一类吸引子的语法复杂性*

卢 钦 和[1]

（戴世强推荐，1993年9月10日收到）

摘 要

本文研究了Feigenbaum吸引子和周期窗口中Feigenbaum 吸引子决定的形式语言，讨论了它们的语法复杂性。证明了这类吸引子都是 ET0L语言，从而是上下文有关语言(CSL)；而不是上下文无关语言(CFL)。

关键词 形式语言 揉序列 复杂性

一、一些概念和记号

这里我们先叙述本文涉及的一些概念和记号。

设f是区间$I=[a,b]$上的单峰映射，c是f在I上唯一的临界点。c将I分为$I_1=[a,c)$，$I_2=(c,b]$两个子区间。当$x=c$时记为c，当$x\in I_1$时记为0，$x\in I_2$时记为1。这样任一条轨道就可以表示为$\Sigma=\{0,1\}$上的一个符号序列。

设s是Σ上的任一有限符号字，$|s|$表示s的长度。长度为0的符号字记为λ。如果$s=uwv$称u是s的前缀，v是s的后缀。u,v和w都是s的子字。

记 $S=\{s|s=(s_1s_2\cdots s_n\cdots),\ s_n\in\Sigma,n\geqslant1\}$

定义S上的移位算子σ，若$s=(s_1s_2\cdots s_n\cdots)$，则

$$\sigma(s)=(s_2s_3\cdots s_n\cdots),\qquad \forall s\in S$$

在S上可以引入序关系$=$，$<$ 和 $>$，首先让$0<1$。对$\forall s$，$t\in S$，$s=(s_1s_2\cdots s_n\cdots)$，$t=(t_1t_2\cdots t_n\cdots)$设$s\neq t$，$s_i=t_i,1\leqslant i\leqslant n-1$，$s_n\neq t_n$。如果$s_1\cdots s_{n-1}$中含偶数个1，那么当$s_n<t_n$时$s<t$。如果$s_1\cdots s_{n-1}$中含有奇数个1，那么当$s_n<t_n$时$s>t$。如果对 $\forall i\geqslant1$，$s_i=t_i$，则称$s=t$。

从$f(c)$出发的轨道对应的符号序列叫作揉序列（kneading sequence），简记为KS。KS是移位最大的，即$\sigma^i(KS)\leqslant KS$[1]，$\forall i\geqslant1$。对任意$x\in I$，从$f(x)$出发的轨道对应的符号序列s一定满足

$$\sigma^i(s)\leqslant KS,\qquad \forall i\geqslant1$$

对于一维单峰映射，它的动力学行为完全由KS决定。

定义1.1 $s\in S$，如果满足

$$\sigma^i(s)<KS,\qquad \forall i\geqslant1$$

* 本文得到国家攀登项目“非线性科学”基金的资助。
1 苏州大学数学系，苏州 215006

则称s是允许字.

对于给定的KS，我们定义形式语言[2]

$$L=\{w\in\Sigma^* \mid w\text{是}KS\text{或者允许字}s\text{的有限子字}\}$$

下面称L是由KS决定的语言.

二、Feigenbaum吸引子的KS和语言结构

Feigenbaum吸引子是一维单峰系统的重要情况，对它曾作过大量的研究工作[1,3,4]. 本节中我们讨论它的KS的性质和由KS决定的语言的结构.

定义2.1 同态h: $\Sigma^*\to\Sigma^*$定义如下($\Sigma=\{0,1\}$)

$$h(\lambda)=\lambda,\ h(0)=11,\ h(1)=10$$
$$h(xy)=h(x)h(y),\qquad \forall x,y\in\Sigma^*$$

定义2.2 记$t_0=1$，递推地定义Σ上的符号字序列$\{t_n\}$:

$$t_0=1,\ t_n=h(t_{n-1})\qquad \forall n\geqslant 1$$

写出$\{t_n\}$的前几项$t_0=1$，$t_1=10$，$t_2=1011$，$t_3=10111010$. 对符号字$s=(s_1\cdots s_n)$，定义$\hat{s}=(s_1\cdots\hat{s}_n)$. 即$\hat{s}$是由$s$将最后一个符号$s_n$取共轭($s_n=1$则$\hat{s}_n=0$; $s_n=0$则$\hat{s}_n=1$)得到的符号字. 从上面的例子可以看出$t_n=t_{n-1}\hat{t}_{n-1}$.

用这样的记号Feigenbaum吸引子的揉序列t_∞可以看成是$\{t_n\}_{n\geqslant 0}$的极限. t_∞是一个无限字，它的长度为2^n的前缀就是t_n，$n\geqslant 0$.

引理2.1 $t_\infty=h(t_\infty)$

这从h的定义就可以看出. 引理表明t_∞是h的不变量.

引理2.2 设$a_n\in\Sigma$是t_∞的第n个符号，(即$t_\infty=a_1a_2\cdots a_n\cdots$)对任意整数$k\geqslant 0$,

$$a_{2^k(2n+1)}=\begin{cases}1, & k\text{是偶数}\\ 0, & k\text{是奇数}\end{cases}$$

这里$n\geqslant 0$.

证明 对k进行归纳. 如果$k=0$，从$h(a_{n+1})=a_{2n+1}a_{2n+2}(n\geqslant 0)$和$h(0)=11$，$h(1)=10$知结论成立.

归纳假设引理对$k-1$成立. 从关系

$$h(a_{2^{k-1}(2n+1)})=a_{2^k(2n+1)-1}\,a_{2^k(2n+1)}$$

和$h(0)=11$，$h(1)=10$可见对k引理成立. □

引理2.3 t_∞不以1111作为它的子字.

证明 由引理2.2，当$k=0$，$t_\infty=a_1a_2\cdots a_n\cdots$中$a_{2n+1}(n\geqslant 0)$等于1，则$t_\infty$不以00作为子字. 反设$t_\infty=u1111v$，不失一般性可以假设$|u|$是偶数. 这样从$t_\infty=h(t_\infty)$，$h(0)=11$知如果$t_\infty=u1111v$，则$t_\infty$以00作为子字，得出矛盾. □

引理2.3的结论可以推广成下面的

引理2.4 t_∞不以$t_k^4(=t_kt_kt_kt_k)$，$k\geqslant 0$作为子字.

证明 反证法，设$t_\infty=ut_k^4v$，如果能够证明$|u|$是$|t_k|$的倍数，那么从$h^k(t_\infty)=t_\infty$，$h^k(1)=t_k$和引理2.3可知结论成立. 下面就证明$|u|$是$|t_k|$的倍数.

对k作归纳. 对$k=0$，结论已成立. 设对$k-1$已成立，讨论情况k. 如$t_\infty=ut_kv'$，将它重

写为$t_\infty=ut_{k-1}\hat{t}_{k-1}v'$．由归纳假设，可见$|u|$是$|t_{k-1}|(=2^{k-1})$的倍数．如果$|u|$是$|t_{k-1}|$的偶数倍，则问题已解决．否则设$|u|$是$|t_{k-1}|$的奇数倍．则可写出$t_\infty=u'u''t_{k-1}\hat{t}_{k-1}v'$，这里$|u'|$是$|t_k|$的倍数$|u''|=|t_{k-1}|$．

由于$t_\infty=\Pi t'_k$，t'_k等于t_k或$\hat{t}_k$．和$t_\infty=u''u't_{k-1}\hat{t}_{k-1}v'$作比较，$\hat{t}_kv'$也可以写成$\Pi t'_k$的形式．但$t_k$和$\hat{t}_k$都不以$\hat{t}_{k-1}$作为前缀，矛盾． □

推论 t_k中不含t_j^4，$j\leqslant k-2$，$\forall k\geqslant 2$．

引理2.2是t_∞的一个重要性质，利用该性质可以证明t_∞不是周期序列，也不是终结周期序列，即不存在y和x属于Σ^*，使得$t_\infty=yx^\infty$．

下面我们讨论由$KS=t_\infty$决定的语言K_1的结构．

对于任意$k\geqslant 0$，定义集合

$$N_k^+=\{\rho\mid\rho\in\Sigma^*,\ \rho>t_k\},\quad N_k^-=\{\rho\mid\rho\in\Sigma^*,\ \rho<\hat{t}_k\}$$

引理2.5 设s是允许字，那么$\forall\rho\in N_k^+$，ρ不是s的子字．

这个结论可从允许字的定义直接得到．

引理2.6 设s是允许字，$s=t_kv$，则v不以$\forall\rho\in N_k^-$为前缀．

这个结论也是明显的．利用引理2.5和引理2.6用归纳法可以证明

引理2.7 设s是允许字，$s=t_k\rho_1\rho_2\cdots\rho_mv$．这里$|\rho_i|=|t_k|=2^k$，$i=1,\cdots,m$，那么$\rho_i=t_k$或$\hat{t}_k$．

定义2.3 称下列形式的串为正规串

$$u=t_{-1}^{n_{-1}}t_0^{n_0}t_1^{n_1}t_2^{n_2}\cdots t_l^{n_l}$$

这里$t_{-1}=0$，n_i是非负整数$i=-1,0,\cdots,l$．l可以是∞，如果$l<\infty$那么$n_l=\infty$．

显然如果u是正规串，那么u是允许的．结合引理2.7，有下面的结论：

K_1中的字一定具有形式

$$w=uP(t_k)\qquad k\geqslant 0$$

这里u是正规串，$P(t_k)$表示t_k的真前缀．

三、语言K₁的复杂性

设$t=s_1s_2\cdots s_n\in\Sigma^*$是有限字．我们定义循环移位$\sigma(t)=s_2s_3\cdots s_ns_1$．记$t,\sigma(t),\cdots,\sigma^{n-1}(t)$中最大的为$M(t)$（循环移位最大字）．

关于$M(t)$有下面的结论[1]，

1) $t_k=M(t_k)$，$\forall k\geqslant 0$；且$t_k>\sigma^i(t_k)$，$1\leqslant i\leqslant 2^k-1$

2) 如果$t=M(t)$，且t^∞不等于0^∞或t_k^∞，$k\geqslant 0$，那么

$$t^\infty>t_k^\infty,\qquad\forall k\geqslant 0$$

注意到$t_0^\infty<t_1^\infty<\cdots<t_k^\infty<\cdots<t_\infty$，很容易证明下面的

引理3.1 如果$x^i\in K_1$，$\forall i\geqslant 1$．$|x|\geqslant 1$则存在$k\geqslant -1$，$n_k\geqslant 1$使$M(x)=t_k^{n_k}$．

下面讨论K_1的语法复杂性．我们先证明K_1不是Chomsky层次中的CFL[2]．这需要下面的Ogden引理．

Ogden 引理[5] 对每一上下文无关语法$G=(V,\ \Delta,\ P,\ S)$存在正整数n使每一个字$z\in L(G)$，对任意n个或更多的指定位置，存在串u,v,w,x,y使得

1) $z=uvwxy$；

2)　$uv^iwx^iy \in L(G)$，$\forall i \geqslant 0$；

3)　w中至少含有一个指定位置；

4)　u和v或者x和y都含有指定位置；

5)　vwx至多含有n个指定位置。

定理3.1　语言K_1不是上下文无关语言(CFL)。

证明　反证法。设n是满足Ogden引理条件的整数。选择k使$2^{k-1}>n$，取

$$z=t_k^3 t_{k-1} \in K_1$$

设最后2^{k-1}个位置是指定位置。不妨设$|x| \neq 0$，否则只要考虑v即可，证明更容易。由于w中至少含有一个指定位置，所以$|x|<2^{k-1}$，又因为$x^i \in K_1$，$\forall i \geqslant 0$，由引理3.1 $M(x)=t_j^{n_j}$，这里$j \leqslant k-2$。不妨设$x=M(x)$。由于u,v,w中至少有一个含有一个完整的t_k。我们只要取适当的i使x^i中含有t_k，这样就和引理2.4的推论矛盾。实际上只要取$i=8 \cdot 2^k+1$，这时$|uv^iw\|=|uvw|+8 \cdot |v| \cdot 2^k$是$|t_j|$的倍数。由于$z$以$t_k$开头且$\hat{t}_k$后不能接$\hat{t}_k$，而$|x^i|>8 \cdot 2^k$所以$x^i$中含有$t_k$。

为了证明K_1是上下文有关语言，我们需要ET0L[6]的定义。

定义3.1　一个ET0L系统是一个四元组$G=(V,H,w,\Delta)$，这里w是起始元，V是字母表，$\Delta \subset V$是终结符，H是有限代换组成的有限集。$U(G)=(V,H,w)$是T0L系统。由G产生的语言

$$L(G)=L(U(G)) \cap \Delta^*$$

称为ET0L语言。

语言K_1可以分解为$K_1=L_1L_2L_3$，这里

$$L_1=\{0^m \mid m \geqslant 0\}$$

$$L_2=\{u \mid u\text{是正规串，且}n-1=0\}$$

$$L_3=\{v \mid v=P(t_k),\ k \geqslant 0\}$$

L_i分别是由下列G_i生成的ET0L语言，

$$G_1=\{\{0\},\{0 \to 0, 0 \to 0^2, 0 \to \lambda\},0\}$$

$$G_2=\{\{S,T,0,1\},\ H,\ S,\ \{0,1\}\}$$

这里

$$H=\{h_1,h_2\}$$

$$h_1=\{S \to \lambda, S \to S, S \to ST, T \to T, 0 \to 0, 1 \to 1\}$$

$$h_2=\{S \to S, T \to 1, 0 \to 11, 1 \to 10\}$$

$$G_3=\{\{B,0,1\},h_3,B,\{0,1\}\}$$

这里

$$h_3=\{B \to \lambda, B \to B, B \to 1, B \to 1B, 0 \to 11, 1 \to 10\}$$

四、周期窗口中Feigenbaum吸引子的语言

本节讨论周期窗口中Feigenbaum吸引子的$KS=s_\infty$，以及由s_∞决定的语言K_2的语法复杂性。

设wc是$\Sigma=\{0,1\}$上长度($|wc|=$)n的超稳定的周期字[7]，记

$$(wc)_+=\begin{cases} w1, & 若w中含有偶数个1 \\ w0, & 若w中含有奇数个1 \end{cases}$$

$(wc)_-=(\widehat{wc})_+$，即将$(wc)_+$最后一个符号取共轭得到的字。根据周期窗口定理$(wc)_+$和$(wc)_-$都是移位最大字，周期窗口可记为$((wc)_-,wc,(wc)_+)$。根据*合成律，周期窗口中Feigenbaum吸引子的KS可以记为

$$s_\infty=w*t_\infty$$

我们定义同态　$g:\Sigma^*\to\Sigma^*$，

$$g(\lambda)=\lambda,\quad g(1)=(wc)_+,\quad g(0)=(wc)_-$$

$$g(xy)=g(x)g(y),\qquad \forall x,y\in\Sigma^*$$

这样s_∞也可以表示为

$$s_\infty=g(t_\infty)=g(h^\infty(1))$$

从g的定义容易看出，g具有如下性质：

1．g保持奇偶性；

2．g保序(即$x_1\leqslant x_2$，那么$g(x_1)\leqslant g(x_2)$)。

为讨论K_2的结构，和第二节相仿，我们定义集合

$$N^+=\{\rho|\rho\in\Sigma^*,\ \rho>(wc)_+\}$$

$$N^-=\{\rho|\rho\in\Sigma^*,\ \rho<(wc)_-\}$$

引理4.1　若s是允许字，$s=(wc)_+\rho_1\rho_2\cdots\rho_k v$，$|\rho_i|=|(wc)_+|=n$，$i=1,\cdots,k$。那么$\rho_i$只可能是$(wc)_+$或者$(wc)_-$。

证明　显然，$\forall i$，$\rho_i\notin N^+$。又由于$(wc)_+$为奇，用归纳法易得$\forall i$，$\rho_i\notin N^-$。可见ρ_i只有$(wc)_+$和$(wc)_-$两种可能。□

引理4.2　若$x\in K_1$，那么$g(x)\in K_2$。

这从g的保序性，以及$(wc)_+$，$(wc)_-$是移位最大字立即得到。

记由$(wc)_-^\infty$决定的语言为K_3。从K_3的定义立即得到

引理4.3　$x\in K_3$ iff $\sigma^i(x)\in N^-\cup\{(wc)_-\}$，$\forall\geqslant i0$。

利用这三个引理，立即得到

定理4.1　$s\in K_2$ iff $s=uvP((wc)_+)$。这里$u\in K_3$，$P((wc)_+)$是$(wc)_+$的真前缀，且存在以1开头的$x\in K_1$，使$v=g(x)$。

下面讨论K_2的语法复杂性。

定理4.2　K_2不是CFL。

证明　因为CFL在逆同态下封闭[2]，而$g^{-1}(K_2)=K_1$不是CFL。因此K_2不是CFL。□

由于ET0L语言类关于连接和同态封闭．且各语言类之间有下面的包含关系[6]

$$\mathscr{L}\{RG\}\subset\mathscr{L}\{\mathrm{CFL}\}\subset\mathscr{L}\{\mathrm{ET0L}\}\subset\mathscr{L}\{\mathrm{CSL}\}$$

这样从K_3是正规语言，K_1是ET0L以及由所有$(wc)_+$的真前缀组成的有限语言也是正规语言就可推知K_2是ET0L语言，从而是CSL．这就得到了

定理4.3　K_2是CSL。

参考文献

[1] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd edition, Addison-Wesley, Reading (1989).

[2] J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, Addison-Wesley, Reading (1979).

[3] P. Collet and J. P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, Boston (1980).

[4] M. J. Feigenbaum, Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.*, **19** (1978), 25—52.

[5] W. Ogden, A helpful result for proving inherent ambiguity, *Math. Systems Theory*, **2** (1968), 191—194.

[6] G. Rozenberg and A. Salomaa, *The Mathematical Theory of L Systems*, Academic Press, N. Y. (1980).

[7] B. L. Hao, *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative System*, World Scientific, Singapore (1989).

On Grammatical Complexity of a Class of Attractors

Lu Qinhe

(*Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou* 215006, *P. R. China*)

Abstract

In this paper we discuss the grammatical complexity of the Feigenbaum attractor and the Feigenbaum attractors in windows. We prove that the languages of these attractors are not a context-free language (CFL) but a context-sensitive one (CSL).

Key words formal language, kneading sequence, complexity