

# 剪切壁流有旁支管道及一小球时的流动计算

陈耀松<sup>1</sup> 马新民<sup>1</sup>  
梁国平<sup>2</sup> 戴民<sup>2</sup>

(戴世强推荐, 1994年5月23日收到)

## 摘 要

本文研究了旁支管道附近的剪切流场变化, 计算时考虑到小球的存在. 本文采用了《有限元程序自动生成系统》, 整个计算所用工作量极少.

**关键词** 生物流动 血管破裂 有限元法

## 一、引 言

哺乳动物血管因硬化而破损的问题历来为人们所重视. 一说这是剪切应力增大而破损, 另一说剪切应力小处内皮细胞短而圆易使血脂沉积而使血管硬化所致<sup>[1]</sup>. 从目前掌握的实验记录来看, 后者为先. 于是, 便向流体力学学者提出血管破损附近的剪切应力如何分布的问题. 这一问题的解决将有助于判断何处血脂易于沉积. 血管壁面的裂纹必然引起渗血, 带走血球, 使后者的密度分布异样. 医疗生理要求知道这一血球活动的规律. 除此之外, 同一课题亦是环保除尘和化工分滤所要研究的对象<sup>[5]</sup>, 不论是微细血管内的流动或是清滤器细孔和尘粒的尺寸都属小雷诺数流动, 可用线性的Stokes流动来刻画. 对Stokes流动的格林函数人们十分熟悉<sup>[7]</sup>. 已被广泛地应用到各种小雷诺数流动的研究之中. 文献[5]便是应用以带孔平板为边界条件的格林函数来解决小球出流这一复杂问题的典型例子. 但在现实的几何边界中, 只有少数已找到可用的格林函数. 而对多数, 由于没有可资利用的格林函数而无法采用边界积分方法. 我们知道有限元方法对复杂的几何边界有极大的适应能力. 与边界元方法相比, 计算工作量要大. 但对我们要研究的这类问题, 在广大的无限计算区内可以采用相似单元方法<sup>[9]</sup>. 而使计算工作量大为减少. 有限元方法的发展比较成熟, 如今已有大量的通用程序可以利用. 本文采用[6]的《有限元程序自动生成系统》. 从网格剖分到程序生成, 以至结果成图全部“自动”. 它使这一复杂的流动问题的计算仅费“吹灰之力”即得解决. 鉴于[1, 5]已对本文研究的问题有了较详细的介绍和报导, 本文将侧重于算法选择和《有限元程

1 北京大学力学系, 北京 100871.

2 中国科学院数学研究所, 北京 100080.

序自动生成系统》的介绍上。本文选择剪切流+旁管+小球为算例。对此，文献[1, 5]的方法是无力为力的。

## 二、问题的数学提法

设有如图1所示的坐标系。Oxy设在壁面上，x-方向顺向剪切流，z-方向垂直向上，在 $z \geq 0$ 区原为均匀剪切流：

$$\left. \begin{aligned} u &= z \\ v &= w = p = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中 $u, v, w, p$ 分别是三个方向的流体速度分量和压力。现设旁支血管与壁面垂直，其轴端某处 $z = -b$ 上有一半径为1的圆球，静止不动。血管的半径为 $a > 1$ 。由于旁支血管的存在使管口附近的局部流场受到影响。假定出入支管的流体量相同，即总流量为零，于是，这就成了一个纯剪切的流动问题。小 $Re$ 数流动服从Stokes方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

其中已假定流体的粘性系数 $\mu = 1$ 。根据我们考虑的问题的性质，可以提出边界条件如下：

1. 在固体表面，包括小球表面 $\mathbf{u} = 0$ 。
2. 在离中心足够远处 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R_0 \gg a$ 的主流体上，流动参数服从公式(2.1)。
3. 在离接口足够远的支管远处 $z = -h, h \gg a, \mathbf{u} = 0$ 。

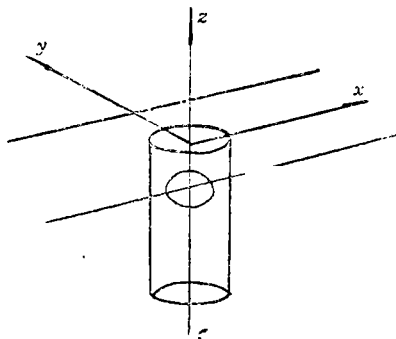


图1 坐标系

## 三、变数更换

用极坐标 $(r, \theta)$ 代替直角坐标 $(x, y)$ ，令

$$\left. \begin{aligned} u_r &= U(r, z) \cos \theta \\ u_\theta &= V(r, z) \sin \theta \\ u_z &= W(r, z) \cos \theta \\ p &= -P(r, z) \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

代入方程组(2.2)，可得：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{2(U+V)}{r^2} + \frac{\partial P}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{2(U+V)}{r^2} - \frac{P}{r} &= 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{W}{r^2} + \frac{\partial P}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{(U+V)}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

方程中 $\theta$ 不再出现, 即此三维流动问题可用二维数学问题来处理. 令 $Q=U+V$ , 则(3.2)式可改写为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{2Q}{r^2} + \frac{\partial P}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{4Q}{r^2} + \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{P}{r} &= 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{W}{r^2} + \frac{\partial P}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{Q}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

相应的边界条件为: 在固壁上

$$U=Q=W=0 \quad (3.4a)$$

在 $\rho=R_0, z \geq 0$ 处

$$\left. \begin{aligned} U &= z \\ Q=W=P &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4b)$$

在 $z=-h$ 上

$$U=Q=W=0 \quad (3.4c)$$

令 $u, q, w, p$ 为 $U, Q, W, P$ 的虚位移. 定义内积 $(\alpha, \beta)$ 为

$$(\alpha, \beta) = \int \alpha \beta r dr dz \quad (3.5)$$

于是, 我们有泛函 $J$ 的变分 $\delta J$

$$\begin{aligned} \delta J &= -((4.1), u) - ((4.2), q) - ((4.3), w) - ((4.4), p) \\ &= (U_r, u_r) + (Q_r, q_r) + (W_r, w_r) + (U_z, u_z) + (Q_z, q_z) \\ &\quad + (W_z, w_z) + (U_r, p) + (W_z, p) + (P, u_r) + (P, q_r) + (P, w_z) \\ &\quad + \left(\frac{2}{r^2} Q, u\right) + \left(\frac{4}{r^2} Q, q\right) + \left(\frac{1}{r^2} W, w\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{r} Q, p\right) + \left(\frac{2}{r} P, q\right) + \left(\frac{1}{r} P, u\right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中下标代表偏微商.

## 四、算例和算法

本算例采用下列参数:

$$\left. \begin{array}{l} a=2.5 \\ b=2 \\ R_0=4 \\ h=5 \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

单元划分和有限元计算全部采用文献[6]提供的《有限元程序自动生成系统》，单元采用满足LBB稳定性条件的九节点单元（即 $U, Q, W$ 采用双二次， $P$ 采用双一次形函数），如图2所示。

## 五、计算结果和讨论

我们先试算无小球的情况，所得流场如图3。

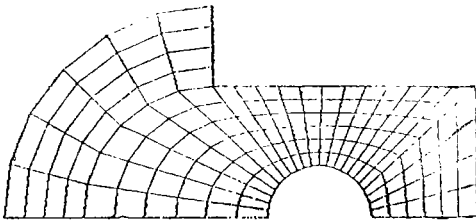


图2 有限单元分布

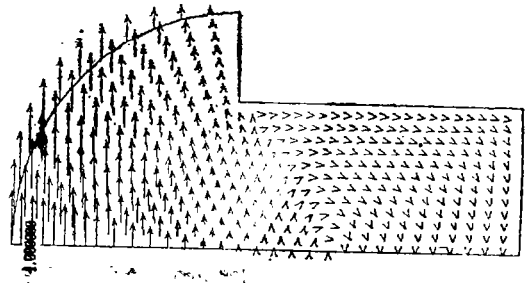


图3 无小球时的速度矢量图

它与文献[1]的结果相同。然后计算有小球的情况，得子午面上的流场分布( $U, W$ )如图4，而压力 $P$ 的等值线图如图5。

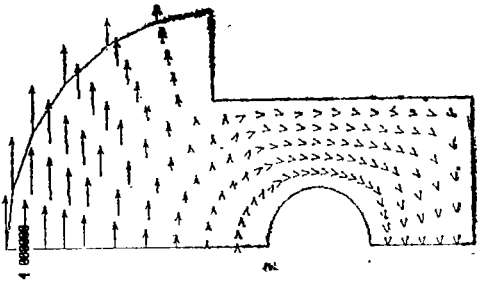


图4 有小球时的速度矢量场

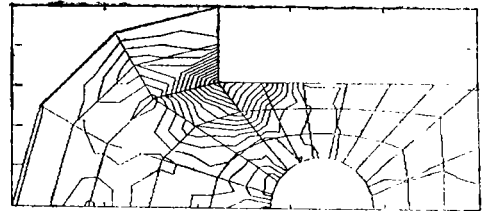


图5 压力参数 $P$ 的等值线图

在计算中因为利用了文献[6]的软件，只花很少的时间即可完成如此复杂的流体运动计算。原则上说，如采用文献[4]的相似单元，计算工作量可以大大减少。但文献[6]的程序自动化促使我们选择增加计算机时而节省我们珍贵的脑力劳动。

## 参 考 文 献

- [1] O. R. Tutty, Flow in a tube with a small side branch, *J. of Fluid Mech.*, 191(1988), 79—109.
- [2] Y. C. Fung et al., *Biomechanics*, Prentice-Hill (1972).
- [3] Dagan Z. et al., An finite series solution for the creeping motion through an orifice of finite length, *J. of Fluid Mech.*, 115(1982), 505—523.
- [4] Y. S. Chen et al., The Stokes flow in an orifice with an particle at its axis, *Chinese J. of Comp. Phys.*, 5(1)(1988), 9—15.
- [5] W. Y. Wu et al., Shear flow over a wall with suction and its application to particle screening, *J. Fluid Mech.*, 243(1992), 489—518.
- [6] Liang G. P., Finite element program senerator and finite element language, *Advances in Mechanics*, 20(2)(1990), 199—204.
- [7] D. M. Zhang et al., Similar element method in fluid mechanics, *Scientia Sinica, Ser. A.*, (7)(1986), 719—725.

**Shearing Flow near a Bypass with a Ball in it**

Chen Yaosong    Ma Xinming

(Dept. of Mechanics, Peking Univ., Beijing 100871, P.R. China)

Liang Gouping    Dai Ming

(Inst. of Math. Academy Sinica, Beijing 100080, P.R. China)

**Abstract**

This article contributes to the variation of a shearing flow near the entrance of a bypass with a ball in it. In order to fit more complicated geometry, the finite element method is used. Especially, the Automatic FEM Code Composition System is used. It reduces the computing work tremendously.

**Key words** Stokes flow filtration, atherosclerosis