_1(t)]\end{aligned}\tag{1.7}$$

根据巴尔巴欣公式[1]，取

$$\begin{aligned}V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)&=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3\\&\quad+V_{22}(t)x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2\end{aligned}\tag{1.8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&V_{11}(t)=-ab^2-a^2c+bc-ac^2-c^3,\ V_{12}(t)=-a^2b-c^2-bc^2\\&V_{13}(t)=-ab+c,V_{22}(t)=-a^3-c-a^2c-bc-b^2c-ac^2\\&V_{23}(t)=-a^2-ac-c^2,V_{33}(t)=-a-c-bc\end{aligned}\right\}\tag{1.9}$$

这里的a，b，c分别是(1.1)中的$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$。

而函数$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$对于时间t的由扰动运动方程(1.2)构成的全导数$dV/dt|_{(1.2)}$为

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.2)}&=\dot V_{11}(t)x_1^2+2\dot V_{12}(t)x_1x_2+2\dot V_{13}(t)x_1x_3+\dot V_{22}(t)x_2^2\\&\quad+2\dot V_{23}(t)x_2x_3+\dot V_{33}(t)x_3^2+2\Big[V_{11}(t)x_1\frac{dx_1}{dt}\\&\quad+V_{12}(t)\left(\frac{dx_1}{dt}x_2+x_1\frac{dx_2}{dt}\right)+V_{13}(t)\left(\frac{dx_1}{dt}x_3+x_1\frac{dx_3}{dt}\right)\\&\quad+V_{22}(t)x_2\frac{dx_2}{dt}+V_{23}(t)\left(\frac{dx_2}{dt}x_3+x_2\frac{dx_3}{dt}\right)+V_{33}(t)x_3\frac{dx_3}{dt}\Big]\\&=\dot V_{11}(t)x_1^2+2\dot V_{12}(t)x_1x_2+2\dot V_{13}(t)x_1x_3+\dot V_{22}(t)x_2^2+2\dot V_{23}(t)x_2x_3\\&\quad+\dot V_{33}(t)x_3^2+[2V_{11}(t)x_1+2V_{12}(t)x_2+2V_{13}(t)x_3]\frac{dx_1}{dt}\\&\quad+[2V_{12}(t)x_1+2V_{22}(t)x_2+2V_{23}(t)x_3]\frac{dx_2}{dt}+[2V_{13}(t)x_1\\&\quad+2V_{23}(t)x_2+2V_{33}(t)x_3]\frac{dx_3}{dt}\\&=\dot V_{11}(t)x_1^2+2\dot V_{12}(t)x_1x_2+2\dot V_{13}(t)x_1x_3+\dot V_{22}(t)x_2^2\\&\quad+2\dot V_{23}(t)x_2x_3+\dot V_{33}(t)x_3^2+[2V_{11}(t)x_1+2V_{12}(t)x_2\\&\quad+2V_{13}(t)x_3]x_2+[2V_{12}(t)x_1+2V_{22}(t)x_2+2V_{23}(t)x_3]x_3\\&\quad+[2V_{13}(t)x_1+2V_{23}(t)x_2+2V_{33}(t)x_3][-c(t)x_1-b(t)x_2\\&\quad-a(t)x_3+f(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)]\\&=\dot V_{11}(t)x_1^2+2\dot V_{12}(t)x_1x_2+2\dot V_{13}(t)x_1x_3+\dot V_{22}(t)x_2^2+2\dot V_{23}(t)x_2x_3\end{aligned}$$

$$+\dot{V}_{33}(t)x_3^2+2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[2V_{13}(t)x_1+2V_{23}(t)x_2+2V_{33}(t)x_3]f(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3) \tag{1.10}$$

假设方程(1.1)中的$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$和$f(t;\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x})$满足下列条件：

(Ⅰ)　$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有解（其中t_0足够大），即存在一个正常数$M>0$，使得

$$|a(t)|\leqslant M,\quad |b(t)|\leqslant M,\quad |c(t)|\leqslant M$$

(Ⅱ)　存在区域$D=\{t\geqslant t_0,\ |x|\leqslant H,\ |\dot{x}|\leqslant H,\ |\ddot{x}|\leqslant H\}$，在这个区域中$f(t;\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x})$满足不等式

$|f(t;\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x})|\leqslant A(|x|+|\dot{x}|+|\ddot{x}|)$　　其中A是正常数

(Ⅲ)　在区域D中，函数$f(t;\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x})$连续，并满足使方程(1.1)对在$D$内的任何初始条件有唯一的解。

(Ⅳ)　$\max\limits_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\dfrac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\dfrac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\dfrac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon,\ A\leqslant\mu$

其中

$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{18M^2+10M+1},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{10M+3}\right\}$$

$$\mu=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\xi|\Delta(t)|}{14M^2+9M}\right\}$$

ξ，η是常数，且$\xi>0$，$\eta>0$，$0<\xi+\eta<2$。

我们约定在本文的全部讨论过程中都假设方程(1.1)满足条件(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)，(Ⅳ)及$\Delta(t)\neq 0$，因为在下面定理的证明中要用到它们。

二、特征方程有三个具有正实部的根

定理1　如果特征方程(1.4)的根均具有正实部，即$\mathrm{Re}(\lambda_i(t))\geqslant\delta>0\ (i=1,\ 2,\ 3)$对所有的$t\geqslant t_0$都成立，其中$\delta$是与$t$无关的一个正常数，则方程(1.1)的零解不稳定。

证　我们证明方程(1.1)的等价系统(1.2)的稳定性。

设$\lambda_i(t)\geqslant\delta>0\ (i=1,\ 2,\ 3)$或$\lambda_1(t)\geqslant\delta>0$，$\mathrm{Re}(\lambda_i(t))\geqslant\delta>0\ (i=2,\ 3)$

于是由(1.5)式有

$$-a(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\lambda_3(t)=\lambda_1(t)+[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]\geqslant 3\delta$$

$$b(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)+\lambda_2(t)\lambda_3(t)+\lambda_3(t)\lambda_1(t)=\lambda_1(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]+\lambda_2(t)\lambda_3(t)\geqslant 3\delta^2$$

$$-c(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)=\lambda_1(t)[\lambda_2(t)\lambda_3(t)]\geqslant\delta^3$$

由(1.7)式有

$$\Delta(t)=\lambda_1(t)[\lambda_2(t)\lambda_3(t)]\{\lambda_1^2(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]+\lambda_1(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]^2+\lambda_2(t)\lambda_3(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]\}\geqslant 8\delta^6$$

根据公式(1.8)取

$$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3+V_{22}(t)x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2$$

由　$$-a(t)\geqslant 3\delta,\quad b(t)\geqslant 3\delta^2,\quad -c(t)\geqslant\delta^3,\quad -b(t)c(t)=b(t)[-c(t)]\geqslant 3\delta^5$$

所以 $V_{33}(t)=-a(t)-c(t)-b(t)c(t)>0$

当$x_3\neq 0$时，$V(t;\ 0,\ 0,\ x_3)=V_{33}(t)x_3^2>0 \qquad (t\geqslant t_0)$

所以函数$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$在任意小的x_i值和任意大的$t(t\geqslant t_0)$值时，可以取正的值。

其次证明函数$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$对于时间t的由扰动运动方程(1.2)构成的全导数$dV/dt|_{(1.2)}$在$t_0\leqslant t<+\infty$内是正定的函数。

事实上，由(1.10)式和条件(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)，(Ⅳ)有

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.2)} &= \dot V_{11}(t)x_1^2+2\dot V_{12}(t)x_1x_2+2\dot V_{13}(t)x_1x_3+\dot V_{22}(t)x_2^2+2\dot V_{23}(t)x_2x_3 \\
&\quad +\dot V_{33}(t)x_3^2+2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[2V_{13}(t)x_1+2V_{23}(t)x_2 \\
&\quad +2V_{33}(t)x_3]f(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3) \\
&\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-[|\dot V_{11}(t)|x_1^2+|\dot V_{12}(t)|(x_1^2+x_2^2)+|\dot V_{13}(t)|(x_1^2+x_3^2) \\
&\quad +|\dot V_{22}(t)|x_2^2+|\dot V_{23}(t)|(x_2^2+x_3^2)+|\dot V_{33}(t)|x_3^2]-|2V_{13}(t)x_1 \\
&\quad +2V_{23}(t)x_2+2V_{33}(t)x_3||f(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)| \\
&\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-[(|\dot V_{11}(t)|+|\dot V_{12}(t)|+|\dot V_{13}(t)|)x_1^2+(|\dot V_{12}(t)| \\
&\quad +|\dot V_{22}(t)|+|\dot V_{23}(t)|)x_2^2+(|\dot V_{13}(t)|+|\dot V_{23}(t)|+|\dot V_{33}(t)|)x_3^2] \\
&\quad -2[|V_{13}(t)||x_1|+|V_{23}(t)||x_2|+|V_{33}(t)||x_3|]A[|x_1|+|x_2|+|x_3|] \\
&\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\varepsilon[(2|a|^2+|b|^2+5|c|^2 \\
&\quad +4|a||b|+4|a||c|+2|b||c|+|a|+2|b|+3|c|+1)x_1^2 \\
&\quad +(5|a|^2+|b|^2+2|c|^2+2|a||b|+4|b||c|+4|a||c| \\
&\quad +3|a|+|b|+6|c|+1)x_2^2+(4|a|+2|b|+4|c|+3)x_3^2] \\
&\quad -2A[|V_{13}(t)|x_1^2+|V_{23}(t)|x_2^2+|V_{33}(t)|x_3^2+(|V_{13}(t)| \\
&\quad +|V_{23}(t)|)|x_1||x_2|+(|V_{23}(t)|+|V_{33}(t)|)|x_2||x_3| \\
&\quad +(|V_{13}(t)|+|V_{33}(t)|)|x_1||x_3|] \\
&\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\varepsilon[(18M^2+6M+1)x_1^2+(18M^2+10M \\
&\quad +1)x_2^2+(10M+3)x_3^2]-A[2|V_{13}(t)|x_1^2+2|V_{23}(t)|x_2^2 \\
&\quad +2|V_{33}(t)|x_3^2+(|V_{13}(t)|+|V_{23}(t)|)(x_1^2+x_2^2) \\
&\quad +(|V_{23}(t)|+|V_{33}(t)|)(x_2^2+x_3^2)+(|V_{13}(t)| \\
&\quad +|V_{33}(t)|)(x_1^2+x_3^2)] \\
&\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\varepsilon[(18M^2+10M+1)x_1^2 \\
&\quad +(18M^2+10M+1)x_2^2+(10M+3)x_3^2]-A[(4|V_{13}(t)| \\
&\quad +|V_{23}(t)|+|V_{33}(t)|)x_1^2+(|V_{23}(t)|+4|V_{23}(t)| \\
&\quad +|V_{33}(t)|)x_2^2+(|V_{13}(t)|+|V_{23}(t)|+4|V_{33}(t)|)x_3^2] \\
&\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-[\eta|\Delta(t)|x_1^2+\eta|\Delta(t)|x_2^2+\eta|\Delta(t)|x_3^2] \\
&\quad -A[(|a|^2+|c|^2+4|a||b|+|b||c|+|a||c|+|a|+5|c|)x_1^2 \\
&\quad +(4|a|^2+4|c|^2+|a||b|+|b||c|+4|a||c|+|a|+2|c|)x_2^2 \\
&\quad +(|a|^2+|c|^2+|a||b|+4|b||c|+|a||c|+4|a|+5|c|)x_3^2] \\
&\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\eta\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-A[(8M^2+6M)x_1^2 \\
&\quad +(14M^2+3M)x_2^2+(8M^2+9M)x_3^2] \\
&\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\eta\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\mu[(14M^2+9M)x_1^2 \\
&\quad +(14M^2+9M)x_2^2+(14M^2+9M)x_3^2]
\end{aligned}
$$

$$\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\eta\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-[\xi|\Delta(t)|x_1^2+\xi|\Delta(t)|x_2^2+\xi|\Delta(t)|x_3^2]$$
$$=2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\eta\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\xi\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$=(2-\xi-\eta)\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$\geqslant 8(2-\xi-\eta)\delta^6(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

所以$dV/dt|_{(1.2)}$是正定的。由条件(Ⅰ)容易证明$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$具有无穷小上界。

根据非定常运动的李雅普诺夫不稳定定理[3]，可知方程(1.2)的零解不稳定，从而方程(1.1)的零解不稳定。

三、特征方程有两个具有正实部的根

定理2 在方程(1.1)中设

1. 特征方程(1.4)的根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$满足

$$\delta_1<\lambda_2(t)<\delta_2,\quad -\delta_4<\lambda_1(t)<-\delta_3,\quad \delta_5<\lambda_3(t)$$

其中$\delta_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$是与$t$无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3<\delta_4<\delta_5$；

2. $a(t)+c(t)+b(t)c(t)<0$对所有的$t\geqslant t_0$都成立。

则方程(1.1)的零解不稳定。

证 我们证明方程(1.1)的等价系统(1.2)的稳定性。

由条件1，有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)=-|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)|<-\delta_3\delta_1\delta_5=-\delta_1\delta_3\delta_5<0$$
$$\lambda_1(t)+\lambda_2(t)<-\delta_3+\delta_2=-(\delta_3-\delta_2)<0,\quad \lambda_2(t)+\lambda_3(t)>\delta_1+\delta_5>0$$
$$\lambda_3(t)+\lambda_1(t)>\delta_5-\delta_4>0$$

由(1.7)式有

$$\Delta(t)=|\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)||\lambda_1(t)+\lambda_2(t)||\lambda_2(t)+\lambda_3(t)||\lambda_3(t)+\lambda_1(t)|$$
$$>\delta_1\delta_3\delta_5(\delta_3-\delta_2)(\delta_1+\delta_5)(\delta_5-\delta_4)>0$$

根据公式(1.8)取

$$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3+V_{22}(t)x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2$$

根据条件(Ⅰ)，容易证明$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$具有无穷小上界，再根据条件2，显然可知，当$x_3\neq 0$时

$$V(t;\ 0,\ 0,\ x_3)=V_{33}(t)x_3^2>0 \qquad (t\geqslant t_0)$$

所以函数$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$在任意小的x_i值和任意大的$t(t\geqslant t_0)$值时，可以取正的值。

再考察$dV/dt|_{(1.2)}$，类似于定理1有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.2)}\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\eta\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\xi\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$=(2-\xi-\eta)\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$>(2-\xi-\eta)\delta_1\delta_3\delta_5(\delta_3-\delta_2)(\delta_1+\delta_5)(\delta_5-\delta_4)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

所以$dV/dt|_{(1.2)}$是正定的。

根据非定常运动的李雅普诺夫不稳定定理[3]，可知方程(1.2)的零解不稳定，从而方程(1.1)的零解不稳定。

定理3 对于方程(1.1)设

1．特征方程(1.4)的根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$满足

$$\delta_1<\lambda_2(t)\leqslant\lambda_3(t)<\delta_2,\quad \lambda_1(t)<-\delta_3$$

其中$\delta_i(i=1,\ 2,\ 3)$是与t无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3$;

2．$a(t)+c(t)+b(t)c(t)>0$对所有的$t\geqslant t_0$都成立．

则方程(1.1)的零解不稳定．

证 我们证明方程(1.1)的等价系统(1.2)的稳定性．

由条件1，有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)=-|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)|<-\delta_3\delta_1\delta_1=-\delta_1^2\delta_3<0$$

$$\lambda_1(t)+\lambda_2(t)<-\delta_3+\delta_2=-(\delta_3-\delta_2)<0,\quad \lambda_2(t)+\lambda_3(t)>\delta_1+\delta_1=2\delta_1>0$$

$$\lambda_1(t)+\lambda_3(t)<-\delta_3+\delta_2=-(\delta_3-\delta_2)<0$$

由(1.7)式有

$$\Delta(t)=-|\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)||\lambda_1(t)+\lambda_2(t)||\lambda_2(t)+\lambda_3(t)||\lambda_3(t)+\lambda_1(t)|$$
$$<-\delta_1^2\delta_3(\delta_3-\delta_2)(2\delta_1)(\delta_3-\delta_2)=-2\delta_1^3\delta_3(\delta_3-\delta_2)^2<0$$

根据公式(1.8)取

$$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3$$
$$+V_{22}(t)x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2$$

根据条件(Ⅰ)，容易证明$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$具有无穷小上界，再根据条件2,显然可知，当$x_3\neq0$时

$$V(t;\ 0,\ 0,\ x_3)=V_{33}(t)x_3^2<0\qquad(t\geqslant t_0)$$

所以函数$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$在任意小的x_i值和任意大的$t(t\geqslant t_0)$值时，可以取负的值．

其次证明函数$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$对于时间t的由扰动运动方程(1.2)构成的全导数$dV/dt|_{(1.2)}$在$t_0\leqslant t<\infty$内是负定的函数．

事实上，由(1.10)式和条件(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)，(Ⅳ)有

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{(1.2)}=\dot V_{11}(t)x_1^2+2\dot V_{12}(t)x_1x_2+2\dot V_{13}(t)x_1x_3+\dot V_{22}(t)x_2^2+2\dot V_{23}(t)x_2x_3$$
$$+\dot V_{33}(t)x_3^2+2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[2V_{13}(t)x_1+2V_{23}(t)x_2$$
$$+2V_{33}(t)x_3]f(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$$
$$\leqslant2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[|\dot V_{11}(t)|x_1^2+|\dot V_{12}(t)|(x_1^2+x_2^2)$$
$$+|\dot V_{13}(t)|(x_1^2+x_3^2)+|\dot V_{22}(t)|x_2^2+|\dot V_{23}(t)|(x_2^2+x_3^2)$$
$$+|\dot V_{33}(t)|x_3^2]+2[|V_{13}(t)||x_1|+|V_{23}(t)||x_2|$$
$$+|V_{33}(t)||x_3|]A[|x_1|+|x_2|+|x_3|]$$
$$\leqslant2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[(|\dot V_{11}(t)|+|\dot V_{12}(t)|+|\dot V_{13}(t)|)x_1^2$$
$$+(|\dot V_{12}(t)|+|\dot V_{22}(t)|+|\dot V_{23}(t)|)x_2^2+(|\dot V_{13}(t)|+|\dot V_{23}(t)|$$
$$+|\dot V_{33}(t)|)x_3^2]+A[2|V_{13}(t)|x_1^2+2|V_{23}(t)|x_2^2+2|V_{33}(t)|x_3^2$$
$$+(|V_{13}(t)|+|V_{23}(t)|)(x_1^2+x_2^2)+(|V_{23}(t)|$$
$$+|V_{33}(t)|)(x_2^2+x_3^2)+(|V_{13}(t)|+|V_{33}(t)|)(x_3^2+x_1^2)]$$
$$\leqslant2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\varepsilon[(2|a|^2+|b|^2+5|c|^2+4|a||b|$$
$$+4|a||c|+2|b||c|+|a|+2|b|+3|c|+1)x_1^2$$
$$+(5|a|^2+|b|^2+2|c|^2+2|a||b|+4|b||c|+4|a||c|$$

$$
\begin{aligned}
&+3|a|+|b|+6|c|+1)x_2^2+(4|a|+2|b|+4|c|+3)x_3^2]\\
&+A[(4|V_{13}(t)|+|V_{23}(t)|+|V_{33}(t)|)x_1^2+(|V_{13}(t)|\\
&+4|V_{23}(t)|+|V_{33}(t)|)x_2^2+(|V_{13}(t)|+|V_{23}(t)|\\
&+4|V_{33}(t)|)x_3^2]\\
\leqslant{}&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\varepsilon[(18M^2+6M+1)x_1^2+(18M^2\\
&+10M+1)x_2^2+(10M+3)x_3^2]+A[(|a|^2+|c|^2+4|a||b|\\
&+|b||c|+|a||c|+|a|+5|c|)x_1^2+(4|a|^2+4|c|^2+|a||b|\\
&+|b||c|+4|a||c|+|a|+2|c|)x_2^2+(|a|^2+|c|^2+|a||b|\\
&+4|b||c|+|a||c|+4|a|+5|c|)x_3^2]\\
\leqslant{}&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\varepsilon[(18M^2+10M+1)x_1^2\\
&+(18M^2+10M+1)x_2^2+(10M+3)x_3^2]\\
&+A[(8M^2+6M)x_1^2+(14M^2+9M)x_2^2+(8M^2+9M)x_3^2]\\
\leqslant{}&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\varepsilon[(18M^2+10M+1)x_1^2\\
&+(18M^2+10M+1)x_2^2+(10M+3)x_3^2]+\mu[(14M^2+9M)x_1^2\\
&+(14M^2+9M)x_2^2+(14M^2+9M)x_3^2]\\
\leqslant{}&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[\eta|\Delta(t)|x_1^2+\eta|\Delta(t)|x_2^2+\eta|\Delta(t)|x_3^2]\\
&+[\xi|\Delta(t)|x_1^2+\xi|\Delta(t)|x_2^2+\xi|\Delta(t)|x_3^2]\\
={}&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\eta\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\\
&-\xi\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\\
={}&(2-\xi-\eta)\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\\
<{}&-2(2-\xi-\eta)\delta_1^3\delta_3(\delta_3-\delta_2)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)
\end{aligned}
$$

所以$dV/dt|_{(1.2)}$是负定的。

应用非定常运动的李雅普诺夫不稳定定理[3]，可知方程（1.2）的零解不稳定，从而方程(1.1)的零解不稳定。

四、特征方程有一个具有正实部的根

定理4 在方程(1.1)中设

1．特征方程(1.4)的根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$满足

$$-\delta_2<\lambda_3(t)<-\delta_1,\quad \delta_3<\lambda_1(t)<\delta_4,\quad \lambda_2(t)<-\delta_5$$

其中$\delta_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$是与$t$无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3<\delta_4<\delta_5$；

2．$a(t)+c(t)+b(t)c(t)<0$对所有的$t\geqslant t_0$都成立。

则方程(1.1)的零解不稳定。

证 我们证明方程(1.1)的等价系统(1.2)的稳定性。

由条件1，有

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)=|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)|>\delta_3\delta_5\delta_1=\delta_1\delta_3\delta_5>0\\
&\lambda_1(t)+\lambda_2(t)<\delta_4-\delta_5=-(\delta_5-\delta_4)<0\\
&\lambda_2(t)+\lambda_3(t)<-\delta_5-\delta_1=-(\delta_5+\delta_1)<0\\
&\lambda_3(t)+\lambda_1(t)>-\delta_2+\delta_3=(\delta_3-\delta_2)>0
\end{aligned}
$$

由(1.7)式有

$$\Delta(t)=|\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)||\lambda_1(t)+\lambda_2(t)||\lambda_2(t)+\lambda_3(t)||\lambda_3(t)+\lambda_1(t)|$$
$$>\delta_1\delta_3\delta_5(\delta_5-\delta_4)(\delta_5+\delta_1)(\delta_3-\delta_2)>0$$

根据公式(1.8)取

$$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3$$
$$+V_{22}(t)x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2$$

根据条件(Ⅰ)，容易证明$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$具有无穷小上界，再根据条件2，显然可知，当$x_3\neq 0$时

$$V(t;\ 0,\ 0,\ x_3)=V_{33}(t)x_3^2>0\qquad(t\geqslant t_0)$$

所以函数$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$在任意小的x_i值和任意大的$t(t\geqslant t_0)$值时，可以取正的值。

再考察$dV/dt|_{(1.2)}$，类似于定理1有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.2)}\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\eta\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$-\xi\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$=(2-\xi-\eta)\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$>(2-\xi-\eta)\delta_1\delta_3\delta_5(\delta_5-\delta_4)(\delta_5+\delta_1)(\delta_3-\delta_2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

所以$dV/dt|_{(1.2)}$是正定的。

应用非定常运动的李雅普诺夫不稳定定理[3]，可知方程(1.2)的零解不稳定，从而方程(1.1)的零解不稳定。

定理5 如果方程(1.1)满足下列条件：

1. 特征方程(1.4)的根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$满足

$$-\delta_2<\lambda_2(t)\leqslant\lambda_3(t)<-\delta_1,\quad \delta_3<\lambda_1(t)$$

其中$\delta_i(i=1,\ 2,\ 3)$是与t无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3$；

2. $a(t)+c(t)+b(t)c(t)>0$对所有的$t\geqslant t_0$都成立。

则方程(1.1)的零解不稳定。

证 我们证明方程(1.1)的等价系统(1.2)的稳定性。

由条件1，有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)=|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)|>\delta_3\delta_1\delta_1=\delta_1^2\delta_3>0$$
$$\lambda_1(t)+\lambda_2(t)>\delta_3-\delta_2>0,\quad \lambda_2(t)+\lambda_3(t)<-\delta_1-\delta_1=-2\delta_1<0$$
$$\lambda_3(t)+\lambda_1(t)>-\delta_2+\delta_3=\delta_3-\delta_2>0$$

由(1.7)式有

$$\Delta(t)=-|\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)||\lambda_1(t)+\lambda_2(t)||\lambda_2(t)+\lambda_3(t)||\lambda_3(t)+\lambda_1(t)|$$
$$<-\delta_1^2\delta_3(\delta_3-\delta_2)(2\delta_1)(\delta_3-\delta_2)=-2\delta_1^3\delta_3(\delta_3-\delta_2)^2<0$$

根据公式(1.8)取

$$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3+V_{22}(t)x_2^2$$
$$+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2$$

根据条件(Ⅰ)，容易证明$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$具有无穷小上界，再根据条件2，显然可知当$x_3\neq 0$时

$$V(t;\ 0,\ 0,\ x_3)=V_{33}(t)x_3^2<0\qquad(t\geqslant t_0)$$

所以函数$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$在任意小的x_i值和任意大的$t(t\geqslant t_0)$值时，可以取负的值。

再考察$dV/dt|_{(1.2)}$，类似于定理3有

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.2)} &\leqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\eta\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \\
&\quad -\xi\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \\
&=(2-\xi-\eta)\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \\
&<-2\delta_1^3\delta_2(\delta_3-\delta_2)^2(2-\xi-\eta)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)
\end{aligned}
$$

所以$dV/dt|_{(1.2)}$是负定的。

根据非定常运动的李雅普诺夫不稳定定理[3]，可知方程(1.2)的零解不稳定，从而方程(1.1)的零解不稳定。

除了以上5个定理外，由于特征根的不同位置还有四种情形也可以用类似的方法证明方程(1.1)的零解不稳定，现列于表1。

表 1

方程(1.1)的零解不稳定的条件 \ 不同情况	当$t\geqslant t_0$时特征根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$满足的条件	当$t\geqslant t_0$时$V_{33}(t)$的符号	证明方法
有两个具有正实部的特征根	1) $-\delta_2<\lambda_1(t)<-\delta_1$，$\delta_3<\lambda_2(t)\leqslant\lambda_3(t)$	$V_{33}(t)<0$	类似于定理3
	2) $\lambda_1(t)<-\delta_1'$，$\lambda_2(t)=p(t)+q(t)I$ $\lambda_3(t)=p(t)-q(t)I$，且$p(t)>\delta_2'$，$\lvert q(t)\rvert>\delta_3'$		
有一个具有正实部的特征根	1) $\delta_1<\lambda_1(t)<\delta_2$，$\lambda_2(t)\leqslant\lambda_3(t)<-\delta_3$	$V_{33}(t)<0$	类似于定理5
	2) $\lambda_1(t)>\delta_1'$，$\lambda_2(t)=p(t)+q(t)I$ $\lambda_3(t)=p(t)-q(t)I$，且$p(t)<-\delta_2'$，$\lvert q(t)\rvert>\delta_3'$		

其中$\delta_i(i=1,2,3)$与$\delta_j'(j=1,2,3)$都是与t无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3$，$I=\sqrt{-1}$。

五、例　　子

例1　考察方程

$$\dddot{x}-11\ddot{x}+\left(39+\frac{\cos^2t}{t^2}\right)\dot{x}-\left(45+5\frac{\cos^2t}{t^2}\right)x=\frac{\alpha x+\beta\dot{x}+\gamma\ddot{x}}{1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2} \tag{5.1}$$

(其中α，β，γ均为常数，且$\max\{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\}\leqslant 8/25$)的零解的稳定性。

容易证明方程(5.1)对应的线性微分方程

$$\dddot{x}-11\ddot{x}+\left(39+\frac{\cos^2t}{t^2}\right)\dot{x}-\left(45+5\frac{\cos^2t}{t^2}\right)x=0$$

的特征方程是

$$\lambda^3-11\lambda^2+\left(39+\frac{\cos^2t}{t^2}\right)\lambda-\left(45+5\frac{\cos^2t}{t^2}\right)=0 \tag{5.2}$$

它的特征根是

$$\lambda_1(t)=5,\quad \lambda_2(t)=3+\frac{\cos t}{t}i,\quad \lambda_3(t)=3-\frac{\cos t}{t}i$$

下面验证方程(5.1)满足条件(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)，(Ⅳ)。

(Ⅰ)　$a(t)=-11$，$b(t)=39+\dfrac{\cos^2t}{t^2}$，$c(t)=-\left(45+5\dfrac{\cos^2t}{t^2}\right)$

在$10\leqslant t<+\infty$上可微有界，且

$$|a(t)|\leqslant 50,\quad |b(t)|\leqslant 50,\quad |c(t)|\leqslant 50$$

$$\left|\frac{da(t)}{dt}\right|=0,\quad \left|\frac{db(t)}{dt}\right|\leqslant\left|\frac{2\sin t\cos t}{t^2}\right|+\left|\frac{2\cos^2 t}{t^3}\right|\leqslant\frac{4}{t^2}\leqslant\frac{1}{25}$$

$$\left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{5}$$

(Ⅱ) 存在区域 $D=\{t\geqslant 10,\ |x|\leqslant H,\ |\dot{x}|\leqslant H,\ |\ddot{x}|\leqslant H\}$（其中$H$为任意给定的正常数）在这个区域中$f(t;\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x})$满足不等式

$$|f(t;\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x})|=\left|\frac{\alpha x+\beta\dot{x}+\gamma\ddot{x}}{1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2}\right|\leqslant|\alpha x+\beta\dot{x}+\gamma\ddot{x}|$$

$$\leqslant|\alpha||x|+|\beta||\dot{x}|+|\gamma||\ddot{x}|\leqslant A(|x|+|\dot{x}|+|\ddot{x}|)$$

其中 $A=\max\{|\alpha|,\ |\beta|,\ |\gamma|\}$

(Ⅲ) 在区域D中，函数$f(t;\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x})=(\alpha x+\beta\dot{x}+\gamma\ddot{x})/(1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2)$连续，可导，且偏导数有界.

事实上，

$$|f'_x(t;x,\dot{x},\ \ddot{x})|=\left|\frac{\alpha(1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2)-2x(\alpha x+\beta\dot{x}+\gamma\ddot{x})}{(1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2)^2}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{\alpha}{1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2}-2x\frac{\alpha x+\beta\dot{x}+\gamma\ddot{x}}{1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2}\cdot\frac{1}{1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2}\right|$$

$$\leqslant\frac{|\alpha|}{1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2}+2|x|\left|\frac{\alpha x+\beta\dot{x}+\gamma\ddot{x}}{1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2}\right|\left|\frac{1}{1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2}\right|$$

$$\leqslant|\alpha|+2H\cdot A(|x|+|\dot{x}|+|\ddot{x}|)$$

$$\leqslant A+2H\cdot A(H+H+H)=A(1+6H^2)$$

同理可得

$$|f'_{\dot{x}}(t;\ x,\dot{x},\ddot{x})|=\left|\frac{\beta(1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2)-2\dot{x}(\alpha x+\beta\dot{x}+\gamma\ddot{x})}{(1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2)^2}\right|\leqslant A(1+6H^2)$$

$$|f'_{\ddot{x}}(t;\ x,\dot{x},\ddot{x})|=\left|\frac{\gamma(1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2)-2\ddot{x}(2\alpha+\beta\dot{x}+\gamma\ddot{x})}{(1+x^2+\dot{x}^2+\ddot{x}^2)^2}\right|\leqslant A(1+6H^2)$$

根据微分方程解的存在与唯一性定理可知方程(5.1)对在D内 的任何初始条件有唯一的解.

(Ⅳ) (i) $\max\limits_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}\leqslant\max\left\{0,\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{5}\right\}=\frac{1}{5}$

(ii) $\Delta(t)=a(t)b(t)c(t)-c^2(t)$

$$=[-11]\left[39+\frac{\cos^2 t}{t^2}\right]\left[-\left(45+5\frac{\cos^2 t}{t^2}\right)\right]-\left[-\left(45+5\frac{\cos^2 t}{t^2}\right)\right]^2$$

$$=\left[19305+2640\frac{\cos^2 t}{t^2}+55\frac{\cos^4 t}{t^4}\right]$$

$$-\left[2025+450\frac{\cos^2 t}{t^2}+25\frac{\cos^4 t}{t^4}\right]$$

$$=17280+2190\frac{\cos^2 t}{t^2}+30\frac{\cos^4 t}{t^4}\geqslant 17280$$

(iii) $\varepsilon=\min\limits_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\dfrac{\eta|\Delta(t)|}{18M^2+10M+1},\ \dfrac{\eta|\Delta(t)|}{10M+3}\right\}$

$$=\min_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{(3/5)|\Delta(t)|}{45501},\ \frac{(3/5)|\Delta(t)|}{503}\right\}$$

$$\left(\text{其中}\eta=\frac{3}{5},\ M=50\right)$$

$$=\min_{10\leqslant t<+\infty}\frac{(3/5)|\Delta(t)|}{45501}\geqslant\frac{(3/5)\times 17280}{45501}=\frac{10368}{45501}>\frac{1}{5}$$

从而可知：

$$\max_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

$$\mu=\min_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\xi|\Delta(t)|}{14M^2+9M}\right\}\qquad\left(\text{取}\xi=\frac{2}{3},\ M=50\right)$$

$$=\min_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{(2/3)|\Delta(t)|}{35450}\right\}\geqslant\frac{(2/3)\times 17280}{35450}=\frac{11520}{35450}>\frac{8}{25}\geqslant A$$

所以， $\mu>A$，且 $\xi=\dfrac{2}{3}>0$，$\eta=\dfrac{3}{5}>0$，$0<\xi+\eta=\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{19}{15}<2$

又因为特征方程(5.2)的 3 个特征根$\lambda_i(t)\ (i=1,2,3)$的实部 $\mathrm{Re}(\lambda_i(t))\geqslant 3\ \ (i=1,2,3)$，根据定理 1 可知方程(5.1)的零解不稳定。

例2 考察方程

$$\dddot{x}+\left(\frac{9}{10^2}-\frac{1}{t^2}\right)\ddot{x}-\left(\frac{21}{10^4}+\frac{1}{10t^2}-\frac{1}{4t^4}\right)\dot{x}+\left(\frac{11}{10^6}+\frac{11}{10^4t^2}+\frac{11}{4\times 10^2t^4}\right)x=\frac{3x-4\dot{x}+12\ddot{x}}{10^{10}+x^2+(\dot{x}-\ddot{x})^2}\tag{5.3}$$

的零解的稳定性。

容易证明方程(5.3)对应的线性微分方程

$$\dddot{x}+\left(\frac{9}{10^2}-\frac{1}{t^2}\right)\ddot{x}-\left(\frac{21}{10^4}+\frac{1}{10t^2}-\frac{1}{4t^4}\right)\dot{x}+\left(\frac{11}{10^6}+\frac{11}{10^4t^2}+\frac{11}{4\times 10^2t^4}\right)x=0$$

的特征方程是

$$\lambda^3+\left(\frac{9}{10^2}-\frac{1}{t^2}\right)\lambda^2-\left(\frac{21}{10^4}+\frac{1}{10t^2}-\frac{1}{4t^4}\right)\lambda+\left(\frac{11}{10^6}+\frac{11}{10^4t^2}+\frac{11}{4\times 10^2t^4}\right)=0\tag{5.4}$$

它的特征根是

$$\lambda_1(t)=-\frac{11}{100},\quad \lambda_2(t)=\lambda_3(t)=\frac{1}{100}+\frac{1}{2t^2}$$

下面验证方程(5.3)满足条件(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)，(Ⅳ)

(Ⅰ) $a(t)=\dfrac{9}{10^2}-\dfrac{1}{t^2}$，$b(t)=-\left(\dfrac{21}{10^4}+\dfrac{1}{10t^2}-\dfrac{1}{4t^4}\right)$

$$c(t)=\frac{11}{10^6}+\frac{11}{10^4t^2}+\frac{11}{4\times 10^2t^4}$$

在$10000\leqslant t<+\infty$上可微有界，且

$$|a(t)|\leqslant\frac{1}{10},\quad |b(t)|\leqslant\frac{1}{10},\quad |c(t)|\leqslant\frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{da(t)}{dt}\right|=\left|\frac{2}{t^2}\right|\leqslant\frac{1}{10^{11}},\quad \left|\frac{db(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{5t^3}+\frac{1}{t^5}<\frac{2}{5t^3}\leqslant\frac{4}{10^{13}}$$

$$\left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{11}{5000t^3}+\frac{11}{100t^5}\leqslant\frac{1}{50t^3}+\frac{1}{t^5}<\frac{2}{50t^3}\leqslant\frac{4}{10^{14}}$$

（Ⅱ）存在区域$D=\{t\geqslant 10000,\ |x|\leqslant H,\ |\dot{x}|\leqslant H,\ |\ddot{x}|\leqslant H\}$（其中$H$为任意给定的正常数）在这个区域中，$f(t;\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x})$满足不等式

$$|f(t;x,\dot{x},\ddot{x})|=\left|\frac{3x-4\dot{x}+12\ddot{x}}{10^{10}+x^2+(\dot{x}-\ddot{x})^2}\right|\leqslant\frac{1}{10^{10}}|3x-4\dot{x}+12\ddot{x}|$$

$$\leqslant\frac{3}{10^{10}}|x|+\frac{4}{10^{10}}|\dot{x}|+\frac{12}{10^{10}}|\ddot{x}|\leqslant A(|x|+|\dot{x}|+|\ddot{x}|)$$

其中$A=12/10^{10}$。

（Ⅲ）在区域D中，函数$f(t;\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x})=(3x-4\dot{x}+12\ddot{x})/(10^{10}+x^2+(\dot{x}-\ddot{x})^2)$连续，可导，且偏导数有界．事实上

$$|f'_x(t;\ x,\dot{x},\ddot{x})|=\left|\frac{3[10^{10}+x^2+(\dot{x}-\ddot{x})^2]-2x[3x-4\dot{x}+12\ddot{x}]}{[10^{10}+x^2+(\dot{x}-\ddot{x})^2]^2}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{3}{10^{10}+x^2+(\dot{x}-\ddot{x})^2}\right|$$

$$+2|x|\left|\frac{3x-4\dot{x}+12\ddot{x}}{10^{10}+x^2+(\dot{x}-\ddot{x})^2}\right|\left|\frac{1}{10^{10}+x^2+(\dot{x}-\ddot{x})^2}\right|$$

$$\leqslant\frac{3}{10^{10}}+2|x|\cdot A(|x|+|\dot{x}|+|\ddot{x}|)$$

$$\leqslant A+2H\cdot A(H+H+H)=A(1+6H^2)$$

同理

$$|f'_{\dot{x}}(t;\ x,\dot{x},\ddot{x})|=\left|\frac{-4[10^{10}+x^2+(\dot{x}-\ddot{x})^2]-2(\dot{x}-\ddot{x})[3x-4\dot{x}+12\ddot{x}]}{[10^{10}+x^2+(\dot{x}-\ddot{x})^2]^2}\right|$$

$$\leqslant\frac{4}{10^{10}}+2(|\dot{x}|+|\ddot{x}|)\cdot A(|x|+|\dot{x}|+|\ddot{x}|)$$

$$\leqslant A+2(H+H)\cdot A(H+H+H)=A(1+12H^2)$$

$$|f'_{\ddot{x}}(t;\ x,\dot{x},\ddot{x})|=\left|\frac{12[10^{10}+x^2+(\dot{x}-\ddot{x})^2]-2(\dot{x}-\ddot{x})(-1)[3x-4\dot{x}+12\ddot{x}]}{[10^{10}+x^2+(\dot{x}-\ddot{x})^2]^2}\right|$$

$$\leqslant\frac{12}{10^{10}}+2(|\dot{x}|+|\ddot{x}|)\cdot A(|x|+|\dot{x}|+|\ddot{x}|)$$

$$\leqslant A+2(H+H)\cdot A(H+H+H)=A(1+12H^2)$$

根据微分方程解的存在与唯一性定理可知方程(5.3)对在D内的任何初始条件有唯一的解．

（Ⅳ）(i) $$\max_{10000\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}$$

$$\leqslant\max\left\{\frac{1}{10^{11}},\ \frac{4}{10^{13}},\ \frac{4}{10^{14}}\right\}=\frac{1}{10^{11}}$$

(ii) $\Delta(t)=a(t)b(t)c(t)-c^2(t)$

$$=\left[\left(\frac{9}{10^2}-\frac{1}{t^2}\right)\left(-\frac{21}{10^4}-\frac{1}{10t^2}+\frac{1}{4t^4}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{11}{10^6}+\frac{11}{10^4t^2}+\frac{1}{4\times 10^2t^4}\right)\right]\left(\frac{11}{10^6}+\frac{11}{10^4t^2}+\frac{11}{4\times 10^2t^4}\right)$$

$$=\left[-\frac{200}{10^6}-\frac{80}{10^4t^2}+\frac{38}{4\times 10^2t^4}-\frac{1}{4t^6}\right]\left(\frac{11}{10^6}\right.$$

$$\left.+\frac{11}{10^4t^2}+\frac{11}{4\times 10^2t^4}\right)$$

$$=-\frac{2200}{10^{12}}-\frac{2200}{10^{10}t^2}-\frac{2200}{4\times 10^8t^4}-\frac{880}{10^{10}t^2}-\frac{880}{10^8t^4}-\frac{880}{4\times 10^6t^6}$$

$$+\frac{418}{4\times 10^8t^4}+\frac{418}{4\times 10^6t^6}+\frac{418}{16\times 10^4t^8}-\frac{11}{4\times 10^6t^6}$$

$$-\frac{11}{4\times 10^4t^8}-\frac{11}{16\times 10^2t^{10}}$$

$$=-\frac{2200}{10^{12}}-\frac{2200}{10^{10}t^2}-\frac{2200-418}{4\times 10^8t^4}-\frac{880-418}{4\times 10^6t^6}$$

$$-\frac{1}{t^2}\left(\frac{880}{10^{10}}-\frac{418}{16\times 10^4t^6}\right)-\frac{880}{10^8t^4}-\frac{11}{4\times 10^6t^6}$$

$$-\frac{11}{4\times 10^4t^8}-\frac{11}{16\times 10^2t^{10}}<-\frac{2200}{10^{12}}$$

$$\therefore\quad |\Delta(t)|>\frac{2200}{10^{12}}=\frac{22}{10^{10}}$$

$$=\min_{10000\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{18M^2+10M+1},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{10M+3}\right\}$$

$$=\min_{10000\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{(3/4)|\Delta(t)|}{2.18},\ \frac{(3/4)|\Delta(t)|}{4}\right\}\ \left(\text{取}\eta\frac{3}{4},\ M=\frac{1}{10}\right)$$

$$=\min_{10000\leqslant t<+\infty}\frac{(3/4)|\Delta(t)|}{4}>\frac{3}{16}\cdot\frac{22}{10^{10}}=4.125\times 10^{-10}>\frac{1}{10^{11}}$$

从而可知：

$$\max_{10000\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

$$\mu=\min_{10000\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\xi|\Delta(t)|}{14M^2+9M}\right\}$$

$$=\min_{10000\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{(3/5)|\Delta(t)|}{1.04}\right\}\ \left(\text{取}\xi=\frac{3}{5},\ M=\frac{1}{10}\right)$$

$$\geqslant\frac{(3/5)(22/10^{10})}{1.04}>1.269\times 10^{-9}$$

$$>1.2\times 10^{-9}=12/10^{10}=A$$

所以 $\mu>A$，且 $\xi=\frac{3}{5}>0$，$\eta=\frac{3}{4}>0$，$0<\xi+\eta=\frac{3}{5}+\frac{3}{4}=\frac{27}{20}<2$

又因为特征方程(5.4)的三个特征根

$$\lambda_1(t)=-\frac{11}{100},\quad \lambda_2(t)=\lambda_3(t)=\frac{1}{100}+\frac{1}{2t^2}$$

当10000≤t<+∞时，满足不等式

$$\delta_1<\lambda_2(t)\leqslant\lambda_3(t)<\delta_2,\quad \lambda_1(t)<-\delta_3$$

其中
$$\delta_1=\frac{1}{1000},\quad \delta_2=\frac{3}{100},\quad \delta_3=\frac{1}{10}$$

并且当10000≤t<+∞时，

$$a(t)+c(t)+b(t)c(t)=\left(\frac{9}{10^2}-\frac{1}{t^2}\right)+\left(\frac{11}{10^6}+\frac{11}{10^4t^2}+\frac{11}{4\times10^2t^4}\right)$$

$$-\left(\frac{21}{10^4}+\frac{1}{10t^2}-\frac{1}{4t^4}\right)\left(\frac{11}{10^6}+\frac{11}{10^4t^2}+\frac{11}{4\times10^2t^4}\right)$$

$$=0.0900109769-\frac{0.99890341}{t^2}+\frac{0.027335}{t^4}-\frac{0.002475}{t^6}+\frac{0.006875}{t^8}$$

$$>0.08+\left(0.01-\frac{0.99890341}{t^2}\right)+\frac{1}{t^4}\left(0.027335-\frac{0.002475}{t^2}\right)>0.08$$

根据定理 3 可知方程(5.3)的零解不稳定。

参 考 文 献

[1] 秦元勋、王慕秋、王联，《运动稳定性理论与应用》，科学出版社（1981）.

[2] 廖宗璜、卢德渊,关于三阶变系数线性微分方程解的不稳定性,应用数学和力学，9(10)（1988），909—923.

[3] 许淞庆，《常微分方程稳定性理论》，上海科学技术出版社（1962）.

Instability of Solution for a Class of the Third Order Nonlinear Differential Equation

Lu Deyuan

(Department of Mathematics, Guizhou Normal University, Guiyang 55000, P. R. China)

Abstract

In reference [1] the asymptotic stability of nonlinear slowly changing system has been discussed. In reference [2] the instability of solution for the third order linear differential equation with varied coefficient has been discussed. In this paper, we have discussed instability of solution for a class of the third order nonlinear differential equation by means of the method of references [1] and [2].

Key words ordinary differential equation, motive stability theory, nonlinear differential equation