

变热特性参数条件下肋片温度 周期性变化的传热研究*

杨翔翔¹ 何宏舟^{1,2}

(刘人怀推荐, 1993年10月24日收到)

摘 要

本文研究了变热特性参数下, 根部温度作周期性变化的肋片传热情况。应用摄动法求解控制微分方程; 并且采用打靶法和叠加原理进行数值计算, 求解过程是嵌进的、非迭代的。

对某种形状的肋片而言, 当肋片根部温度作周期性变化时, 其传热过程受以下几个参数的影响: E ——导热系数的温度系数; N ——肋片传热的特性参数; ε ——温度波动的幅度参数; B ——温度波动的频率; 以及对流系数的变化模式等。文中给出了这些参数变化时对肋片的温度分布及热流率、肋效率等的影响情况。所得结果, 不但具有理论价值, 而且对工程设计也有现实指导意义。

关键词 变热特性参数 摄动法 叠加原理

符 号

a	热扩散率, $k_a/\rho c$;	T_a	环境温度;
B	肋片温度波动的频率参数, $\rho c \omega L^2/k_a$;	T_b	肋根温度;
b	肋根半厚度;	$T_{b,m}$	肋根温度平均量;
c	肋片材料的热容;	t	无量纲时间参数, $\alpha \tau/L^2$;
E	导热系数参数, $\beta(T_{b,m}-T_a)$;	X	无量纲轴向距离, x^2/L^2 ;
$f(X)$	对流换热系数 h 所依赖的函数;	x	轴向距离;
g	无量纲参数, $\text{tg} \alpha L/b$;	Y	无量纲肋片厚度, y/b ;
h	对流换热系数;	y	肋片厚度;
h_b	肋根处的对流换热系数;	α	梯形肋片倾角;
k	肋片的导热系数;	τ	时间变量;
k_a	肋片在环境温度下的导热系数;	ρ	肋片材料密度;
L	肋高;	ε	温度波动的幅度参数;
N	肋片传热的特性参数, $(h_b L^2/K_a \cdot b \cos \alpha)^{1/2}$;	β	导热系数随温度变化的关系系数;
q	单位长度肋片的热流率;	ω	肋根温度的波动频率;
Q	无量纲热流率;	η	肋效率;
T	肋片温度场温度;	$\bar{\eta}$	肋片一个周期中的平均肋效率;

* 国务院侨办重点学科科研基金资助项目

1 华侨大学, 福建泉州 362011

2 厦门集美大学水产学院食工系, 福建厦门 361016

θ	无量纲温度, $(T-T_a)/(T_{bm}-T_a)$;	λ	待定系数;
θ_0	零阶近似量;	μ	待定系数;
θ_1	一阶近似量;	ψ_0	关于 X 的函数, 构成 θ_2 的函数之一;
θ_2	二阶近似量;	ψ_1	关于 X 的函数, 构成 θ_2 的函数之一;
ϕ	关于 X 的复函数;	ψ_2	关于 X 的函数, 构成 θ_2 的函数之一;
ϕ_1	ϕ 的实部;	r	待定系数;
ϕ_2	ϕ 的虚部;		

一、引 言

文[1]讨论了梯形肋片肋根温度随时间作周期性变化时的传热情况,然而忽略热特性参数变化对肋片传热带来的影响。在大多数工程实际使用中,肋片的导热系数是温度的函数,而与外界环境的对流换热系数则是肋片位置的函数。特别是,对于瞬态传热的肋片,肋片中温度场的变化往往会导致导热系数有较大的波动^[2];如果在设计中忽略了温度变化的影响,则会给使用效果带来较大的偏差。因此,本文的研究将基于前文,把导热系数和换热系数随温度和位置变化的情况考虑进来,从而使研究的结果更接近于实际应用的模型,因而更具有现实指导意义。

二、分 析

不失一般性,研究中作如下假定:

- (1) 导热系数 k 是温度的线性函数,写成 $k=k_a \cdot [1 + \beta \cdot (T - T_a)]$;
- (2) 换热系数 h 是肋片位置的函数,即 $h=h_b \cdot f(x)$;
- (3) 肋根温度按余弦规律作周期性变化, $T_b - T_{bm} = (T_{bm} - T_a) \cdot \varepsilon \cdot \cos \omega \tau$;
- (4) 肋片自由端为绝热条件, $\partial T / \partial x = 0$;
- (5) 一维传热,且不考虑辐射因素的影响。

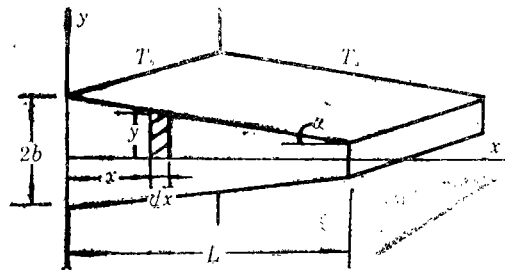


图1 梯形截面直肋传热示意图

肋片为梯形截面,其几何尺寸如图1所示。根据上述假定,其瞬态传热控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \cdot y \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \frac{h(T - T_a)}{\cos \alpha} = \rho \cdot c \cdot y \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2.1)$$

无量纲化后,可得

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[Y \cdot (1 + E\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] - N^2 f(X) \cdot \theta = Y \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.2)$$

边界条件为

$$\begin{aligned} X=0, \theta &= 1 + \varepsilon \cos Bt \\ X=1, \partial\theta/\partial X &= 0 \end{aligned}$$

对梯形肋片而言, 有

$$Y = 1 - g \cdot X \quad (2.3)$$

三、求 解

应用小参数扰动法即摄动法求解式 (2.2)。由于 $\varepsilon < 1$, 可假定式 (2.2) 存在有形如式 (3.1) 的组合解

$$\theta(X, t) = \theta_0(X) + \varepsilon^1 \cdot \theta_1(X, t) + \varepsilon^2 \cdot \theta_2(X, t) \quad (3.1)$$

在实际应用中, ε 一般很少大于 0.2, 因此式 (3.1) 中可略去 ε 的高阶项而不致于影响 $\theta(X, t)$ 解的精度。

把式 (3.1) 代入式 (2.2), 合并同类项, 整理后可得

$$\varepsilon^0: \frac{d}{dX} \left[Y \cdot (1 + E\theta_0) \cdot \frac{d\theta_0}{dX} \right] - N^2 f(X) \cdot \theta_0 = 0 \quad (3.2)$$

$$X=0, \theta_0=1; \quad X=1, \theta_0=0$$

$$\varepsilon^1: \frac{\partial}{\partial X} [Y \cdot (\theta_1 + E\theta_0 \cdot \theta_1)'] - N^2 \cdot f(X) \cdot \theta_1 = Y \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$X=0, \theta_1 = \cos Bt; \quad X=1, \frac{\partial \theta_1}{\partial X} = 0$$

$$\varepsilon^2: \frac{\partial}{\partial X} \left[Y \cdot \left[E\theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} (\theta_2 + E\theta_0 \theta_2) \right] \right] - N^2 \cdot f(X) \cdot \theta_2 = Y \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$X=0, \theta_2=0; \quad X=1, \frac{\partial \theta_2}{\partial X} = 0$$

下面来求解式 (3.2) ~ (3.4)。

首先, 求解式 (3.2)。由于式 (3.2) 所构成的是一个非线性二阶微分方程组的两点边值问题, 通常采用 Runge-Kutta 法结合 Newton-Raphson 打靶法对之进行数值求解。为此, 令

$$X_1 = \theta_0, \quad X_2 = Y \cdot (1 + E \cdot \theta_0) \cdot \frac{d\theta_0}{dX} \quad (3.5)$$

则式 (3.2) 可化为

$$\frac{dX_1}{dX} = X_2 / [Y \cdot (1 + EX_1)] = f_1(X, X_1, X_2) \quad (3.6a)$$

$$\frac{dX_2}{dX} = N^2 f(X) \cdot X_1 \quad (3.6b)$$

和

$$X=0, X_1=1; \quad X=1, X_2=0$$

于是, 用 Runge-Kutta 积分法结合 Newton-Raphson 打靶法联合求解式 (2.3) 和式 (3.6), 便可得到 $\theta_0(X)$ 在每一个离散点 X_i 上的解。

其次, 求解式 (3.3)。由于式 (3.3) 含有 $\cos Bt$ 项, 不妨设 $\theta_1(X, t)$ 有形如

$$\theta_1 = \text{Re}[\phi(X) \exp(iBt)] \quad (3.7)$$

的复函数解, 其中 $\text{Re}[\]$ 代表解的实部. 把式(3.7)代入式(3.3), 可得

$$\frac{d}{dX} \left\{ Y \cdot \frac{d}{dX} [\phi(X)(1+E\theta_0)] \right\} - [N^2 f(X) + iBX] \phi = 0 \quad (3.8)$$

和

$$X=0, \phi=1; \quad X=1, \phi'=0$$

由于式(3.8)中仍含有虚宗量 $iBX\phi$, 不妨再次分解 $\phi(X)$ 为

$$\phi(X) = \phi_1(X) + i \cdot \phi_2(X) \quad (3.9)$$

把式(3.9)代入式(3.8), 合并同类项后可得到两个新的方程组

$$\frac{d}{dX} \left\{ Y \cdot \frac{d}{dX} [\phi_1(1+E\theta_0)] \right\} - [N^2 \cdot f(X)\phi_1 - B \cdot X \cdot \phi_2] = 0 \quad (3.10)$$

$$X=0, \phi_1=1; \quad X=1, \phi_1'=0$$

和

$$\frac{d}{dX} \left\{ Y \cdot \frac{d}{dX} [\phi_2(1+E\theta_0)] \right\} - [N^2 \cdot f(X)\phi_2 + B \cdot Y \cdot \phi_2] = 0 \quad (3.11)$$

$$X=0, \phi_2=1; \quad X=1, \phi_2'=0$$

由于式(3.10)和(3.11)中的 ϕ_1, ϕ_2 相互耦合, 这就给应用有限差分法或准线性化技术求解带来很大的制约; 要么是求解过程十分繁琐, 要么是求解精度被大大地降低. 为此, 本文采用叠加原理求解, 可避免这些缺陷. 令

$$Z_1 = Y \cdot \frac{d}{dX} [\phi_1(1+E\theta_0)] \quad (3.12a)$$

$$Z_2 = Y \cdot \frac{d}{dX} [\phi_2(1+E\theta_0)] \quad (3.12b)$$

则由式(3.10)和(3.11)可得

$$\frac{dZ_1}{dX} = N^2 \cdot f(X)\phi_1 - BX\phi_2 \quad (3.13a)$$

$$\frac{dZ_2}{dX} = N^2 \cdot f(X)\phi_2 + BX\phi_1 \quad (3.13b)$$

又由式(3.12a)和(3.12b)可得

$$\frac{d\phi_1}{dX} = \frac{Z_1}{X} \cdot \frac{1}{1+E\theta_0} - \frac{E \cdot \theta_0'}{1+E\theta_0} \cdot \phi_1 \quad (3.13c)$$

$$\frac{d\phi_2}{dX} = \frac{1}{1+E\theta_0} \cdot \frac{Z_2}{X} - \frac{E}{1+E\theta_0} \cdot \frac{d\theta_0}{dX} \cdot \phi_2 \quad (3.13d)$$

如令

$$p(X) = 1/[Y \cdot (1+E\theta_0)], \quad q(X) = \frac{E}{1+E\theta_0} \cdot \frac{d\theta_0}{dX}$$

代入式(3.13), 可得

$$\frac{d\theta_1}{dX} = p(X) \cdot Z_1 - q(X)\phi_1 \quad (3.14a)$$

$$\frac{d\theta_2}{dX} = p(X) \cdot Z_2 - q(X)\phi_2 \quad (3.14b)$$

应用叠加原理^[3], 设 ϕ_1, ϕ_2, Z_1, Z_2 有形式(3.15)的非相关线性组合解

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \phi_{11} + \lambda \phi_{12} + \mu \phi_{13}, & \phi_2 &= \phi_{21} + \lambda \phi_{22} + \mu \phi_{23} \\ Z_1 &= Z_{11} + \lambda Z_{12} + \mu Z_{13}, & Z_2 &= Z_{21} + \lambda Z_{22} + \mu Z_{23} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

其中 λ 和 μ 均为待定系数。

把式(3.15)代入式(3.13), 合并同类项, 整理后可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi_{i1}}{dX} &= p(X) \cdot Z_{1i} - q(X) \phi_{1i}, & \frac{d\phi_{2i}}{dX} &= p(X) \cdot Z_{2i} - q(X) \phi_{2i} \\ \frac{dZ_{1i}}{dX} &= N^2 \cdot f(X) \phi_{1i} - BY \phi_{2i}, & \frac{dZ_{2i}}{dX} &= N^2 \cdot f(X) \phi_{2i} + BY \phi_{1i} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

式中 $i=1, 2, 3$ 。

为求解式(3.16), 可利用式(3.10)和(3.11), 并应这样来选取初值条件

$$\left. \begin{aligned} i=1, & \phi_{11}(0)=1, \phi_{21}(0)=0, Z_{11}(0)=0, Z_{21}(0)=0 \\ i=2, & \phi_{12}(0)=0, \phi_{22}(0)=0, Z_{12}(0)=1, Z_{22}(0)=0 \\ i=3, & \phi_{13}(0)=0, \phi_{23}(0)=0, Z_{13}(0)=0, Z_{23}(0)=1 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

于是, 由高阶微分方程组的 Runge-Kutta 积分方法^[4], 可以很方便地求解式(3.16)和(3.17)。值得一提的是, 求解过程中 $p(X_i)$ 和 $q(X_i)$ 的值是由前面式(3.6)求解时求得的。因此, 求解过程是互相嵌套的。又由于Runge-Kutta积分法是一步求解得到结果的, 所以, 求解过程又是非迭代的。

对于式(3.15)中的 λ 和 μ 之值可由另一个边值条件 $X=1$ 处的 ϕ_1^i 和 ϕ_2^i 的值来确定。由于

$$\left. \begin{aligned} \phi_1^i(1) &= \phi_{11}^i(1) + \lambda \phi_{12}^i(1) + \mu \phi_{13}^i(1) = 0 \\ \phi_2^i(1) &= \phi_{21}^i(1) + \lambda \phi_{22}^i(1) + \mu \phi_{23}^i(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

根据式(3.14a)和(3.14b), 有

$$\left. \begin{aligned} \phi_{11}^i(1) &= [p(X) \cdot Z_{11} - q(X) \phi_{11}]|_{X=1} \\ \phi_{12}^i(1) &= [p(X) \cdot Z_{12} - q(X) \phi_{12}]|_{X=1} \\ &\dots\dots \\ \phi_{23}^i(1) &= [p(X) \cdot Z_{23} - q(X) \phi_{23}]|_{X=1} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

式中, $\phi_{11}, \phi_{12}, \dots, \phi_{22}, Z_{11}, Z_{12}, \dots, Z_{23}$, 在 $X=1$ 处之值已由前面联解式(3.16)和(3.17)中求出, 而 $p(X), q(X)$ 在 $X=1$ 处的值也可由前面联解式(3.6a)和(3.6b)中求出。于是, 由式(3.19)便可求得 $\phi_{11}^i(1), \phi_{12}^i(1), \dots, \phi_{23}^i(1)$ 。再联解式(3.18), 便可求出 λ 和 μ 。所以可得

$$\lambda = \frac{\phi_{12}^i(1)\phi_{23}^i(1) - \phi_{21}^i(1)\phi_{13}^i(1)}{\phi_{13}^i(1)\phi_{22}^i(1) - \phi_{12}^i(1)\phi_{23}^i(1)} \quad (3.20)$$

和

$$\mu = \frac{\phi_{11}^i(1)\phi_{22}^i(1) - \phi_{21}^i(1)\phi_{12}^i(1)}{\phi_{13}^i(1)\phi_{12}^i(1) - \phi_{13}^i(1)\phi_{22}^i(1)} \quad (3.21)$$

这样, 式(3.10)和(3.11)的解为

$$\phi_1 = \phi_{11} + \lambda \phi_{12} + \mu \phi_{13}, \quad \phi_2 = \phi_{21} + \lambda \phi_{22} + \mu \phi_{23} \quad (3.22)$$

从而获得方程式(3.3)的解为

$$\theta_1(X, t) = \phi_1 \cos Bt - \phi_2 \sin Bt \quad (3.23)$$

最后, 求解式(3.4)。由于式(3.4)中含有 $\theta_1(\partial\theta_1/\partial X)$ 项, 由式(3.23), 有

$$\begin{aligned} \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial X} = & \frac{1}{2} (\phi_1 \phi_1^{\dot{}} + \phi_2 \phi_2^{\dot{}}) + \frac{1}{2} (\phi_1 \phi_1^{\dot{}} - \phi_2 \phi_2^{\dot{}}) \cos 2Bt \\ & - \frac{1}{2} (\phi_1 \phi_2^{\dot{}} + \phi_2 \phi_1^{\dot{}}) \sin 2Bt \end{aligned} \quad (3.24)$$

令

$$\left. \begin{aligned} A_1(X) &= \frac{1}{2} (\phi_1 \phi_1^{\dot{}} + \phi_2 \phi_2^{\dot{}}) \\ A_2(X) &= \frac{1}{2} (\phi_1 \phi_1^{\dot{}} - \phi_2 \phi_2^{\dot{}}) \\ A_3(X) &= \frac{1}{2} (\phi_1 \phi_2^{\dot{}} + \phi_2 \phi_1^{\dot{}}) \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

代入式(3.24), 可得

$$\theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial X} = A_1(X) + A_2(X) \cos 2Bt - A_3(X) \sin 2Bt \quad (3.26)$$

考察式(3.26)发现, 它是由一稳态项 $A_1(X)$ 和一波动项 $[A_2(X) \cos 2Bt - A_3(X) \sin 2Bt]$ 叠加起来的, 联系式(3.23), 不难猜想到 $\theta_2(X, t)$ 应有形如式(3.27)的解, 即

$$\theta_2(X, t) = \psi_0(X) + \psi_1(X) \cos 2Bt - \psi_2(X) \sin 2Bt \quad (3.27)$$

把式(3.26)和(3.27)代入式(3.4), 合并同类项, 整理后可得

$$\frac{d}{dX} \left[Y \cdot \frac{d}{dX} [\psi_0(1+E\theta_0)] \right] + E \cdot \frac{d}{dX} [Y \cdot A_1(X)] - N^2 f(X) \psi_0 = 0 \quad (3.28a)$$

$$\frac{d}{dX} \left[Y \cdot \frac{d}{dX} [\psi_1(1+E\theta_0)] \right] + E \cdot \frac{d}{dX} [Y \cdot A_2(X)] - N^2 f(X) \psi_1 + 2BY \psi_2 = 0 \quad (3.28b)$$

$$\frac{d}{dX} \left[Y \cdot \frac{d}{dX} [\psi_2(1+E\theta_0)] \right] + E \cdot \frac{d}{dX} [Y \cdot A_3(X)] - N^2 f(X) \psi_2 - 2BY \psi_1 = 0 \quad (3.28c)$$

边值条件是

$$X=0; \quad \psi_0=0, \quad \psi_1=\psi_2=0$$

$$X=1; \quad \psi_0^{\dot{}}=0, \quad \psi_1^{\dot{}}=\psi_2^{\dot{}}=0$$

为求解式(3.28), 我们必须再次求助于叠加原理. 以解式(3.28a)为例, 令

$$R(X) = E \cdot \frac{d}{dX} [Y \cdot A_1(X)], \quad Z(X) = Y \cdot \frac{d}{dX} [\psi_0(1+E\theta_0)]$$

因此可得

$$\frac{dZ}{dX} = N^2 f(X) \psi_0 - R(X) \quad (3.29a)$$

$$\frac{d\psi_0}{dX} = \frac{1}{1+E\theta_0} \cdot \frac{Z(X)}{Y} - \frac{E\theta_0^{\dot{}}}{1+E\theta_0} \psi_0 = p(X)Z - q(X)\psi_0 \quad (3.29b)$$

边值条件为

$$X=0, \quad \psi_0=0; \quad X=1, \quad \psi_0^{\dot{}}=0$$

为求解式(3.29a)和(3.29b), 根据叠加原理, 设

$$\psi_0 = \psi_{01} + \gamma \psi_{02}, \quad Z = Z_{01} + \gamma Z_{02} \quad (3.30)$$

可以这样来选取初值条件, 使得

$$\left. \begin{aligned} X=0, \psi_{01}=0, \psi_{02}=0 \\ X=0, Z_{01}=0, Z_{02}=1 \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

把式(3.30)代入式(3.29a)和(3.29b), 整理后可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ_{01}}{dX} &= N^2 \cdot f(X)\psi_{01} - R(X) \\ \frac{d\psi_{01}}{dX} &= p(X)Z_{01} - q(X)\psi_{01} \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ_{02}}{dX} &= N^2 \cdot f(X)\psi_{02} \\ \frac{d\psi_{02}}{dX} &= p(X)Z_{02} - q(X)\psi_{02} \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

由于 $R(X)$, $p(X)$ 和 $q(X)$ 在每个离散点 X_i 上之值已由前面求出, 于是按Runge-Kutta积分法求解式(3.31)、(3.32)和(3.33), 便可得 $\psi_{01}(X_i)$, $\psi_{02}(X_i)$, $Z_{01}(X_i)$ 和 $Z_{02}(X_i)$ 的值。则 γ 的值可由 $X=1$ 处的 ψ_{01} , ψ_{02} 和 Z_{01} , Z_{02} 的值确定

$$\gamma = -\psi_{01}'(1)/\psi_{02}'(1) \quad (3.34)$$

其中

$$\psi_{01}'(1) = [p(X)Z_{01} - q(X)\psi_{01}]|_{X=1}$$

$$\psi_{02}'(1) = [p(X)Z_{02} - q(X)\psi_{02}]|_{X=1}$$

则 $\psi_0(X)$ 的值便可由式(3.30)求得。

同样地, 应用叠加原理, 采用与前面求解 $\phi_1(X)$, $\phi_2(X)$ 和 $\psi_0(X)$ 完全相似的步骤, 联解式(3.28a)和(3.28b), 便可求出 $\psi_1(X)$ 和 $\psi_2(X)$ 的解。这样, $\theta_2(X, t)$ 的解可由式(3.27)确定。最后, 由式(3.1), 可得到沿肋片轴向的温度分布关系式

$$\begin{aligned} \theta(X, t) &= \theta_0(X) + \psi_0(X)e^2 + (\phi_1 \cos Bt - \phi_2 \sin Bt)e \\ &\quad + (\psi_1 \cos 2Bt - \psi_2 \sin 2Bt)e^2 + O(\varepsilon^3) \dots \end{aligned} \quad (3.35)$$

四、结果与讨论

1. 温度分布

数值计算结果表明, 在肋片任何相应位置上, $E > 0$ 情况时的 $\theta_0(X_i)$ 值总是大于 $E \leq 0$ 情况时的 $\theta_0(X_i)$ 值。对于如本文所研究的小 ε 值而言, 其净结果是使得在 $E > 0$ 情况下的 $\theta_0(X_i) + \psi_0(X)e^2$ 的值总是大于 $E \leq 0$ 情况下的 $\theta_0(X_i) + \psi_0(X)e^2$ 的值。这意味着, 如果肋片材料的导热系数随温度的增加而增大, 则引起肋片上各点的温度时间平均值增大。但是, 由于温度平均值的大小主要是由 $\theta_0(X)$ 决定的, 而 $\theta_0(X)$ 的求解受 N 值的影响远甚于受 E 值的影响, 故对于一定 N 值而言, E 值的变化对温度平均值的影响幅度并不大。

为了更好地解释 k 和 h 变化对温度分布造成的影响, 图2给出了在 $N=1.0$, $B=1.0$ 和 $\varepsilon=0.1$ 的情况下肋片上几个点的温度—时间关系曲线。其中图2(a)给出了对流换热系数是常数的情况, 图2(b)给出了对流换热系数是位置的指数函数的情况。由图看出, 无论是在 $X=0.5$ 处或 $X=1.0$ 处, 对于不同的 E , $\theta(X, t)$ 均随时间绕着各自的某个平均值作波动。与 $E=0$

时的 $\theta_0(X, t)$ 之值相比, $E > 0$ 情况下的 $\theta_+(X, t)$ 之值总是大于同一时刻之 $\theta_0(X, t)$ 之值, 而 $E < 0$ 情况下的 $\theta_-(X, t)$ 之值总是小于同一时刻 $\theta_0(X, t)$ 之值。

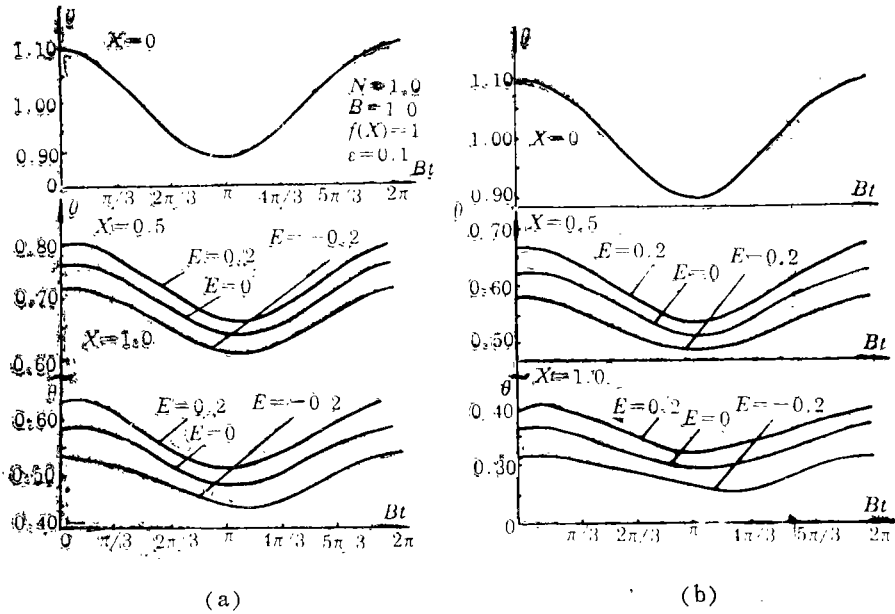


图2 肋片温度—时间关系

2. 热流率

定义无量纲热流率 Q 为

$$Q = q \cdot L / [k_a \cdot 2b \cdot (T_{dm} - T_a)]$$

无量纲化后可得

$$Q = -[1 + E\theta(0)]\theta'(0)$$

式中

$$\theta'(0) = \theta'_0(0) + \psi'_0(0)\epsilon^2 + [\phi'_1(0)\cos Bt - \phi'_2(0)\sin Bt]\epsilon + [\psi'_1(0)\cos 2Bt - \psi'_2(0)\sin 2Bt]\epsilon^2$$

为了更好地考察 Q 的变化规律, 图3、图4给出了 N , B , E 和 $f(X)$ 变化时对 Q 的影响情况。图3(a)给出了在 $B=1.0$, $f(X)=\exp(X)$, $\epsilon=0.1$ 和 $N=0.5$ 情况下, N 与 E 变化对 Q 的影响。由图3(a)可以看出, E 对 Q 的作用在 N 值较小时较弱。在 $N=0.1$ 时, $E=0.2$ 的 $Q-Bt$

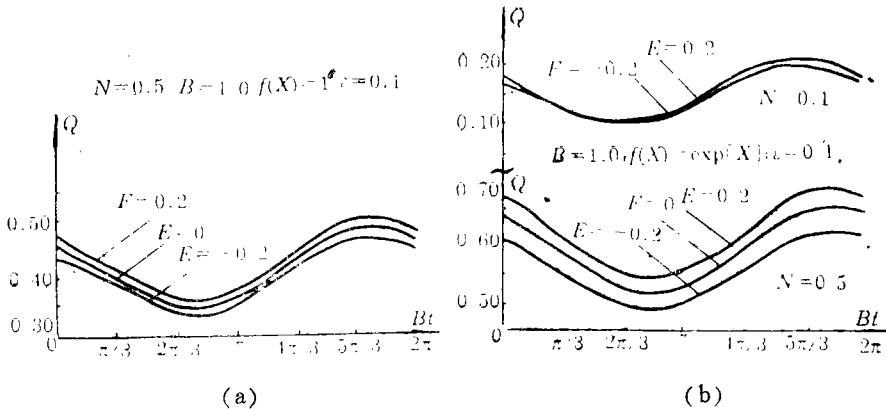


图3 肋片热流率—时间关系

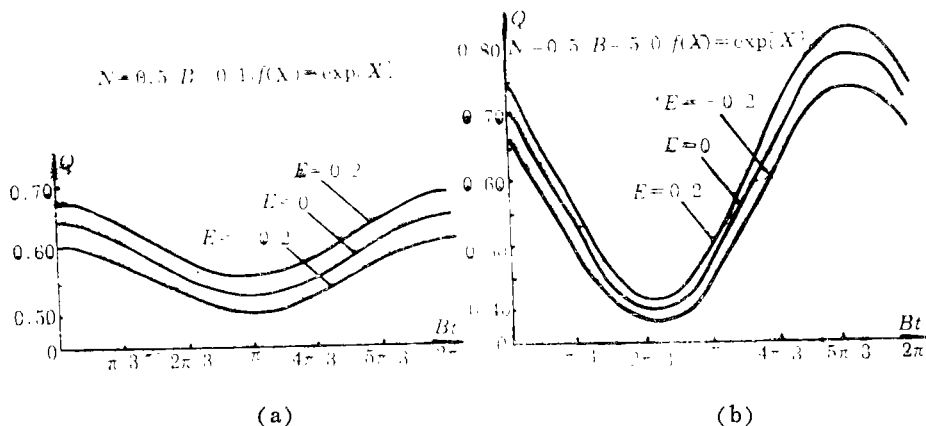


图4 肋片热流率—时间关系

曲线几乎与 $E=0$ 的 $Q-Bt$ 曲线重合，与 $E=-0.2$ 的 $Q-Bt$ 曲线也非常接近。随着 N 值的增大， E 值变化对 Q 影响变得明显。如果用 Q_+ 表示 $E>0$ 情况在某一时刻的热流率值， Q_0 表示 $E=0$ 情况的值，而 Q_- 表示 $E<0$ 情况的值，则无论 N 为何值，对于任何同一时刻，总存在有 $Q_+>Q_0>Q_-$ 的关系。这说明，对于导热系数随温度增加而增大的肋片，其向外排热量要较其它情况为大。

图4给出了在 $N=0.5$ ， $f(X)=\exp(X)$ 和 $B=5.0$ 情况下， E 变化对 Q 的影响。

3. 肋效率

肋效率定义为肋片实际散热量与假定整个肋片表面温度等于肋根温度时肋片向外的散热量之比，即

$$\eta = -\frac{1}{N^2} [1 + E\theta(0)] \theta'(0) / \left\{ [1 + \varepsilon \cos Bt] \int_0^1 f(X) dX \right\}$$

由于平均肋效率是衡量肋片传热效果好坏的更有意义的参量，因此本文仅讨论平均肋效率受肋根温度波动的影响。根据定义，平均肋效率为

$$\bar{\eta} = \frac{B}{2\pi} \int_0^{2\pi/B} \eta dt$$

整理后^[6]，有

$$\begin{aligned} \bar{\eta} = & -\frac{1}{\int_0^1 f(x) dx} \frac{1}{N^2} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + E \right) \theta'_0(0) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) \psi'_1(0) \right] \\ & + \frac{(1+E)\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \psi'_0(0) + (1+E) \left(\frac{2-\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 2 \right) \psi'_1 \end{aligned}$$

显然， $\bar{\eta}$ 值同时受参数 N ， B ， E ， ε 及函数关系 $f(X)$ 的制约。

图5给出了参数 N ， ε ， E 同时变化时对 $\bar{\eta}$ 的影响，可以看出， $\bar{\eta}$ 值随着 N 值增大而减小。当 N 值较小时， $\bar{\eta}$ 值变化较快；随着 N 值的增大， $\bar{\eta}$ 值变化趋缓。对于一定的 N ， B ， ε 值和 $f(X)$ 函数式而言， $E>0$ 所对应的 $\bar{\eta}$ 值总是大于 $E=0$ 所对应的 $\bar{\eta}$ 值；而 $E<0$ 所对应的 $\bar{\eta}$ 值总是小于 $E=0$ 所对应的 $\bar{\eta}$ 。这说明，采用导热系数随温度升高而增大的材料制成的肋片能够改善肋片的散热性能。

图6给出了参数 B ， E 和 ε 同时变化时对 $\bar{\eta}$ 的影响。在 ε 较小情况下， B 变化对 $\bar{\eta}$ 的影响不大，这种现象在 N 值较大时更为突出。随着 ε 的增大， B 变化对 $\bar{\eta}$ 的影响变得较为明显。

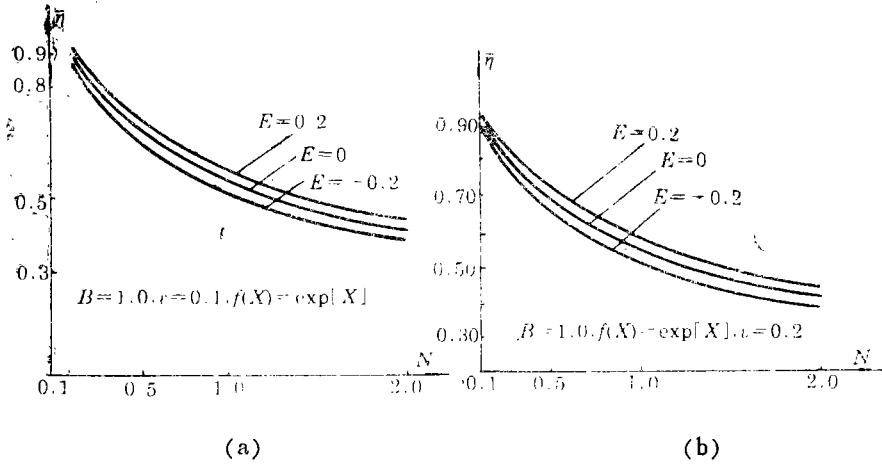


图5 N, ϵ, E 变化对 $\bar{\eta}$ 的影响

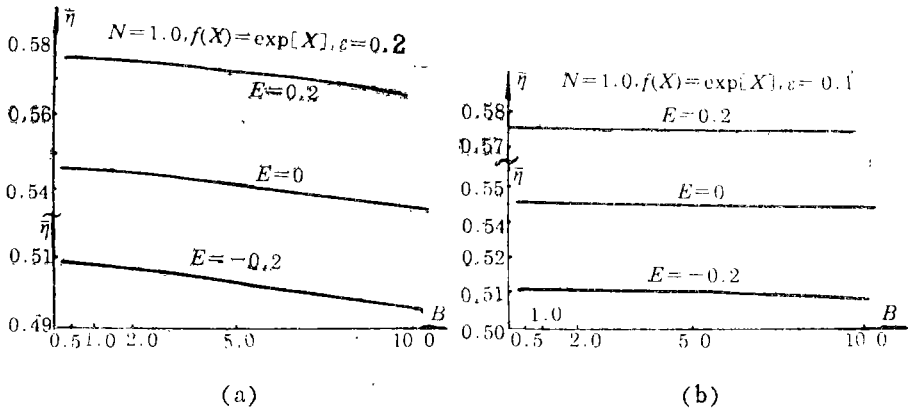


图6 B, ϵ, E 变化对 $\bar{\eta}$ 的影响

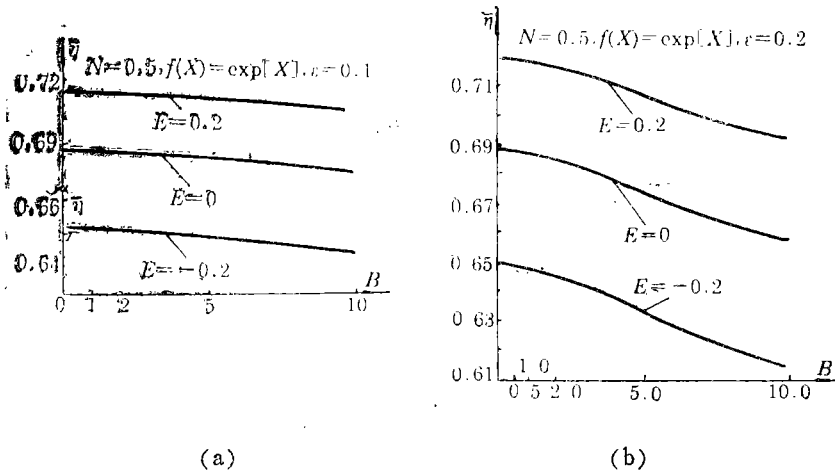


图7 B, ϵ, E 变化对 $\bar{\eta}$ 的影响

图7给出了当 $N=0.5$ 时的情况。这时 B 与 ϵ 变化对 $\bar{\eta}$ 的影响变得较为明显。 $\bar{\eta}$ 值随 B 值增大而减小，当 ϵ 较大时， $\bar{\eta}$ 值随 B 值增大而下降得更为迅速。

五、结 论

当热特性参数变化时,肋片的传热效果受4个参数即 N, B, ε , 和 E 一个函数 $f(X)$ 的控制。参数 B 是引起波动的主要因素。在变热特性参数情况下,参数 N 对波动的抑制效果受到削弱。

与定热特性参数的传热情况相比,对流换热系数的变化在一定程度上增强了传热效果。对于导热系数随温度增加而增大的肋片,其传热效果也得到增强;对于导热系数随温度增加而减小的肋片,其传热效果受到减弱。

对于其它形状的肋片传热,完全可以用相似于本文所介绍的方法对之进行计算求解,因此,本文的研究方法对于忽略辐射因素影响的肋片传热具有普遍的适用意义。

参 考 文 献

- [1] 杨翔翔、何宏舟,肋片温度周期变化的传热研究,中国工程热物理学会1993年学术年会征文(1993)。
- [2] A. Aziz and T. Y. Na, Periodic heat-transfer in fins with variable thermal parameters, *Journal of Heat & Mass Transfer*, 24(8) (1981), 1397—1404.
- [3] T. Y. Na, *Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems*, Academic Press, New York (1979), 13—28.
- [4] M. K. Jain, *Numerical Solutions of Differential Equations*, Halstaed Press (1979), 77—81.
- [5] 郭大钧等,《大学数学手册》,山东科学技术出版社(1985),180—195.

Periodic Heat Transfer in the Fins with Variable Thermal Parameters

Yang Xiangxiang He Hongzhou*

(Department of Mechanical-Engineering, Huaqiao University,
Quanzhou, Fujian 362011, P. R. China)

* (Department of Food Engineering, Xiamen Fisheries
College, Xiamen 361016, P. R. China)

Abstract

A study is made on the periodic heat transfer in the fins with variable thermal parameters. The method of small parameter perturbation is adopted. Numerical calculation is solved noniteratively by shooting method and superposition method. For a fin of certain shape with periodic change of fin base temperature, the heat transfer is influenced by the following parameters, E —temperature function in relation to coefficient of thermal conductivity, N —characteristic parameter of finned heat transfer, ε —amplitude parameter of temperature fluctuation, B —frequency parameter of temperature fluctuation of the fin, and the changing pattern of convective coefficient. The influences of these parameters on temperature distribution, heat-flow rate, and fin efficiency are discussed. In addition to theoretical significance, the results are of practical significance for engineering design.

Key words variable thermal parameters, perturbation, principle of superposition