

# 湍流相干结构与小尺度结构 之间的相互作用

刘士和<sup>1</sup> 梁在潮<sup>1</sup>

(蔡树棠推荐, 1993年9月8日收到)

## 摘 要

本文首先对切变湍流场中存在大尺度相干结构与小尺度结构和不同尺度结构之间的相互作用进行了试验研究, 得到了一些特征值。其次, 在试验的基础上, 建立了考虑不同尺度结构之间的相互作用后相干结构的数学描述和模式识别方法, 并对光滑壁面与均匀密集加糙壁面条件下湍流边界层中的相干结构进行了模式识别。结果表明, 文中所建立的计算方法是可行的。

**关键词** 相干结构 小尺度结构 湍流

## 一、前 言

已有的试验结果表明, 切变湍流场中存在着两种流动结构, 即拟序的大尺度结构(相干结构)和随机的小尺度结构, 而且湍流脉动的产生及由此产生的各种运输的有效贡献主要来自相干结构。Rajagopalan 和 Antonia<sup>[1]</sup> 曾用相关函数的方法研究过两种结构之间的相互作用, Bandyopadhyay<sup>[2]</sup> 对平面和轴对称混合层、平面尾流、平面及圆柱射流的大尺度结构和小尺度结构之间的相互作用也进行了研究。他们的研究成果, 表明了切变湍流场中两种结构的相互作用存在, 并对此作用进行了初步描述。

鉴于对湍流场中相干结构与小尺度结构之间相互作用的深入了解, 有利于进一步认识切变湍流中各种尺度运动之间的动量与能量传递规律, 有利于了解紊动产生机理与控制湍流, 因此, 有必要在前人研究的基础上, 再进一步深入研究。本文着重研究以下两个方面的内容:

1. 光滑壁面和均匀密集加糙壁面两种条件下的湍流, 其大尺度结构与小尺度结构之间的相互作用;
2. 考虑相干结构与小尺度结构之间的相互作用后, 相干结构的数学描述和模式识别方法。

## 二、试验条件及试验成果

本试验是在一 $15 \times 40 \times 550 \text{cm}^3$ 的玻璃水槽中进行的。试验流速为 $40 \text{cm/s}$ , 边界条件为

<sup>1</sup> 武汉水利电力大学水科所, 武昌 430072.

光滑壁面和均匀密集加糙的粗糙壁面,其相应的粗糙雷诺数分别为  $Re_{\Delta}=0.222$  和  $Re_{\Delta}=90.69$ 。用热膜流速仪实测流速,采样时间间隔取为  $0.006$  秒,采样的样本总数为  $1024$ ,故截断频率  $f_D$  为  $83.33\text{Hz}$ 。

在数据处理过程中,我们用 Galli<sup>[6]</sup> 导出的数字滤波器分离低频信号和高频信号,该滤波器的离散形式为:

$$\hat{x}_i = \sum_{k=-17}^{17} g_k x_{i-k}$$

式中,  $\hat{x}_i$  和  $x_{i-k}$  分别表示滤波后的数据和滤波前的数据,  $g_k$  为滤波参数,本文所采用的滤波参数为

$$g_k = \frac{1}{\pi} \left[ SI\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right) - SI\left(\frac{2k-1}{n}\pi\right) - \frac{2}{35} SI\left(\frac{35}{n}\pi\right) \right] + \frac{1}{35}$$

式中  $n$  为以采样点数计算的截断周期,如  $n=5$ ,则表示长度大于  $5$  个采样点的低频信号予以保留;  $SI(x)$  表示对  $x$  的正弦积分,本文采用的计算式为

$$SI(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 0.996 \frac{\cos x}{x} - 0.993 \frac{\sin x}{x^2} & (x > 8) \\ \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)} & \left( 0 \leq x < 8 \text{ 且 } \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!(2l+1)} \leq 10^{-7} \right) \\ -SI(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

我们将经过低通滤波器处理过的信号看成是低频信号,原始信号与低频信号之差作为高频信号,将低频信号  $\bar{u}(t)$  与高频信号  $u''(t)$  进行相关分析,然后将其标准化,可得其相关函数  $R(\tau)$

$$R(\tau) = \frac{\overline{\bar{u}(t+\tau)u''(t)}}{\sqrt{\bar{u}^2} \sqrt{u''^2}}$$

图 1 为我们实测的光滑壁面和粗糙壁面条件下湍流边界层中纵向脉动流速信号的相关函数  $R(\tau)$  随滤波器截断频率  $f_c$  变化的关系曲线。截断频率  $f_c$  与截断周期  $n$  的关系为

$$f_c = 1/[(n-1) \times 0.006]$$

从图中看出:当截断频率  $f_c < 8.33\text{Hz}$  时,大尺度结构与小尺度结构有一定的关联性。但当  $f_c > 8.33\text{Hz}$ ,  $R(\tau)$  的变化规律性不强且变化幅度小,这说明频率愈高的小尺度结构与大尺度结构的关联愈小。

为了了解各频率子区间对紊动能量的贡献,将整个截超频率内的频率区间  $[0, 83.33]$  分成  $12$  个子区间,各频率子区间分别为:  $[0, 3.79]$ 、 $[3.79, 4.17]$ 、 $[4.17, 4.63]$ 、 $[4.63, 5.56]$ 、 $[5.56, 6.67]$ 、 $[6.67, 8.33]$ 、 $[8.33, 11.9]$ 、 $[11.9, 16.67]$ 、 $[16.67, 23.8]$ 、 $[23.8, 33.33]$ 、 $[33.33, 47.62]$  和  $[47.62, 83.33]$ 。图 2 为我们实测的光滑壁面 ( $Re_{\Delta}=0.222$ ) 条件下湍流边界层中纵向脉动流速分量的各频率区间单位频率对紊动能贡献分布图。其横坐标为频率  $f(\text{Hz})$ ,纵坐标为  $\eta = \overline{u'^2}[f_m, f_n]/(f_n - f_m)$ ,  $\overline{u'^2}[f_m, f_n]$  为频率区间  $[f_m, f_n]$  的紊动能,  $(f_n - f_m)$  为该频率区间的频率数,故  $\eta$  为  $[f_m, f_n]$  频率子区间单位频率分量对紊动能的贡献。由图中可知,  $\eta(f)$  曲线有三个峰值区域,即图中  $O-A$ 、 $A-B$  和  $B-D$ , 相应于我们的试验条件,其对应的频率区间为:  $[0-f_A]$ — $[0, 4.63]$ ,  $[f_A-f_B]$ — $[4.63, 8.33]$ ,  $[f_B-f_D]$ — $[8.33, 83.33]$ 。在我们的试验条件下,由流动显示的成果可知<sup>[8]</sup>,两种不同边

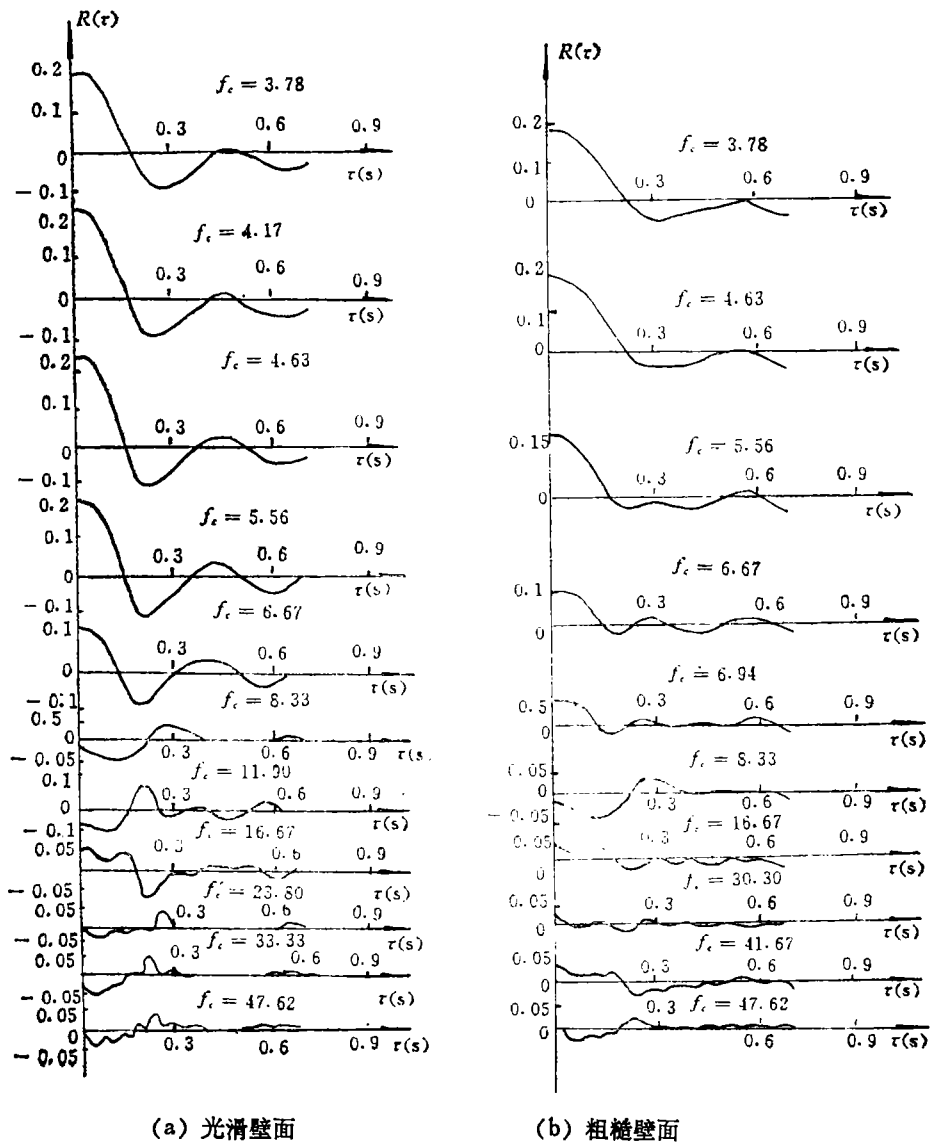


图 1

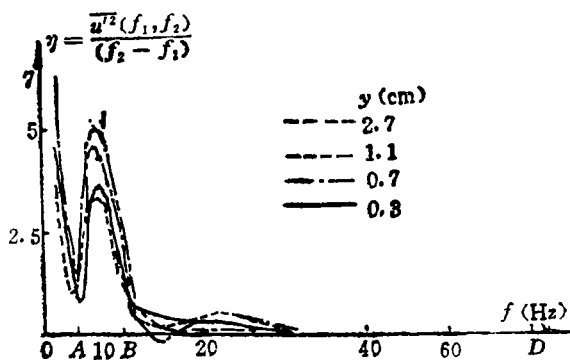


图2 不同垂向位置单位频率分量对紊动能

界的相干结构出现频率分别为

$$f_{\text{光滑}} = 2.02\text{Hz}, f_{\text{粗糙}} = 2.337\text{Hz}$$

故频率 $f_A (= 4.63\text{Hz})$ , 近似于相干结构出现频率的两倍, 因此可认为频率区间 $[0, f_A]$ 为相干结构的频率区间, 而 $(f_A - f_B)$ 和 $(f_B - f_D)$ 区间, 即大于 $f_A$ 的频率区间为小尺度结构的频率区间。如果进一步将小尺度结构分为两种尺度的结构, 则由模糊聚类分析的结果可知<sup>(9)</sup>, 图2中的 $(f_A - f_B)$ 和 $(f_B - f_D)$ , 分别是小尺度结构B和更小一级的小尺度结构C的频率区间。

为了进一步了解不同尺度结构之间的相互关系与相互作用, 我们分别以图2中A点的频率 $f_A$ 和B点的频率 $f_B$ 为分辨频率, 然后计算出各自在光滑与粗糙壁面条件下湍流边界层中不同垂向位置处纵向脉动流速信号的相关函数 $R(\tau)$ 。

以 $f_A$ 为分辨频率, 是将湍流场分解成相干结构和小尺度结构两种尺度的运动。其相关函数 $R(\tau)$ 计算式中的 $\bar{u}$ 和 $u''$ 分别为相干结构与小尺度结构的信号, 得到的相关函数如图3所示。

以 $f_B$ 为分辨频率, 是将湍流场分解成相干结构、小尺度结构B与更小一级的小尺度结构C三种尺度的运动。其相关函数计算式中的 $\bar{u}$ 与 $u''$ 分别为相干结构与小尺度结构B的信号之和与更小一级小尺度结构C的信号。所得到的相关函数曲线如图4所示。

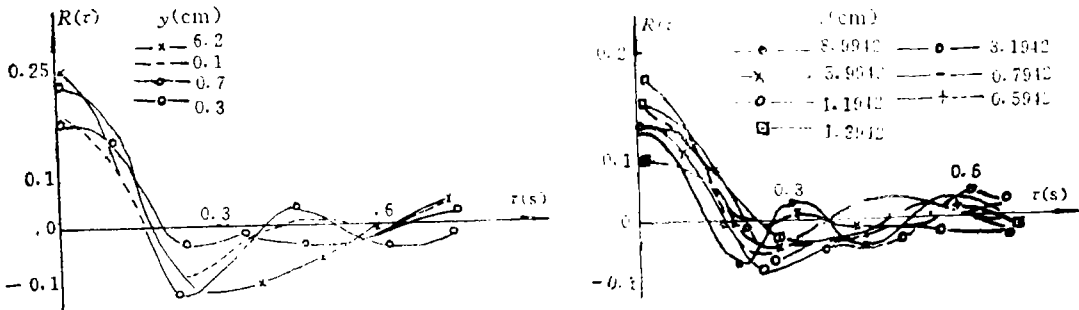


图3 以 $f_A = 4.63\text{Hz}$ 为分辨频率的相关函数曲线

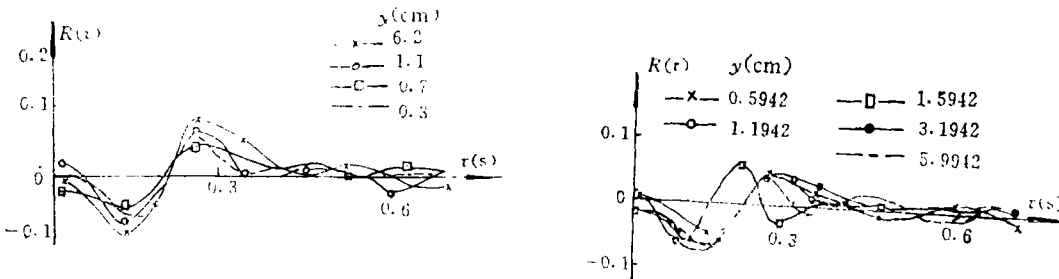


图4 以 $f_B = 8.33\text{Hz}$ 为分辨频率的相关函数曲线

由图3和图4可得出以下三点看法:

1. 在光滑壁面和粗糙壁面的条件下, 尽管测点离开壁面的距离相异, 但纵向脉动流速信号的相关函数曲线近似有相同的模式。

2. 切变湍流中存在两种尺度的运动, 即拟序的大尺度运动和随机的小尺度运动, 两种尺度的运动有一定的关联性, 即存在着相互作用。由图3可知, 从统计上讲, 大尺度运动与

小尺度运动的相位相同。

3. 以  $f_A=4.63\text{Hz}$  为分辨频率的  $R(\tau)$  曲线 (图3), 在  $\tau=0$  时, 其相关函数为最大值; 而以  $f_B=8.33\text{Hz}$  为分辨频率的相关函数曲线 (图4), 在  $\tau=0$  时, 其  $R(\tau)\approx 0$ 。参照正弦函数的相关函数之变化, 由图4可知, 其相应的两种信号之间近似存在  $\pi/2$  的相位差, 也即更小一级的小尺度结构  $C$  与大尺度结构及小尺度结构  $B$  的分量之和近似有一个  $\pi/2$  的相位差。

### 三、相干结构的广义频谱分析

众所周知, 湍流运动可看成是许多不同尺度运动的叠加。也即, 从狭义上看, 切变湍流场可看成是由大尺度运动与小尺度运动两种运动的叠加而成; 而从广义的角度而言, 因小尺度场为一随机场, 其可分解为众多不同尺度运动的叠加; 而由上述的试验结果可知, 大尺度运动与小尺度运动之间存在着一定的相位联系, 因而大尺度运动也可认为是具有与小尺度运动类似的众多不同尺度运动的叠加。由此可见, 根据小尺度运动的统计特性, 即可将大尺度运动与小尺度运动分量之和统一分解为仅与小尺度运动相关的众多不同运动模式的叠加。这就是湍流场可以进行广义频谱分析的物理基础<sup>[7]</sup>。在对湍流场进行广义频谱分析时, 将切变湍流中相干结构分量与小尺度结构分量之间的关系, 比拟为信号处理中有序信号与噪声信号之间的关系, 并将非白噪声场中有序信号检测的 KL 方法引进到湍流领域<sup>[3]</sup>。因该方法从信号处理的角度而言可以以最大的信噪比从随机的噪声场中检测出有序信号, 且所得信号序列之间互不相关。由此可以获得如下好处: 其一, 可以以最大的“信噪比”从随机的小尺度运动场中识别出相干结构信号, 这样就有助于反映相干结构与小尺度结构相对切变湍流的控制作用; 其二, 在物理空间中, 湍流场中任意两点 (只要不是离得太远) 的物理量之间总存在着一定程度的相关, 而利用广义频谱分析方法, 在变换空间中各种结构分量之间是互不相关的, 这样就有助于描述各种尺度的运动, 并使其在变换空间能够分离<sup>[7]</sup>。

设切变湍流中单个相干结构的相干时间为  $T$ ;  $t\in[0, T]$  为任一时刻;  $\{f_i(t); i=1, 2, \dots\}$  为区间  $[0, T]$  上定义的正交函数集, 其物理意义可理解为各种尺度的运动对流动特征量贡献的集合, 它满足

$$\int_0^T f_i(t) f_j(t) dt = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

如果此正交集是完备的 (其条件见本节后), 则对  $[0, T]$  上定义的平方可积函数  $u(t)$  (本文取为湍流边界层中纵向脉动流速分量), 有

$$u(t) = \sum_k r_k f_k(t) \quad (3.1a)$$

式中

$$r_k = \int_0^T u(t) f_k^*(t) dt \quad (3.1b)$$

为广义频谱系数, 它代表不同尺度运动在变换空间中的分量,  $f_k^*(t)$  为  $f_k(t)$  的共轭函数。为了从随机信号中分离出有序信号, 最好能使各系数  $r_k$  之间互不相关。为此, 我们令

$$u(t) = \bar{u}(t) + u''(t)$$

其中  $\bar{u}(t)$  为  $u(t)$  的条件平均,  $u''(t)$  为随机的小尺度脉动信号, 其均值为零, 且时间相关函数为  $R_n(\tau)$ 。利用已知的  $R_n(\tau)$ , 使  $f_j(t)$  满足如下积分方程:

$$\int_0^T f_j(t_2) R_n(t_1 - t_2) dt_2 = \lambda_j f_j(t_1) \quad (3.2)$$

则可使得系数  $r_k$  与  $r_j$  之间互不相关, 即

$$E\{(r_k - \bar{r}_k)(r_j^* - \bar{r}_j^*)\} = \begin{cases} \lambda_j, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (3.3)$$

式中  $\bar{r}_k$  与  $\bar{r}_j^*$  分别为  $r_k$  和  $r_j^*$  的平均值,  $\lambda_j$  为积分方程 (3.2) 的特征值. 事实上, 将式 (3.2) 作适当处理, 即可得

$$(\lambda_j - \lambda_k^*) \int_0^T f_j(t) f_k^*(t) dt = 0 \quad (3.4)$$

如  $j = k$ , 则式 (3.4) 变为

$$(\lambda_j - \lambda_j^*) \int_0^T |f_j(t)|^2 dt = 0$$

从而有  $\lambda_j = \lambda_j^*$ , 也即特征值为实数.

如,  $j \neq k$ , 则有

$$\int_0^T f_j(t) f_k^*(t) dt = 0$$

因而对应于不同特征值的特征函数是正交的. 也说明了式 (3.2) 与函数集  $\{f_i(t); i = 1, 2, \dots\}$  所假定的正交归一性是一致的.

以上所述, 是对时间相干性问题进行广义频谱分析的基本思想, 即从小尺度运动的时间相关函数出发, 利用齐次积分方程 (3.2) 求出正交函数集  $f_i(t)$ , 然后利用式 (3.1) 将物理空间中相关的物理量变换为广义谱空间中不相关的函数  $r_k$  等效表示. 可以证明, 只要小尺度运动的相关函数是正定的, 则由式 (3.2) 所得到的特征函数构成完备集<sup>[3]</sup>, 此时, 展开式  $\sum_k r_k f_k(t)$  平均收敛于  $u(t)$ , 即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left[ \sum_{k=1}^N r_k f_k(t) - u(t) \right]^2 \right\} = 0$$

#### 四、相干结构模式识别

从上述广义频谱分析的基本思想出发, 下面我们建立一种从随机的小尺度运动场中检测出相干结构信号的方法.

我们用似然比来确定最佳接收机, 将信号  $u(t) = \bar{u}(t) + u''(t)$  用广义频谱系数  $r_k$  等效表示. 似然函数即为这些系数的联合概率密度. 我们的目的是要求出一个接收机, 对下面两个假设作出选择:

$$H_{1s}: \quad u(t) = \bar{u}(t) + u''(t) \quad (4.1a)$$

$$H_{0s}: \quad u(t) = u''(t) \quad (4.1b)$$

对式 (4.1) 进行广义频谱分析. 由式 (3.3) 可知, 各系数  $r_k$  之间是互不相关的. 若  $u''(t)$  为一高斯过程, 则因  $r_k$  是对高斯过程作线性运算而得到的, 从而也为高斯型; 又因各系数  $r_k$  之间互不相关, 因而也是统计独立的. 所以, 要确定其联合概率密度, 仅需  $r_k$  的均值及方差即可. 以  $\lambda_k$  表示  $r_k$  的方差, 因其对每一次实现皆相同, 因而似然函数为

$$P_1(\mathbf{r}) = \prod_{k=1}^N \left( \frac{1}{2\pi\lambda_k} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{r}_k - \bar{\mathbf{r}}_k)^2}{-2\lambda_k} \right]$$

和

$$P_0(\mathbf{r}) = \prod_{k=1}^N \left( \frac{1}{2\pi\lambda_k} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{r}_k)^2}{-2\lambda_k} \right]$$

由此可得似然比

$$\lambda(\mathbf{r}) = P_1(\mathbf{r}) / P_0(\mathbf{r})$$

其对数似然比为

$$\ln \lambda(\mathbf{r}) = \int_0^T \left[ u(t) - \frac{1}{2} \bar{u}(t) \right] h(t) dt \quad (4.2)$$

式中  $h(t)$  为积分方程

$$\bar{u}(t) = \int_0^T R_n(t-t_1) h(t_1) dt_1 \quad (4.3)$$

的解。

综上所述, 若

$$\ln \lambda(\mathbf{r}) \geq \ln \lambda_0 \quad (4.4a)$$

$$\text{即} \quad \int_0^T \left[ u(t) - \frac{1}{2} \bar{u}(t) \right] h(t) dt \geq \ln \lambda_0 \quad (4.4b)$$

时, 便存在大尺度有序信号, 即需选择  $H_1$ 。式中  $\lambda_0$  为判决标准, 其值可取为广义频谱空间中相干结构不出现的先验概率与相干结构出现的概率之比<sup>[7]</sup>。

## 五、时间相干模式识别的实例分析

根据我们的试验成果<sup>[8]</sup>, 得知湍流边界层中小尺度结构的纵向脉动流速分量近似为一高斯过程, 且在一定的相关时间范围内 (大于相干时间) 其时间自相关函数  $R_n(\tau)$  可用指数规律

$$R_n(\tau) = A \exp(-B|\tau|) \quad (5.1)$$

近似描述, 从而其谱密度函数为有理谱, 即

$$S_n(2\pi f) = \frac{2AB}{(2\pi f)^2 + B^2} \quad (5.2)$$

以上条件满足前述利用广义频谱分析法对湍流边界层中相干结构纵向脉动流速分量进行模式识别的所有假设, 因而可利用该方法。注意到对有理谱, 方程 (4.3) 可进行较大的简化, 最后求得  $h(t)$  之解为

$$h(t) = \frac{1}{2AB} \{ [B\bar{u}(0) - \bar{u}'(0)] \delta(t) + [B\bar{u}(T) + \bar{u}'(T)] \delta(t-T) + B^2 \bar{u}(t) - \bar{u}''(t) \} \quad (5.3)$$

将式 (5.3) 代入式 (4.4), 并由其组成一滑动的时间窗, 用以识别光滑壁面及均匀密度加糙条件下相干结构纵向脉动流速分量的相间相干模式。在识别过程中,  $\bar{u}(t)$  取为由 VITA 法识别出的时间相干模式<sup>[8]</sup>,  $A$  取为小尺度纵向脉动流速的方差, 而  $B$  则在一定的相关时间范围 (大于相干时间) 内, 由对  $\ln R(\tau) \sim \tau$  曲线进行最小二乘拟合得到。  $\lambda_0$  是判别标准, 本文将其作为参数处理。将  $A$ ,  $B$  及  $\lambda_0$  等参数代入式 (4.4) 和 (5.3), 并由其构成一滑动的时间窗进行识

别。如发现某一点存在着相干结构信号，则以该点为相位参考点，并对用此法识别出的相干事件集合全体作相位平均，即

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}(t + \tau_i)$$

由此即可得到相干模式。式中 $n$ 为相干事件总数， $\tau_i$ 为相位参考点，而 $\hat{u}$ 则为所识别出的单个相干事件。我们所识别出的光滑壁面及均匀密集加糙条件下纵向脉动流速信号的时间相干模式分别如图5和图6所示。

由图5和图6可知，我们所采用的模式识别方法可近似反映时间相干性问题的特征，从而说明所建立的时间相干性问题的分析方法是正确的。

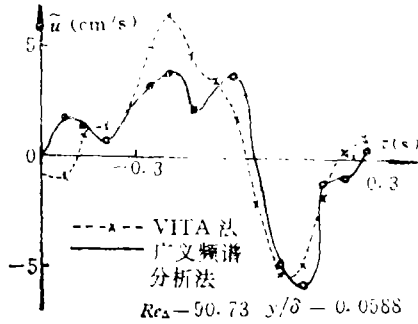


图 5

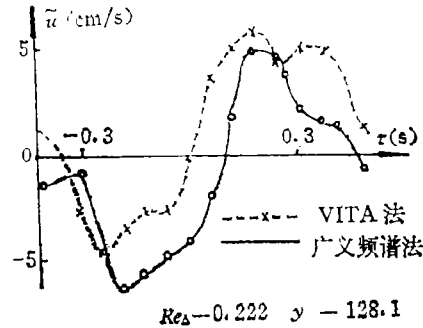


图 6

### 参 考 文 献

- [1] S. Rajagopalan, et al., Interaction between large and small scale motions in a 2D turbulent duct flow, *Phys. Fluids*, 23 (1980), 1101.
- [2] P. R. Bandyopadhyay, The coupling between scales in shear flows, *Phys. Fluids*, 20 (1977), S243.
- [3] A. D. Whalen, 《噪声中信号的检测》，科学出版社 (1977).
- [4] 梁在潮, 《紊流力学》，河南科技出版社 (1988).
- [5] 蔡树棠、麻柏坤, 大小涡旋分开考虑的模式理论, *应用数学和力学*, 8(10) (1987), 849—858.
- [6] 梁在潮, 相干结构与脉动壁压, *水利学报*, (8) (1985).
- [7] 刘士和, 有限空间中切变湍流的广义频谱理论, 《第二届全国湍流、边界层与流动稳定性学术会议论文集》，武汉 (1987).
- [8] 梁在潮、刘士和, 均匀密集加糙对切变湍流中相干结构的作用, *水动力学研究与进展*, 2(2) (1987), 50—56.
- [9] 梁在潮、刘士和, 湍动尺度的模糊聚类分析, *应用数学和力学*, 11(8) (1990), 719—724.



## Interaction of Turbulent Coherent Structures and Small Scale Structures

Liu Shihe    Liang Zaichao

*(Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering,  
Wuhan 430072, P. R. China)*

### Abstract

In this paper experimental research is carried out for the existence of large and small scale structures in turbulent boundary layer and the interactions between these structures. Based on the experimental results, a new method is suggested to describe the coherent structures, in which the interactions between the coherent and small-scale structures are considered. Using this method a new pattern recognition method is suggested and used for the coherent structures in turbulent boundary layer in smooth and rough wall conditions. The results show that the suggested method is reasonable.

**Key words** coherent structures, small scale structures, turbulent