应用数学和力学, 第 25 卷 第 2 期(2004 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 02_0159_07

Reissner 板弯曲的辛求解体系

姚伟岸, 隋永枫

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

(钟万勰推荐)

摘要: 基于 Reissner 板弯曲问题的 Hellinger_Reissner 变分原理, 通过引入对偶变量, 导出 Reissner 板弯曲的 Hamilton 对偶方程组 从而将该问题导入到哈密顿体系, 实现从欧几里德空间向辛几何空间, 拉格朗日体系向哈密顿体系的过渡 于是在由原变量及其对偶变量组成的辛几何空间内, 许多有效的数学物理方法如分离变量法和本征函数向量展开法等均可直接应用于 Reissner 板弯曲问题的求解 这里详细求解出 Hamilton 算子矩阵零本征值的所有本征解及其约当型本征解, 给出其具体的物理意义 形成了零本征值本征向量之间的共轭辛正交关系 可以看到, 这些零本征值的本征解是 Saint_Venant 问题所有的基本解, 这些解可以张成一个完备的零本征值辛子空间 而非零本征值的本征解是圣维南原理所覆盖的部分 新方法突破了传统半逆解法的限制, 有广阔的应用前景

关 键 词: Reissner 板; Hamilton 体系; 辛几何; 分离变量
中图分类号: O343 文献标识码: A

引 言

中厚板问题是板壳力学的一个重要组成部分, 其解析求解一直是一个难点问题 弹性力学传统的方法是以半逆解法为主, 只能对一些特殊的问题进行分析 传统的半逆法都属于单类变量的拉格朗日体系, 因其缺乏理性而使其求解受到很大的限制 文[1] 建立了一个富有理性的弹性力学求解新方法, 并取得了一些研究成果[1~3] 同时, 其统一的方法论也可以应用于应用力学的多个分支领域[4] 文[5~7] 建立了平面弹性与 Kirchhoff 板弯曲的相似性理论, 并给出了 Kirchhoff 板弯曲经典理论的另一套基本方程与求解方法, 从而突破了 Kirchhoff 板弯曲经典求解方法的限制, 扩大了解析求解的范围, 为板弯曲问题的分析求解开拓出一条新路 在此基础上, 本文讨论 Reissner 板弯曲问题 首先, 从 Reissner 板弯曲的 Hellinger_Reissner 变分原理出发, 引入原变量的对偶变量, 形成辛几何空间的全状态向量, 并导出 Reisssner 板弯曲问题的 Hamilton 对偶方程组, 从而进入 Hamilton 体系, 可以在辛几何空间利用分离变量及本征函数向量展开法直接求解 Reissner 板弯曲问题 其次, 通过理性分析, 直接求解出 Hamilton 算子矩阵零本征值的所有本征向量及其约当型本征向量, 它们是有特定物理意义的解, 也是圣维南问

收稿日期: 2002_07_16; 修订日期: 2003_09_16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172021); 教委博士点专项基金资助项目(20010141024)
作者简介: 姚伟岸(1963—), 男, 辽宁丹东人, 教授(联系人. Tel/Fax: 86_411_4707154; E_mail: zwoffice@dlut.edu.cn);
隋永枫(1978—), 男, 黑龙江人, 博士生(E_mail: suiyongf@student.dlut.edu.cn).

题的基本解

1 Reissner 板弯曲的变分原理

本文所讨论 Reissner 板占有区域 $- a < x < a,\ 0 < y < l$, 其中 $a << l$, 而 Reissner 板弯曲的内力正向规定如图 1 所示, 而对应广义位移有板的挠度 w 及转角 ${}_x$ 和 ${}_y$

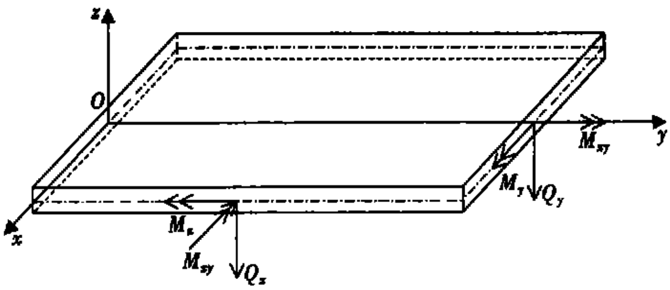

图 1 Reissner 板弯曲内力正向规定示意图

Reissner 板弯曲的基本方程可以从下面的 Hellinger_Reissner 变分原理导出

$$ {}_2 = 0, \tag{1}$$

这里

$$ {}_2 = {}^{l}_{0}\,{}^{a}_{-a}\Big[M_x \frac{{}_x}{x} + M_y \frac{{}_y}{y} - M_{xy}\left(\frac{{}_x}{y} + \frac{{}_y}{x}\right) - Q_x\left(\frac{w}{x} - {}_x\right) - Q_y\left(\frac{w}{y} - {}_y\right) - U - q_w w - m_x\, {}_x - m_y\, {}_y\Big]\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{2}$$

而其中余能密度函数为

$$U = \frac{1}{2D(1 - {}^2)}\left[M_x^2 + M_y^2 - 2\, M_x M_y + 2(1 + \ )M_{xy}^2\right] + \frac{1}{2C}(Q_x^2 + Q_y^2) \tag{3}$$

现在选择长度方向 y 模拟 Hamilton 体系的时间坐标, 并用一点代表对坐标 y 的偏微商, 即 $(\ ) = \ / y$ 执行式(1) 对 M_x、Q_x 的变分, M_x、Q_x 能表示成

$$M_x = D(1 - {}^2)\frac{{}_x}{x} + M_y,\quad Q_x = C\left({}_x - \frac{w}{x}\right) \tag{4}$$

将式(4) 代入式(1) 即可给出 Hamilton 混合能变分原理

$$\left\{ {}^{l}_{0}\,{}^{a}_{-a}\left[\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q} - H - m_x q_1 - m_y q_2 - q_w q_3\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\} = 0, \tag{5}$$

而 Hamilton 密度函数为

$$H = \frac{1}{2D}p_2^2 + \frac{1}{D(1 - \ )}p_1^2 + \frac{1}{2C}p_3^2 - \frac{D(1 - {}^2)}{2}\left(\frac{q_1}{x}\right)^2 - \frac{C}{2}\left(\frac{q_3}{x} - q_1\right)^2 - p_2\frac{q_1}{x} - p_1\frac{q_2}{x} + p_3 q_2, \tag{6}$$

这里为方便记

$$\boldsymbol{q} = \left\{q_1, q_2, q_3\right\}^{\mathrm{T}} = \left\{{}_x, {}_y, w\right\}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p} = \left\{p_1, p_2, p_3\right\}^{\mathrm{T}} = \left\{- M_{xy}, M_y, - Q_y\right\}^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

2 Hamilton 对偶方程

引入由原变量 $\boldsymbol{q}$ 和其对偶变量 $\boldsymbol{p}$ 组成的全状态向量 $\boldsymbol{v} = \left\{\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\right\}^{\mathrm{T}}$, 则按照如下的辛内积

定义,它们组成一个辛几何空间

$$v^{(1)},\ v^{(2)} \ \overset{\text{def}}{=} \ {}_{-a}^{\ a}(v^{(1)})^{\mathrm{T}} J v^{(2)} \mathrm{d}x =$$

$$ {}_{-a}^{\ a}(q_1^{(1)}p_1^{(2)} + q_2^{(1)}p_2^{(2)} + q_3^{(1)}p_3^{(2)} - p_1^{(1)}q_1^{(2)} - p_2^{(1)}q_2^{(2)} - p_3^{(1)}q_3^{(2)})\mathrm{d}x, \tag{8}$$

其中 J 为单位辛矩阵

$$J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_3 \\ -I_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

执行式(5)的变分,则得到Hamilton对偶微分方程组

$$v = Hv + h_p, \tag{10}$$

其中哈密顿算子矩阵 H 为

$$H = \begin{bmatrix} 0 & - \ / \ x & 0 & 2/D(1- \ ) & 0 & 0 \\ - \ / \ x & 0 & 0 & 0 & 1/D & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/C \\ C - D(1- \ ^2) \ ^2/ \ x^2 & 0 & -C \ / \ x & 0 & - \ / \ x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \ / \ x & 0 & -1 \\ C \ / \ x & 0 & -C \ ^2/ \ x^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

而与域内的体力有关的非齐次项为

$$h_p = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad -m_x \quad -m_y \quad -q_w\}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

求解非齐次线性偏微分方程组(10),应先求解其相应齐次方程组

$$v = Hv, \tag{13}$$

这里讨论的两侧边界条件假定是自由边

$$D(1- \ ^2) \ \frac{q_1}{x} + \ p_2 = 0,\ p_1 = 0,\ q_1 - \ \frac{q_3}{x} = 0, \qquad 当\ x = \ a\ 时 \tag{14}$$

通过分部积分知有

$$v^{(1)}, Hv^{(2)} \ = \ v^{(2)}, Hv^{(1)} \ + \Big\{ p_1^{(1)}q_2^{(2)} - p_1^{(2)}q_2^{(1)} -$$

$$q_1^{(1)}\Big[D(1- \ ^2) \ \frac{q_1^{(2)}}{x} + \ p_2^{(2)}\Big] - Cq_3^{(2)}\Big[q_1^{(1)} - \ \frac{q_3^{(1)}}{x}\Big] +$$

$$q_1^{(2)}\Big[D(1- \ ^2) \ \frac{q_1^{(1)}}{x} + \ p_2^{(1)}\Big] + Cq_3^{(1)}\Big[q_1^{(2)} - \ \frac{q_3^{(2)}}{x}\Big]\Big\}\Big|_{-a}^{+a}, \tag{15}$$

因此如果 $v^{(1)}, v^{(2)}$ 满足两侧自由边界条件(14),则恒有

$$v^{(1)}, Hv^{(2)} \qquad v^{(2)}, Hv^{(1)} \ , \tag{16}$$

因此 H 为辛几何空间的哈密顿算子矩阵 其实对其他边界,如对固支和简支边界条件式(16)也恒成立

3 辛本征问题

对齐次方程(13),通常可以用分离变量法进行求解 令

$$v(x, y) = \ (y) \ (x), \tag{17}$$

将其代入(13)式即可以得到

$$(y) = \exp(\ y) \tag{18}$$

及本征方程

$$\boldsymbol{H}\ (x) = \ (x), \tag{19}$$

其中 是本征值,待求;而 (x) 是本征函数向量,它还当满足侧边齐次边界条件式(14)

上面已经证明 $\boldsymbol{H}$ 为辛几何空间的哈密顿型算子矩阵,因此其本征问题是有特点的[1,2]:

1) 如 是哈密顿型算子矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的本征值,则 $-$ 也一定是其本征值

2) 哈密顿算子矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的本征向量之间有共轭辛正交关系

设 $_i$ 和 $_j$ 分别是本征值 $_i$ 和 $_j$ 对应的本征向量,则当 $_i +\ _j\ \ 0$ 时有辛正交关系

$$_i,\ _j = \ _{-a}^{a}\ _i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\ _j \mathrm{d}x = 0, \tag{20}$$

而与 $_i$ 辛共轭的向量一定是本征值 $-\ _i$ 的本征向量(或其约当型本征向量)

有了共轭辛正交关系,则任一全状态函数向量 $\boldsymbol{v}$ 总可以用本征解来展开

$$\boldsymbol{v}(x, y) = \ _{i=1}\left[a_i \exp(\ _i y)\ _i + b_i \exp(-\ _i y)\ _{-i}\right], \tag{21}$$

其中 a_i 与 b_i 是待定系数,而 $_i$ 与 $_{-i}(i = 1, 2, \ )$ 是本征函数向量 当然对其展开式也可取有限项来近似求解 利用本征向量的共轭辛正交关系,则可求出相关的系数,从而得到式(13)的解

4 零本征值的本征解

在哈密顿本征问题中,零本征值是一个很特殊的本征值,这类本征值的解在弹性力学中还具有特殊的重要性 对于矩形 Reissner 板的弯曲问题,由于当前采用了两侧边皆为自由的边界条件(14),就必然有重根的零本征值

现在来寻求这些零本征值的本征解,即求解微分方程

$$\boldsymbol{H}\ (x) = \boldsymbol{0} \tag{22}$$

求解(22)并代入齐次侧边边界条件式(14),即可得到零本征值的基本本征解

$$\boldsymbol{v}_0^{(1)} = \ _0^{(1)} = \{0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\}^{\mathrm{T}}, \tag{23}$$

和

$$\boldsymbol{v}_0^{(2)} = \ _0^{(2)} = \{1\quad 0\quad x\quad 0\quad 0\quad 0\}^{\mathrm{T}} \tag{24}$$

由于 $_0^{(1)}$ 与 $_0^{(2)}$ 是零本征值的基本本征向量,因此它们本身就构成原问题(13)的解 $\boldsymbol{v}_0^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{v}_0^{(2)}$ 显然解 $\boldsymbol{v}_0^{(1)}$ 的物理意义为板的刚体平移,而解 $\boldsymbol{v}_0^{(2)}$ 的物理意义为板的 xOz 平面上的刚体旋转 由于当前的零本征值是多重本征值,而且 $_0^{(1)}$ 与 $_0^{(2)}$ 互相辛正交,即有

$$_0^{(1)},\ _0^{(2)} = \ _{-a}^{a}(\ _0^{(1)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\ _0^{(2)} \mathrm{d}x = 0, \tag{25}$$

因此一定存在零本征值的约当型本征解,而且 $_0^{(1)}$ 与 $_0^{(2)}$ 分别是两条约当链的链头 根据数学物理方法,其约当型的本征解应求解方程

$$\boldsymbol{H}\ _k^{(j)} = \ _{k-1}^{(j)}, \tag{26}$$

这里下标 $k(= 1, 2, 3)$ 表示其是第 k 阶约当型本征解,而上标 $j(= 1, 2)$ 表示其位于第 j 条约当链上 当然,约当型本征解除了要满足式(26)外,还要满足齐次侧边边界条件式(14)

经求解知其一阶约当型本征解有

$$_1^{(1)} = \{0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\}^{\mathrm{T}}, \tag{27}$$

和
$$ {}^{(2)}_{1} = \left\{0,\ x - \frac{2\mathrm{sh}(mx)}{m\,\mathrm{ch}(ma)},\ 0,\ \frac{2C}{m^2}\left[1-\frac{\mathrm{ch}(mx)}{\mathrm{ch}(ma)}\right],\ 0,\ \frac{2C\mathrm{sh}(mx)}{m\,\mathrm{ch}(ma)}\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{28}$$
其中
$$ m = \sqrt{2C/D(1-\quad)} \tag{29}$$
这两个约当型解本身并不是原问题(13)的解,但由它们可分别组成原问题的解
$$ \boldsymbol{v}_1^{(1)} = {}^{(1)}_{1} + y\ {}^{(1)}_{0} = \{0,\ 1,\ y,\ 0,\ 0,\ 0\}^{\mathrm{T}}, \tag{30}$$
和
$$ \boldsymbol{v}_1^{(2)} = {}^{(2)}_{1} + y\ {}^{(2)}_{0} = \left\{y,\ x - \frac{2\mathrm{sh}(mx)}{m\,\mathrm{ch}(ma)},\ xy,\ \frac{2C}{m^2}\left[1-\frac{\mathrm{ch}(mx)}{\mathrm{ch}(ma)}\right],\ 0,\ \frac{2C\mathrm{sh}(mx)}{m\,\mathrm{ch}(ma)}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{31}$$
显然 $\boldsymbol{v}_1^{(1)}$ 的物理意义为 yOz 平面上的刚体旋转,而 $\boldsymbol{v}_1^{(2)}$ 的物理意义为纯扭转解 由于 ${}^{(2)}_{1}$ 与 ${}^{(1)}_{0}$ 辛正交,而与 ${}^{(2)}_{0}$ 辛共轭
$$ {}^{(2)}_{0},\ {}^{(2)}_{1} = \int_{-a}^{a}(\ {}^{(2)}_{0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\ {}^{(2)}_{1}\,\mathrm{d}x = \frac{8C}{m^3}[am - \mathrm{th}(ma)] \quad 0, \tag{32}$$
因此第2条约当型链上仅有 ${}^{(2)}_{0}$ 与 ${}^{(2)}_{1}$ 两个本征解 另一方面,由于 ${}^{(1)}_{1}$ 与 ${}^{(1)}_{0}$ 和 ${}^{(2)}_{0}$ 均辛正交,因此第1条约当型链上还一定有二阶约当型本征解,经求解得
$$ {}^{(1)}_{2} = \left\{-\quad x,\ 0,\ -\frac{1}{2}\ x^2 + \ d,\ 0,\ D(1-\ \ ^2),\ 0\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{33}$$
而由它组成的原问题(13)的解为
$$ \boldsymbol{v}_2^{(1)} = {}^{(1)}_{2} + y\ {}^{(1)}_{1} + \frac{y^2}{2}\ {}^{(0)}_{1} = \left\{-\quad x,\ y,\ \frac{1}{2}(y^2 - \ x^2) + \ d,\ 0,\ D(1-\ \ ^2),\ 0\right\}^{\mathrm{T}} \tag{34}$$
显然 $\boldsymbol{v}_2^{(1)}$ 的物理意义为 yOz 平面上的纯弯曲解 由于 ${}^{(1)}_{2}$ 仍与 ${}^{(1)}_{0}$ 和 ${}^{(2)}_{0}$ 均辛正交,因此第1条约当型链上还一定有三阶约当型本征解 经求解得
$$ {}^{(1)}_{3} = \left\{0,\ \frac{2\ a\,\mathrm{ch}(mx)}{m\,\mathrm{sh}(ma)} - \frac{1}{2}\ x^2 + \frac{2}{m^2} + \ d,\ 0,\ \frac{2C}{m^2}\left[\frac{a\,\mathrm{sh}(mx)}{\mathrm{sh}(ma)} - x\right],\right. $$
$$ \left. 0,\ -\ D(1-\quad)\left[1+\frac{ma\,\mathrm{ch}(mx)}{\mathrm{sh}(ma)}\right]\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{35}$$
由它组成的原问题(13)的解为
$$ \boldsymbol{v}_3^{(1)} = {}^{(1)}_{3} + y\ {}^{(1)}_{2} + \frac{y^2}{2}\ {}^{(1)}_{1} + \frac{y^3}{6}\ {}^{(1)}_{0} = \left\{\begin{array}{c} -\quad xy \\ \dfrac{2\ a\,\mathrm{ch}(mx)}{m\,\mathrm{sh}(ma)} - \dfrac{1}{2}\ x^2 + \dfrac{2}{m^2} + \dfrac{1}{2}y^2 + \ d \\ -\dfrac{1}{2}\ x^2 y + \dfrac{1}{6}y^3 + \ dy \\ D\ (1-\quad)\left[\dfrac{a\,\mathrm{sh}(mx)}{\mathrm{sh}(ma)} - x\right] \\ D(1-\ \ ^2)y \\ -\ D(1-\quad)\left[1+\dfrac{ma\,\mathrm{ch}(mx)}{\mathrm{sh}(ma)}\right] \end{array}\right\} \tag{36}$$
解 $\boldsymbol{v}_3^{(1)}$ 的物理意义为常剪应力弯曲解 由于 ${}^{(1)}_{3}$ 与 ${}^{(2)}_{0}$ 辛正交而与 ${}^{(1)}_{0}$ 辛共轭

$$ {}_3^{(1)},\quad {}_0^{(1)} = \int_{-a}^{a} (\ {}_3^{(1)})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} \ {}_0^{(1)} \mathrm{d}x = 2Da(1- \ ^2) \quad 0, \tag{37}$$

因此第 1 条约当型链也告结束 至此, 我们得到了 Reissner 板的全部零本征值的本征解, 每一个本征解都有特定的物理意义 不难看出, 链 1 上的解 $\boldsymbol{v}_0^{(1)}$、$\boldsymbol{v}_1^{(1)}$、$\boldsymbol{v}_2^{(1)}$、$\boldsymbol{v}_3^{(1)}$ 是关于 y 轴的对称变形状态; 而链 2 上的解 $\boldsymbol{v}_0^{(2)}$、$\boldsymbol{v}_1^{(2)}$ 是关于 y 轴的反对称变形状态

表 1 零本征值的本征向量间的共轭辛正交关系

	${}_0^{(1)}$	${}_1^{(1)}$	${}_2^{(1)}$	${}_3^{(1)}$	${}_0^{(2)}$	${}_1^{(2)}$
${}_0^{(1)}$	0	0	0		0	0
${}_1^{(1)}$		0		0	0	0
${}_2^{(1)}$			0	d	0	0
${}_3^{(1)}$				0	0	0
${}_0^{(2)}$					0	
${}_1^{(2)}$						0

零本征值各阶次本征向量之间有共轭辛正交关系, 见表 1, 其中 代表两者之间是辛共轭的, 0 代表两者之间的辛正交关系是自然满足的, 而 d 表示两者之间通过选择适当的 d 值,

$$ d = \frac{m^2a^2 \ (1+ 3 \ ) - 6(1+ 2 \ ) - 6ma \ ^2\mathrm{th}(ma)}{6m^2(1+ \ )}, \tag{38}$$

而达成辛正交关系的 至此我们已达成了零本征值本征向量之间的共轭辛正交关系, 即组成了一组共轭辛正交的向量组

这 6 个零本征值的本征解是 Saint_Venant 问题所有的基本解, 这些解可以张成一个完备的零本征值辛子空间, 这些解的影响是全域的 式(13) 中还有无穷多非零本征值的本征解, 它们是圣维南原理所覆盖的部分, 也即是衰减的, 其影响是局部的 由于篇幅的限制, 这里就不讨论了

5 结 束 语

本文的工作表明, Reissner 板弯曲问题也完全可以导入 Hamilton 体系, 形成相应的辛求解体系 辛求解体系通过完全的理性推导直接求解出圣维南问题的所有基本解, 它们形成一个完备的辛子空间 其意义不仅是为 Reissner 板弯曲问题的解析求解开拓出一条新路, 而且通过 Reissner 板弯曲与平面偶应力的模拟关系[8], 也可以将这个统一的方法引入平面偶应力问题的分析, 这方面还有许多工作有待开展

[参 考 文 献]

[1] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.

[2] 姚伟岸、钟万勰. 辛弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[3] YAO Wei_an, YANG Hai_tian. Hamiltonian system based Saint Venant solutions for multi_layered composite plane anisotropic plates[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**(32): 5807 5817.

[4] 钟万勰. 应用力学对偶体系[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[5] 钟万勰, 姚伟岸. 板弯曲求解新体系及其应用[J]. 力学学报, 1999, **31**(2): 173 184.

[6] YAO Wei_an, ZHONG Wan_xie, SU Bin. New solution system for circular sector plate bending and its application[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1999, **12**(4): 307 315.

[7] 姚伟岸, 苏滨, 钟万勰. 基于相似性原理的正交各向异性板弯曲 Hamilton 体系[J]. 中国科学, E 辑, 2001, **31**(4): 342 347.

[8] 钟万勰, 姚伟岸, 郑长良. Reissner 板弯曲与平面偶应力模拟[J]. 大连理工大学学报, 2002, **42**(5): 519 521.

Symplectic Solution System for Reissner Plate Bending

YAO Wei_an, SUI Yong_feng

(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P. R. China)

Abstract: Based on the Hellinger_Reissner variatonal principle for Reissner plate bending and introducing dual variables, Hamiltonian dual equations for Reissner plate bending were presented. Therefore Hamiltonian solution system can also be applied to Reissner plate bending problem, and the transformation from Euclidian space to symplectic space and from Lagrangian system to Hamiltonian system was realized. So in the symplectic space which consists of the original variables and their dual variables, the problem can be solved via effective mathematical physics methods such as the method of separation of variables and eigenfunction_vector expansion. All the eigensolutions and Jordan canonical form eigensolutions for zero eigenvalue of the Hamiltonian operator matrix are solved in detail, and their physical meanings are showed clearly. The adjoint symplectic orthonormal relation of the eigenfunction vectors for zero eignevalue are formed. It is showed that the all eigensolutions for zero eigenvalue are basic solutions of the Saint_Venant problem and they form a perfect symplectic subspace for zero eigenvalue. And the eigensolutions for nonzero eigenvalue are covered by the Saint_Venant theorem. The symplectic solution method is not the same as the classical semi_inverse method and breaks through the limit of the traditional semi_inverse solution. The symplectic solution method will have vast application.

Key words: Reissner plate; Hamiltonian system; symplectic geometry; separation of variable