

# 各向异性介质中带衬砌的圆形 结构与SH波相互作用

韩 峰<sup>1</sup> 韦 扬<sup>1</sup> 刘殿魁<sup>1</sup>

(叶开沅推荐, 1993年9月27日收到, 1994年4月21日收到修改稿)

## 摘 要

本文利用复变函数方法求解各向异性介质中带衬砌的圆形结构与SH波的相互作用问题。各向异性介质可以用来模拟地质条件。利用文献[5]中的方法则可决定介质中的散射波, 再利用圆形结构上给出的边界条件, 则可对问题进行求解。作为算例, 本文给出了在一种各向异性介质中, 二种不同材料组成的圆形带衬砌的结构与SH波相互作用问题的数值分析结果, 并予以讨论。

**关键词** 各向异性介质 SH波 衬砌 相互作用

## 一、前 言

弹性波与圆形结构物的相互作用问题的研究, 在理论和工程应用方面均有着重要的意义。均匀、连续和各向同性介质中的弹性波与圆形带衬砌的结构相互作用问题的研究, 已取得了大量的和有价值的研究成果<sup>[1,4]</sup>。而在各向异性介质中的弹性波与圆形结构物的相互作用问题的研究, 虽然广泛地受到了重视, 但是, 所获得的成果却是极有限的<sup>[1]</sup>。最近, 刘殿魁、韩峰等利用复变函数方法研究了各向异性介质中SH波对无衬砌的圆形和非圆形结构的散射问题<sup>[2,5]</sup>。为研究各向异性介质中SH波与圆形结构物的相互作用问题, 提供了一个新方法。

本文将利用上述的方法, 研究各向异性介质中带有衬砌的圆形结构与SH波的相互作用问题。各向异性介质可用来模拟地质条件。研究表明: 该问题的渐近解答仍然可用“域函数”<sup>[7]</sup>为项的级数函数序列来表示。故问题的求解过程也将与文献[2, 5]相类似。在本文中, 分析了各向异性介质中混凝土和钢这二种不同材料所构成的圆形衬砌结构与SH波的相互作用问题。给出了数值结果, 并对其进行了讨论。

## 二、控制方程和它的解

### 2.1 控制方程和它的解

各向异性介质中, 稳态的SH波 $W = \text{Re}[W(x, y)e^{-i\omega t}]$ 的控制方程可以写成<sup>[1-5]</sup>。

<sup>1</sup> 哈尔滨工程大学航天工程系, 哈尔滨 150001。

$$C_{55} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2C_{45} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + C_{44} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \rho_1 \omega^2 W = 0 \quad (2.1)$$

其中,  $W$  为垂直于  $(xy)$  平面的位移;  $C_{55}$ ,  $C_{45}$  和  $C_{44}$  为各向异性介质的弹性常数;  $\rho_1$  为介质的密度;  $\omega$  为波的圆频率。

各向异性介质中应力与位移的关系, 可写成:

$$\tau_{xz} = C_{55} \frac{\partial W}{\partial x} + C_{45} \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = C_{45} \frac{\partial W}{\partial x} + C_{44} \frac{\partial W}{\partial y} \quad (2.2)$$

又因弹性常数  $C_{55}$ ,  $C_{45}$ ,  $C_{44}$  应满足弹性矩阵的正定性条件, 则有:

$$C_{55} > 0, \quad C_{55}C_{44} - C_{45}^2 > 0 \quad (2.3)$$

若引进复变量  $Z = x + iy$ ,  $\bar{Z} = x - iy$ , 则控制方程 (2.1) 可以写成:

$$\begin{aligned} (C_{55} - C_{44} + 2iC_{45}) \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} + 2(C_{44} + C_{55}) \frac{\partial^2 W}{\partial Z \partial \bar{Z}} \\ + (C_{55} - C_{44} - 2iC_{45}) \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{Z}^2} + \rho_1 \omega^2 W = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

利用如下的变换,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} [(1 - i\gamma)Z + (1 + i\gamma)\bar{Z}] \\ \bar{\xi} &= \frac{1}{2} [(1 - i\bar{\gamma})Z + (1 + i\bar{\gamma})\bar{Z}] \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

其中,  $\gamma$  为复常数,  $\gamma = -C_{45}/C_{44} + i(C_{55}C_{44} - C_{45}^2)^{1/2}/C_{44}$ . 则控制方程 (2.4) 可写成:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} + \frac{1}{4} K_1^2 W = 0 \quad (2.6)$$

其中  $K_1 = \omega/C_T$ ;  $C_T^2 = \mu_1/\rho_1$ ;  $\mu_1 = (C_{55}C_{44} - C_{45}^2)/C_{44}$ . 由文献 [5] 知, 式 (2.6) 所决定的散射波是:

$$W^{(s)} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(\cdot)}(K_1 |\xi(Z)|) \left[ \frac{\xi(Z)}{|\xi(Z)|} \right]^n \quad (2.7)$$

其中,  $A_n$  为未知常数;  $H_n^{(\cdot)}$  是  $K_1(\xi)$  的  $n$  阶第一类或第二类 Hankel 函数, 分别表示外行的或向心的散射波。

## 2.2 应力表达式

在复平面  $Z$  上, 应力表达式可写成<sup>[6]</sup>:

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = (C_{55} + C_{44}) \frac{\partial W}{\partial Z} + (C_{55} - C_{44} - 2iC_{45}) \frac{\partial W}{\partial \bar{Z}} \quad (2.8)$$

在极坐标系中, 上式又可写成:

$$\tau_{rz} - i\tau_{\theta z} = \left[ (C_{55} + C_{44}) \frac{\partial W}{\partial Z} + (C_{55} - C_{44} - 2iC_{45}) \frac{\partial W}{\partial \bar{Z}} \right] e^{i\theta} \quad (2.9)$$

代散射波表达式 (2.7) 至式 (2.9), 则有

$$\tau_{rz}^{(s)} = \frac{C_{55}K_1}{4} \left\{ (a + ic) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(\cdot)}(K_1 |\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n-1} \right.$$

$$\begin{aligned}
& - (b-ic) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(1)}(K_1|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n+1} \Big\} e^{i\theta} \\
& + \frac{C_{55}K_1}{4} \left\{ (b+ic) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(1)}(K_1|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n-1} \right. \\
& \left. - (a-ic) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(1)}(K_1|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n+1} \right\} e^{-i\theta} \quad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\theta z}^{(\theta)} = & \frac{C_{55}K_1}{4} \left\{ (-c+ia) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(1)}(K_1|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n-1} \right. \\
& \left. - (c+ib) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(1)}(K_1|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n+1} \right\} e^{i\theta} \\
& + \frac{C_{55}K_1}{4} \left\{ (c-ib) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(1)}(K_1|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n-1} \right. \\
& \left. + (c+ia) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(1)}(K_1|\xi|) \left\{ \frac{\xi}{|\xi|} \right\}^{n+1} \right\} e^{-i\theta} \quad (2.11)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
a &= (\eta - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \left( \frac{1}{\eta} - \frac{\xi^2}{\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
b &= -(\eta - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{\eta} - \frac{\xi^2}{\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
c &= \frac{\xi(\eta - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{\eta}, \quad \xi = C_{45}/C_{55}, \quad \eta = C_{44}/C_{55}
\end{aligned}$$

### 三、入 射 波

#### 3.1 入射波

在稳态的条件下, 各向异性介质中沿  $\mathbf{n}$  方向入射的波  $W^{(t)}$  可以写成:

$$W^{(t)} = W_0 \exp[i[K_a(x\cos\alpha + y\sin\alpha) - \omega t]] \quad (3.1)$$

其中  $\cos\alpha = n_x$ ,  $\sin\alpha = n_y$ ;  $W_0$  为入射波的波幅, 常数;  $\omega = K_a C_a$  为波的圆频率;  $C_a$  为各向异性介质中沿  $\mathbf{n}$  方向的波速<sup>[2,5]</sup>, 即:

$$C_a = \left[ \frac{1}{\rho_1} (C_{55}\cos^2\alpha + 2C_{45}\sin\alpha\cos\alpha + C_{44}\sin^2\alpha) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

式(3.1)也可写成:

$$W^{(t)} = W_0 \exp\left[ \frac{iK_a}{2} [Z e^{-i\alpha} + \bar{Z} e^{i\alpha}] \right] e^{-i\omega t} \quad (3.3)$$

进一步, 式(3.1)可展成 Fourier 级数<sup>[4]</sup>:

$$W^{(t)} = W_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_n(K_a r) e^{in(\theta-\alpha)} e^{-i\omega t} \quad (3.4)$$

其中  $J_n(\cdot)$  为  $K_a r$  的  $n$  阶 Bessel 函数. 而在  $Z$  平面上, 式(3.4)可写成:

$$W^{(t)} = W_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_n(K_a |Z|) \left\{ -\frac{Z}{|Z|} \right\}^n e^{-in\alpha} e^{-i\omega t} \quad (3.5)$$

### 3.2 入射应力

与式(2.10), (2.11)的推导相类似, 代式(3.5)至式(2.9), 则入射应力有:

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^{(i)} = & \frac{C_{55}K_a W_0}{4} \left\{ \left[ (1+\eta) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_a|Z|) \left\{ \frac{Z}{|Z|} \right\}^{n-1} e^{-ina} \right. \right. \\ & \left. \left. - (1-\eta-2i\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_a|Z|) \left\{ \frac{Z}{|Z|} \right\}^{n+1} e^{-ina} \right] e^{i\theta} \right. \\ & \left. + \left[ (1-\eta+2i\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_a|Z|) \left\{ \frac{Z}{|Z|} \right\}^{n-1} e^{-ina} \right. \right. \\ & \left. \left. - (1+\eta) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_a|Z|) \left\{ \frac{Z}{|Z|} \right\}^{n+1} e^{-ina} \right] e^{-i\theta} \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(i)} = & \frac{C_{55}K_a W_0}{4} \left\{ \left[ i(1+\eta) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_a|Z|) \left\{ \frac{Z}{|Z|} \right\}^{n-1} e^{-ina} \right. \right. \\ & \left. \left. - (2\xi+i(1-\eta)) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_a|Z|) \left\{ \frac{Z}{|Z|} \right\}^{n+1} e^{-ina} \right] e^{i\theta} \right. \\ & \left. + \left[ (2\xi-i(1-\eta)) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_a|Z|) \left\{ \frac{Z}{|Z|} \right\}^{n-1} e^{-ina} \right. \right. \\ & \left. \left. + i(1+\eta) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_a|Z|) \left\{ \frac{Z}{|Z|} \right\}^{n+1} e^{-ina} \right] e^{-i\theta} \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

## 四、各向异性介质中带衬砌的圆形结构与SH波的相互作用

研究各向异性介质中带衬砌的圆形结构与SH波的相互作用问题时, 通常假设衬砌是各向同性的, 同时认定衬砌的内边界为自由的, 此类情况是实际工程中出现最多的情况之一。

### 4.1 各向异性介质和衬砌结构中的波

在各向异性介质中, 入射波遇到衬砌结构时, 则会发生反射, 产生一个外行的散射波 $W^{(s)}$ , 则各向异性介质中的总波场 $W_I^{(t)}$ 可以写成:

$$W_I^{(t)} = W^{(t)} + \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(K_I|\xi(Z)|) \left\{ \frac{\xi(Z)}{|\xi(Z)|} \right\}^n \quad (4.1)$$

而在衬砌内部, 由于入射波的作用, 则在结构的二个界面上将分别出现一个向心波和另一个外行波。衬砌内总的波场 $W_I^{(t)}$ 则可以写成:

$$W_I^{(t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(K_I|Z|) \left\{ \frac{Z}{|Z|} \right\}^n + \sum_{-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(2)}(K_I|Z|) \left\{ \frac{Z}{|Z|} \right\}^n \quad (4.2)$$

其中,  $K_I = \omega/C_s$ ,  $C_s^2 = \mu_2/\rho_2$ ;  $C_s$ 为衬砌中的波速;  $\mu_2$ 为衬砌介质的弹性常数;  $\rho_2$ 为衬砌介质的密度。

### 4.2 边界条件

所研究的问题, 其边界条件是: (1)连续性条件: 在介质与衬砌的结合部, 应有位移和

应力的连续性条件; (2)应力的边界条件: 在衬砌的内边界给出应力自由的边界条件.

连续性条件:

$$Z = Z_1 = R_1 e^{i\theta}, W_{\mathbf{I}}^{(1)} - W_{\mathbf{I}}^{(2)} = 0 \quad (4.3)$$

$$\tau_{rz, \mathbf{I}}^{(1)} - \tau_{rz, \mathbf{I}}^{(2)} = 0 \quad (4.4)$$

应力自由的条件:

$$Z = Z_2 = R_2 e^{i\theta}, \tau_{rz, \mathbf{I}}^{(2)} = 0 \quad (4.5)$$

代式(4.1)、(4.2)至式(4.3)、(4.4)和式(4.5), 有:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{i,j}(Z_j) X_n^j = E_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.6)$$

其中

$$X_n^1 = A_n, X_n^2 = B_n, X_n^3 = C_n$$

$$E_n^{1,1} = H_n^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\xi(Z_1)|) \left\{ \frac{\xi(Z_1)}{|\xi(Z_1)|} \right\}^n$$

$$E_n^{1,2} = -H_n^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|Z_1|) \left\{ \frac{Z_1}{|Z_1|} \right\}^n$$

$$E_n^{1,3} = -H_n^{(2)}(K_{\mathbf{I}}|Z_1|) \left\{ \frac{Z_1}{|Z_1|} \right\}^n$$

$$\begin{aligned} E_n^{2,1} = & \frac{C_{65}K_{\mathbf{I}}}{4} \left\{ (a+ic)H_{n-1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\xi(Z_1)|) \left\{ \frac{\xi(Z_1)}{|\xi(Z_1)|} \right\}^{n-1} \right. \\ & \left. - (b-ic)H_{n+1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\xi(Z_1)|) \left\{ \frac{\xi(Z_1)}{|\xi(Z_1)|} \right\}^{n+1} \right\} e^{i\theta} \\ & + \frac{C_{65}K_{\mathbf{I}}}{4} \left\{ (b+ic)H_{n-1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\xi(Z_1)|) \left\{ \frac{\xi(Z_1)}{|\xi(Z_1)|} \right\}^{n-1} \right. \\ & \left. - (a-ic)H_{n+1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|\xi(Z_1)|) \left\{ \frac{\xi(Z_1)}{|\xi(Z_1)|} \right\}^{n+1} \right\} e^{-i\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n^{2,2} = & \frac{\mu_2 K_{\mathbf{I}}}{3} \left\{ H_{n-1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|Z_1|) \left\{ \frac{Z_1}{|Z_1|} \right\}^{n-1} e^{i\theta} \right. \\ & \left. - H_{n+1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|Z_1|) \left\{ \frac{Z_1}{|Z_1|} \right\}^{n+1} e^{-i\theta} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_n^{2,3} = & \frac{\mu_2 K_{\mathbf{I}}}{2} \left\{ H_{n-1}^{(2)}(K_{\mathbf{I}}|Z_1|) \left\{ \frac{Z_1}{|Z_1|} \right\}^{n-1} e^{i\theta} \right. \\ & \left. - H_{n+1}^{(2)}(K_{\mathbf{I}}|Z_1|) \left\{ \frac{Z_1}{|Z_1|} \right\}^{n+1} e^{-i\theta} \right\} \end{aligned}$$

$$E_n^{3,1} = 0$$

$$\begin{aligned} E_n^{3,2} = & \frac{\mu_2 K_{\mathbf{I}}}{3} \left\{ H_{n-1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|Z_2|) \left\{ \frac{Z_2}{|Z_2|} \right\}^{n-1} e^{i\theta} \right. \\ & \left. - H_{n+1}^{(1)}(K_{\mathbf{I}}|Z_2|) \left\{ \frac{Z_2}{|Z_2|} \right\}^{n+1} e^{-i\theta} \right\} \end{aligned}$$

$$E_n^{3,3} = \frac{\mu_2 K_{\mathbf{I}}}{2} \left\{ H_{n-1}^{(2)}(K_{\mathbf{I}}|Z_2|) \left\{ \frac{Z_2}{|Z_2|} \right\}^{n-1} e^{i\theta} \right.$$

$$-H_{n+1}^{(2)}(K_1|Z_2|)\left\{\frac{Z_2}{|Z_2|}\right\}^{n+1}e^{-i\theta}$$

和

$$E_1 = -W_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_n(K_\alpha|Z_1|) \left\{\frac{Z_1}{|Z_1|}\right\}^n e^{-ina}$$

$$E_2 = -\frac{C_{55}K_\alpha W_0}{4} \left\{ \left[ (1+\eta) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_\alpha|Z_1|) \left\{\frac{Z_1}{|Z_1|}\right\}^{n-1} e^{-ina} \right. \right. \\ \left. \left. - (1-\eta-2i\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_\alpha|Z_1|) \left\{\frac{Z_1}{|Z_1|}\right\}^{n+1} e^{-ina} \right] e^{i\theta} \right. \\ \left. + \left[ (1-\eta+2i\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_\alpha|Z_1|) \left\{\frac{Z_1}{|Z_1|}\right\}^{n-1} e^{-ina} \right. \right. \\ \left. \left. - (1+\eta) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_\alpha|Z_1|) \left\{\frac{Z_1}{|Z_1|}\right\}^{n+1} e^{-ina} \right] e^{-i\theta} \right\}$$

$$E_3 = 0$$

其中,  $Z_1 = R_1 e^{i\theta}$ ,  $Z_2 = R_2 e^{i\theta}$ .

式(4.6)两边乘以  $e^{is\theta}$ , 并在  $[-\pi, +\pi]$  区间上积分, 则有:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{-\infty}^{\infty} E_{ij}^{*j}(Z) X_n^j = E_{is}, \quad (i=1, 2, 3; s=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.7)$$

其中  $E_{ij}^{*j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_{ij}^{*j} e^{-is\theta} d\theta$ ,  $E_{is} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_i e^{-is\theta} d\theta$

式(4.7)是决定未知常数  $A_n$ ,  $B_n$  和  $C_n$  的无穷代数方程组.

### 4.3 动应力集中系数 $\tau_{\theta z}^*$

在研究带衬砌的圆形结构与 SH 波相互作用时, 重要的是要分别给出介质与衬砌的结合面和衬砌的内界面上的动应力集中系数  $\tau_{\theta z}^*$ . 按文献[4], 动应力集中系数  $\tau_{\theta z}^*$  可定义为:

$$\tau_{\theta z}^* = \tau_{\theta z}^{(i)} / \tau_0 \quad (4.8)$$

其中  $\tau_0$  为入射应力的最大幅值,  $\tau_0 = C_{55} K_\alpha W_0$ ; 而  $\tau_{\theta z}^{(i)} = \tau_{\theta z}^{(i)} + \tau_{\theta z}^{(s)}$  为在介质或衬砌中所产生的应力.

利用式(2.9), 则沿衬砌在介质中任一点的动应力集中系数  $\tau_{\theta z}^*, 1$  可写成:

$$\tau_{\theta z}^*, 1 = \frac{1}{4} \left\{ \left[ i(1+\eta) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_\alpha|Z_1|) \left\{\frac{Z_1}{|Z_1|}\right\}^{n-1} e^{-ina} \right. \right. \\ \left. \left. - i(1-\eta-2i\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_\alpha|Z_1|) \left\{\frac{Z_1}{|Z_1|}\right\}^{n+1} e^{-ina} \right] e^{i\theta} \right\} \\ - \frac{1}{4} \left\{ \left[ i(1-\eta+2i\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n-1}(K_\alpha|Z_1|) \left\{\frac{Z_1}{|Z_1|}\right\}^{n-1} e^{-ina} \right. \right. \\ \left. \left. + i(1+\eta) \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_{n+1}(K_\alpha|Z_1|) \left\{\frac{Z_1}{|Z_1|}\right\}^{n+1} e^{-ina} \right] e^{-i\theta} \right\} \\ + \frac{\eta \cdot (\cos^2 \alpha + 2\xi \sin \alpha \cos \alpha + \eta^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}}{4(\eta - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left\{ \left[ (ia-c) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(1)}(K_1 |\xi(Z_1)|) \left\{ \frac{\xi(Z_1)}{|\xi(Z_1)|} \right\}^{n-1} \right. \right. \\ & - (c+ib) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(1)}(K_1 |\xi(Z_1)|) \left. \left. \left\{ \frac{\xi(Z_1)}{|\xi(Z_1)|} \right\}^{n-1} \right] e^{i\theta} \right. \\ & + \left[ (c-ib) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(1)}(K_1 |\xi(Z_1)|) \left\{ \frac{\xi(Z_1)}{|\xi(Z_1)|} \right\}^{n-1} \right. \\ & \left. \left. + (c+ia) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(1)}(K_1 |\xi(Z_1)|) \left\{ \frac{\xi(Z_1)}{|\xi(Z_1)|} \right\}^{n-1} \right] e^{-i\theta} \right\} \quad (4.9) \end{aligned}$$

而衬砌的内外边界上的动应力集中系数 $\tau_{\theta z, I}^*$ , 为:

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z, I}^* &= \frac{i}{2} \frac{K_1}{K_a} \left\{ \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} B_n H_{n-1}^{(1)}(K_1 |Z_j|) \left\{ \frac{Z_j}{|Z_j|} \right\}^{n-1} \right. \right. \\ & + \sum_{-\infty}^{\infty} C_n H_{n-1}^{(2)}(K_1 |Z_j|) \left. \left. \left\{ \frac{Z_j}{|Z_j|} \right\}^{n-1} \right] e^{i\theta} \right. \\ & + \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} B_n H_{n+1}^{(1)}(K_1 |Z_j|) \left\{ \frac{Z_j}{|Z_j|} \right\}^{n-1} \right. \\ & \left. \left. + \sum_{-\infty}^{\infty} C_n H_{n+1}^{(2)}(K_1 |Z_j|) \left\{ \frac{Z_j}{|Z_j|} \right\}^{n-1} \right] e^{-i\theta} \right\} \quad (4.10) \end{aligned}$$

其中,  $Z_j = R_j e^{i\theta}$ ,  $j=1$ ,  $R=R_1$ , 表示介质与衬砌结合面上的动应力集中系数 $\tau_{\theta z, I}^*$ ;  $j=2$ ,  $R=R_2$ , 表示衬砌内边界面上的动应力集中系数 $\tau_{\theta z, I}^*$ .

## 五、算 例

如图1, 研究SH波对圆形结构物的散射问题. 用各向异性介质( $\xi=0.2$ ,  $\eta=0.8$ )来模拟结构周围的介质, 如片状的花岗岩介质. 而衬砌是各向同性的. 将对二种衬砌结构进行研究: (1)衬砌是混凝土的; (2)衬砌是钢的. 若取介质中的弹性常数 $C_{55}$ 与花岗岩介质视为各向同性时的弹性常数相一致. 则在上述的二种情况之下, 介质与衬砌的无量纲弹性常数将有:

	情况 I	情况 II
$\bar{\mu}$	0.33	2.90
$\bar{\nu}$	1.5	0.70

其中,  $\bar{\mu} = \mu_2/C_{55}$ ,  $\bar{\nu} = K_1/K_1$ .

代有关参数至方程式(4.7), 并利用截断 $n$ 和 $s$ 的方法求解无穷方程组(4.7), 并得到未知系数 $A_n$ ,  $B_n$ 和 $C_n$ .

图2至图7给出计算结果. 图2至图5分别给出动应力集中系数 $|\tau_{\theta z, I}^*|$ 和 $|\tau_{\theta z, I}^*|$ 沿各自边界的分布. 图6至图7则给出当 $\theta=90^\circ$ 时, 动应力集中系数 $|\tau_{\theta z, I}^*|$ 和 $|\tau_{\theta z, I}^*|$ 随波数 $K_a a$ 的变化, 入射角 $\alpha=0^\circ$ .

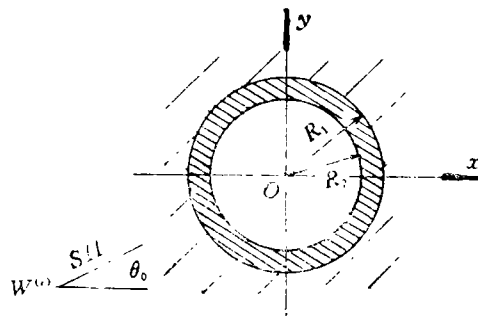


图1 入射的平面SH波和带衬砌的圆形结构物

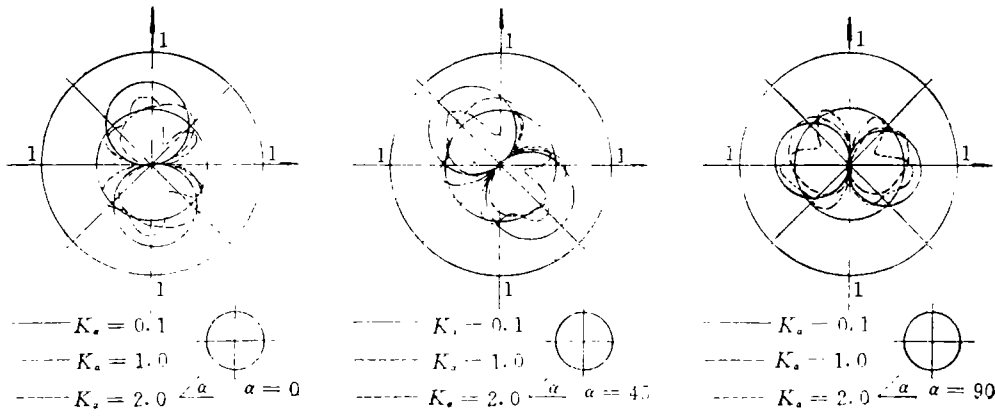


图2 带第 I 种衬砌的圆形结构物沿内边界的应力  $|\tau_{\theta z, I}^*|$  分布

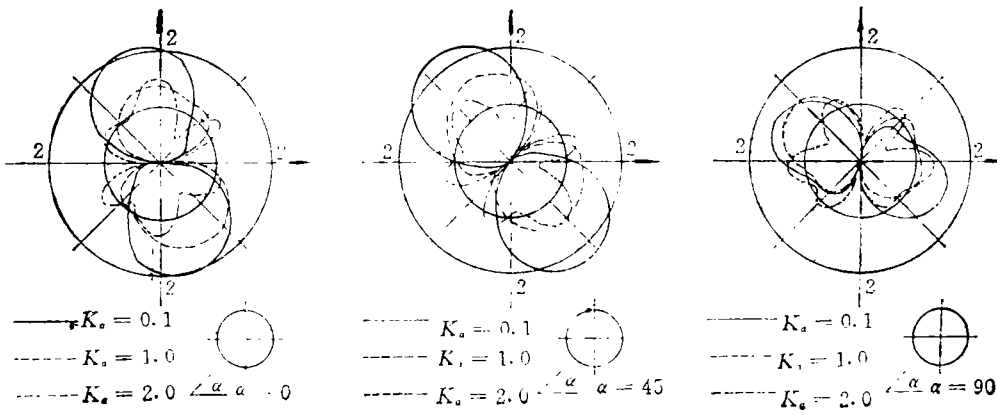


图3 在各向异性介质中 ( $\xi=0.2, \eta=0.8$ ) 的带第 I 种衬砌的圆形结构物沿外边界的应力  $|\tau_{\theta z, I}^*|$  分布

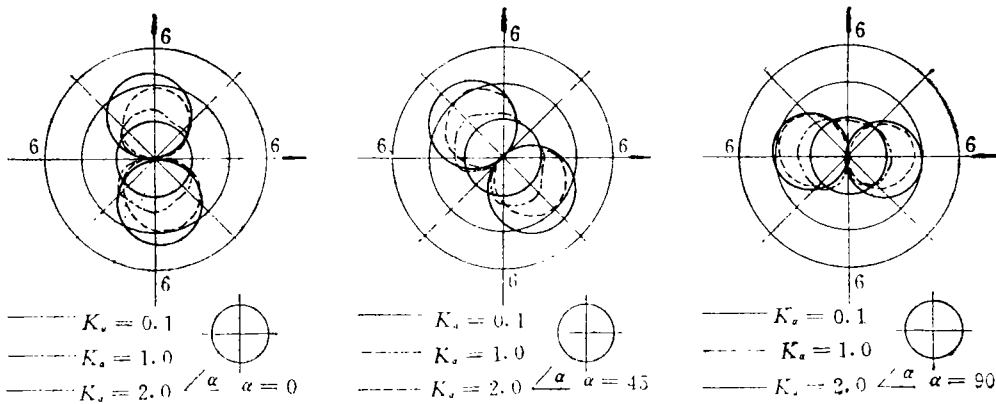


图4 带第 II 种衬砌的圆形结构物沿内边界的应力  $|\tau_{\theta z, I}^*|$  分布



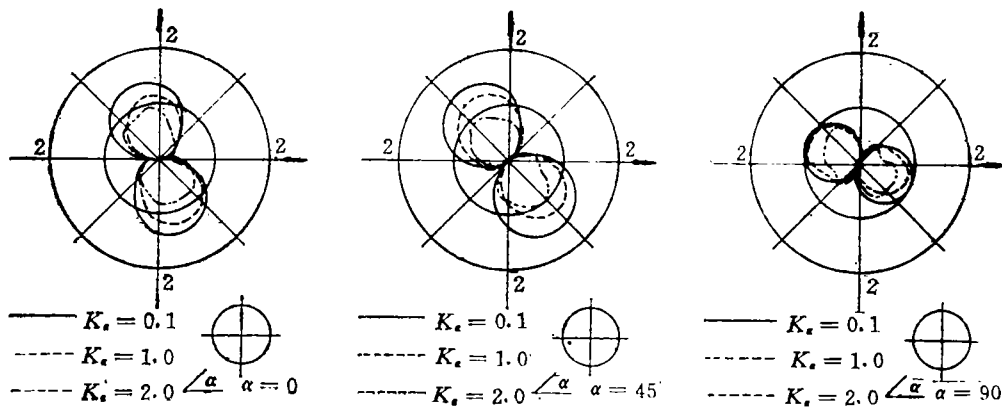
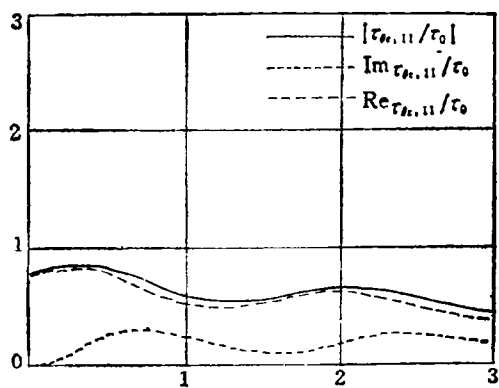
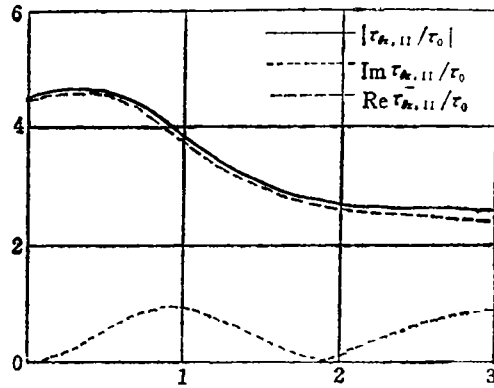


图5 在各向异性介质中( $\xi=0.2, \eta=0.8$ )的带第II种衬砌的圆形结构物沿外边界的应力 $|\tau_{\theta z,1}^*|$ 分布

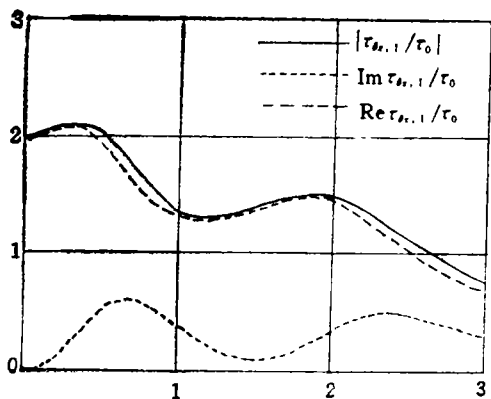


(a)情况 I

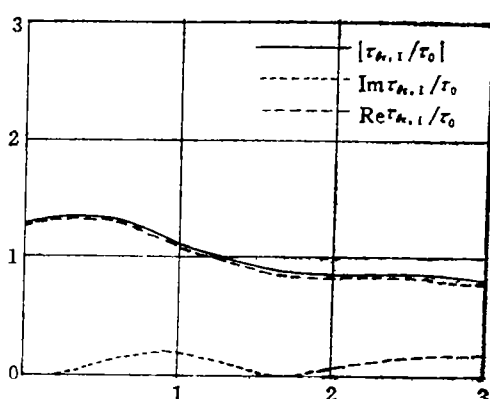


(b)情况 II

图6 带衬砌的圆形结构物内边界上 $\theta=90^\circ$ 时 $|\tau_{\theta z,1}^*|$ 随 $K_0 a$ 的变化, 入射角 $\alpha=0^\circ$



(a)情况 I



(b)情况 II

图7 在各向异性介质中( $\xi=0.2, \eta=0.8$ ), 衬砌的外边界上 $\theta=90^\circ$ 时 $|\tau_{\theta z,1}^*|$ 随 $K_0 a$ 的变化, 入射角 $\alpha=0^\circ$

## 六、讨 论

在我们计算分析的两种情况中,对第 I 种情况,由于衬砌结构与介质相比,相对较“软”,所以衬砌中的动应力 $|\tau_{\theta z,1}^*|$ 较小,而介质中的动应力 $|\tau_{\theta z,1}^*|$ 则较大。而对于第 II 种情况,由于衬砌结构相对较“硬”,则情况相反。

由 $|\tau_{\theta z,1}^*|$ ,  $|\tau_{\theta z,1}^*|$  随波数  $K_0 a$  变化的曲线可看出,其变化规律与无衬砌的情况极其相似。最大的动应力仍出现在波数  $K_0 a = 0.3$  的附近,而其幅值大约高出静力值 10%~15%。

动应力集中系数除与波数有关之外,还与  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\nu}$ , 衬砌厚度, 介质参数等相关。结果表明,衬砌“硬”,则应力就越高,降低介质中应力的有效办法是加强结构,即减少  $\bar{\mu}$ 。

由于各向异性介质的影响,它改变了动应力的分布,特别是对低频入射的情况,这尤为显著。由此可以看出,在研究结构的抗震时,考虑介质的各向异性性质是必要的。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Y. H. Pao, Elastic waves in solids, *ASME J. Appl. Mech.*, 50(4) (1983), 1152—1764.
- [ 2 ] Liu Diankui and Han Feng, The scattering of plane SH-waves by non-circular cavity in anisotropic media, *ASME J. Appl. Mech.*, 60(3) (1993), 769—772.
- [ 3 ] Г.Н.Саввин, Концентрация Напряжений Около Отверстий, Гостехиздат, Москва (1963).
- [ 4 ] Y. H. Pao and C. C. Mow, *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, Crane and Russak, New York (1973).
- [ 5 ] Liu Diankui, Dynamic stress concentration around a circular hole due to SH-wave in anisotropic media, *Acta Mechanica Sinica*, 4(2) (1988), 147—155.
- [ 6 ] Liu Diankui, Gai Bingzheng and Tao Guiyuan, Application of method of complex function to dynamic stress concentration, *Wave Motion*, 4 (1982), 293—304.
- [ 7 ] Liu Diankui and Han Feng, Scattering of plane SH-waves on cylindrical canyon of arbitrary shape in anisotropic media, *Acta Mechanica Sinica*, 6(3) (1990), 256—266.
- [ 8 ] Liu Diankui and Han Feng, Scattering of plane SH-wave by cylindrical canyon of arbitrary shape, *Soil Dyn. and Ear. Eng.*, 10(5) (1991), 241—255.
- [ 9 ] Nasser Moeen-Vaziri and M. D. Trifunac, Scattering of plane SH-waves by cylindrical canals of arbitrary shape, *Soil Dyn. and Ear. Eng.*, 4(1) (1985), 18—23.

## The Interaction of Plane SH-Waves and Circular Cavity Surfaced with Lining in Anisotropic Media

Han Feng    Wei Yang    Liu Diankui

*(Department of Aerospace Engineering, Harbin Engineering  
University, Harbin 150001, P. R. China)*

### Abstract

In this paper, we use the complex function method for solving the problem of interaction of plane SH-waves and circular cavity surfaced with lining in anisotropic media. Anisotropic media can be used to simulate the conditions of the geology. This problem can be handled by using the method similar to that incorporated in Ref.[5] to define the scattering waves in media, added with the given boundary condition of the circular cavity.

In this paper, as illustrated in the examples, the results and discussions of numerical studies have been done for the interaction of plane SH-waves and two kinds of circular cavities, surfaced with lining made up of different materials, in anisotropic media.

**Key words** anisotropic, SH-wave, lining, interaction