应用数学和力学，第17卷 第3期（1996年3月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Banach 空间中的两点边值问题*

王志华[1]　　张凤祥[2]

（张石生推荐，1995年7月22日收到）

摘　　要

本文在可分 Banach 空间中研究带线性分离边值条件的二阶微分包含，在较弱的条件下证明了解的存在性，由此可以得到二阶微分方程的边值问题若干解的存在性定理的推广形式。

关键词　边值问题　微分包含　非紧性测度　不动点

一、主 要 结 果

设E是实 Banach 空间，$I=[a,b]\subset R$，f：$I\times E\times E\to E$，c_i，$d_i\in R, x_i\in X\,(i=1,2)$。Chandra, Lakshmikantham, Mitchell[1]首先研究了以下形式的 Banach 空间中二阶微分方程的边值问题

$$x''=f(t,\ x,\ x') \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &c_1x(a)-d_1x'(a)=x_1\\ &c_2x(b)+d_2x'(b)=x_2\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

所用工具是 Sadovskii 不动点定理，此后，Mönch[2]利用 Daher 的方法得到 Sadovskii 不动点定理的推广，由此推广和改进了[1]中关于(1.1)，(1.2)解的存在性结果，[1]与[2]中存在性定理的主要区别是对f一致连续性条件的降低。

在本文中，我们将研究如下形式的二阶微分包含系统的边值问题

$$x''\in F(t,\ x,\ x') \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &c_1x(a)-d_1x'(a)=x_1\\ &c_2x(b)+d_2x'(b)=x_2\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

其中　F：$I\times E\times E\rightrightarrows E$是多值映象。利用多值映象的不动点方法和非紧性测度，我们证明了以下的存在性定理

定理1　设E是实可分的 Banach 空间，$I=[a,\ b]\subset R$，F：$I\times E\times E\rightrightarrows E$取非空闭凸值，且满足

（1）　$F(t,\ x,\ y)$关于t可测，关于(x,y)上半连续，

（2）　$\|F(t,x,y)\|\leqslant L_1(t)\|x\|+L_2(t)\|y\|+L_3(t)$，

* 国家自然科学基金资助课题。

1 兰州大学数学系，兰州 730000。2 山东经济学院，济南 250014。

$L_1(\cdot)$，$L_2(\cdot)\in L^1(I;\ E)$，$L_3(\cdot)\in C(I;\ R_+)$，

（3） $\beta(F(t,\ A,\ B))\leqslant L_1(t)\beta(A)+L_2(t)\beta(B)$，其中$\beta$是 Hausdorff 非紧性球测度，$A$，$B\subset E$是有界集，

（4） 算子H的谱半径$\rho(H)<1$，其中 H：$C(I;\ R)^2\to C(I;\ R)$定义为

$$H(\psi,\bar{\psi})=\left(\int_a^b|G(t,s)|[L_1(s)\psi(s)+L_2(s)\bar{\psi}(s)]ds,\right.$$

$$\left.\int_a^b|\partial_t G(t,s)|[L_1(s)\psi(s)+L_2(s)\bar{\psi}(s)]ds\right) \tag{1.5}$$

其中 $G(t,s)$是以下系统的 Green 函数

$$\left.\begin{aligned}&x''(t)=b(t)\\&c_1x(a)-d_1x'(a)=0\\&c_2x(b)+d_2x'(b)=0\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

则边值问题(1.3)、(1.4)必存在解。

在定理1中取$F=f$：$I\times E\times E\to E$，我们得到

定理2 设E是实 Bansch 空间，$I=[a,b]\subset R$，f：$I\times E\times E\to E$满足

（1） $f(t,\ x,\ y)$关于t可测，关于(x,y)连续，

（2） $\|f(t,\ x,\ y)\|\leqslant L_1(t)\|x\|+L_2(t)\|y\|+L_3(t)$，

（3） $\beta(f(t,\ A,\ B))\leqslant L_1(t)\beta(A)+L_2(t)\beta(B)$，

其中 A，B是E中有界集，L_1，L_2，L_3同定理1且使得$\rho(H)<1$，

则边值问题(1.1)、(1.2)必存在解。

注1 定理2将 Mönch[2]中的定理A关于f的条件减弱为f是 Carathéodovg 映象，由此，定理2改进了已有的关于(1.1)、(1.2)的解的存在性结果。

二、若 干 引 理

本文中所用到的关于多值映象的基本知识可见 Aubin 和 Ekeland[3]。

设E是实 Banach 空间，$K\subset E$是闭凸集，以$T_K(x)$表示K在x的相依锥，即

$$T_K(x)=\left\{y\in E;\lim\inf_{h\to 0^+}\frac{d(x+hy,\ k)}{h}=0\right\}.$$

又设$I_K(x)=x+T_K(x)$，称 F：$K\rightrightarrows E$是内向映象，如果

$$F(x)\cap I_K(x)\neq\phi\quad(\forall x\in K) \tag{2.1}$$

命题1 设$K\subset E$是闭凸集，则F：$K\rightrightarrows X$是内向映象当且仅当

$$\lim\inf_{h\to 0^+}\frac{d(x+h(y-x),\ K)}{h}=0\qquad(\forall x\in K,\ y\in F(x))$$

引理1[3] 设E是实 Banach 空间，$K\subset E$是紧凸集，F：$K\rightrightarrows E$ 取非闭凸值且上半连续，如果F是内向映象，则F在K中必存在不动点，即存在$x^*\in K$使$x^*\in F(x^*)$。

记$G(t,s)$是边值问题(1.6)的 Green 函数，$L_3(t)$是以下系统的唯一解

$$\left.\begin{aligned}&x''=0\\&c_1x(a)-d_1x'(a)=x_1\\&c_2x(b)+d_2x'(b)=x_2\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

对$x(\cdot)\in C^1(I;E)$　($C^1(I;E)$中的范数规定为$\|x\|_1=\max\limits_{[a,b]}\|x(t)\|+\max\limits_{[a,b]}\|x'(t)\|$.)定义映象

$$Tx=L_3(t)+\{u(\cdot)\in C^1(I;\ X)$$

$$\mu(t)=\int_a^b G(t,s)f(s)ds,\ f(\cdot)\in F(\cdot,\ x(\cdot),\ x'(\cdot))\} \tag{2.3}$$

象则边值问题(1.3)、(1.4)存在解当且仅当T存在不动点.

引理2　设E是实 Banach 空间，F: $I\times E\times E\rightrightarrows E$取非空闭凸值且满足定理 1 中条件(1)，(2)，又$\rho(H)<1$. 则T的不动点集是$C^1(I;\ X)$中的有界集.

证明　由 Michael 可测选择定理易知由(2.3)定义的多值算子T满足，对$x(\cdot)\in C^1(I;\ X)$，有$Tx\neq\phi$.

引进R^2上的序关系：$(x_1,\ y_1)\leqslant(x_2,\ y_2)$，如果$x_1\leqslant x_2$，$y_1\leqslant y_2$. 由于$\rho(H)<1$，于是$(I-H)^{-1}$是线性连续算子.

设$x\in Tx$，则存在f使得$x(t)=L_3(t)+\int_a^b G(t,\ s)f(s)ds$，$f(\cdot)\in F(\cdot,x(\cdot),\ x'(\cdot))$，从而可知

$$\|x\|\leqslant\|L_2(t)\|+\int_a^b|G(t,s)|[L_1(s)\|x(s)\|+L_2(s)\|x'(s)\|]ds$$

$$+\int_a^b|G(t,s)|L_3(s)ds \tag{2.4}$$

及　$$\|x'\|\leqslant\|L_3'(t)\|+\int_a^b|\partial_tG(t,s)|[L_1(s)\|x(s)\|+L_2(s)\|x'(s)\|ds$$

$$+\int_a^b|\partial_tG(t,s)|L_3(s)ds \tag{2.5}$$

令　$$b_0=\|L_2(t)\|+\int_a^b|G(t,s)|L_3(s)ds,$$

$$b_1=\|L_3'(t)\|+\int_a^b|\partial_tG(t,s)|L_3(s)ds \tag{2.6}$$

由算子H的定义可知有

$$(I-H)(\|x\|,\ \|x'\|)\leqslant(b_0,\ b_1),$$

于是　$$(\|x\|,\ \|x'\|)\leqslant(I-H)^{-1}(b_0,\ b_1). \tag{2.7}$$

即T的不动点集合是$C^1(I;\ E)$中的有界集.

引理3　设$K=\{x(\cdot)\in C^1(I;\ E),\ x(\cdot)$在$I$上满足(2.7)$\}$，则$K$是$C^1(I;\ E)$中有界闭凸集，$0\in K$且$TK\subset K$.

证明　K有界闭凸是显然的，以下证明有$TK\subset K$. 设$x(\cdot)\in K$，$\bar{x}\in Tx$，由T的定义及(2.7)有

$$\begin{aligned}(\|\bar{x}\|,\ \|\bar{x}'\|)&\leqslant H(\|x\|,\ \|x'\|)+(b_0,\ b_1)\\&\leqslant H(I-H)^{-1}(b_0,\ b_1)+(b_0,\ b_1)\\&=(I-H)^{-1}(b_0,\ b_1),\end{aligned}$$

即$TK\subseteq K$.

我们还要用到以下的引理，其证明可见 Mönch[2].

引理4　设E是实可分的 Banach 空间，$A=\{x_n;\ n\in N\}\subset C(I;\ E)$是有界集，则$\varphi(t)$

$\beta(A(t))=\beta(x_n(t):\ n\in N)$关于$t$可测，且

$$\beta\left(\left\{\int_a^b x_n(s)ds;\ n\in N\right\}\right)\leqslant\int_a^b\varphi(s)ds.$$

引理5　设$\omega: I\times R\times R\to R$线性连续且非负，又由下式定义的算子$H_1$的谱半径$\rho(H_1)<1$，

$$H_1(\psi,\bar{\psi})=\left(\int_a^b|G(t,s)|\omega(s,\ \psi(s),\ \bar{\psi}(s))ds,\right.$$

$$\left.\int_a^b|\partial_t G(t,s)|\omega(s,\ \psi(s),\bar{\psi}(s))ds\right),$$

其中　$\psi,\ \bar{\psi}\in C(I;\ R)$，如果

$$\psi(t)\leqslant\int_a^b|G(t,s)|\omega(s,\ \psi(s),\ \bar{\psi}(s))ds,$$

$$\bar{\psi}(t)\leqslant\int_a^b|\partial_t G(t,\ s)|\omega(s,\ \psi(s),\ \bar{\psi}(s))ds,$$

则有$\psi(t)\leqslant 0$，$\bar{\psi}(t)\leqslant 0$，$t\in[a,\ b]$。

三、定 理 的 证 明

设$K=\{x(\cdot)\in C^1(I;\ E)$，$x$满足(2.7)$\}$，则由引理3，$K$是有界闭凸集，$o\in K$，且有$TK\subset K$。

设$D_0=\{0\}$，$D_{n+1}=\mathrm{conv}(\{0\}\cup TD_n))$，由$0\in K$及$TK\subset K$可知$D_n\subset K$，且$\{D_n\}$是增加的凸集列，记$D=\bigcup_{n\geqslant 0}D_n$，则有

$$D=\mathrm{conv}(\{0\}\cup TD).$$

由$D_n\subset K$知$\bar{D}$是有界闭凸集，$0\in D$．以下证明D是$C^1(I;\ E)$中的相对紧集．

令$D(t)=\{x(t);\ x\in D\}$，

$D'(t)=\{x'(t);\ x\in D\}$。

设$\{x_m\}\subset D$，$\varphi(t)=\beta(x_n(t);\ n\geqslant 1)$，存在$D$中某个函数列$\{\bar{x}_n\}$使得

$$\varphi(t)=\beta\ (x_n(t):\ n\geqslant 1,\ x_n(t)=\int_a^b G(t,\ s)f_n(s)ds,$$

$$f_n(\cdot)\in F(\cdot,\ \bar{x}_n(\cdot),\ \bar{x}_n'(\cdot)).$$

由条件(2)有

$$\varphi(t)\leqslant\int_a^b|G(t,\ s)|[L_1(s)\varphi_1(s)+L_2(s)\varphi_1'(s)]ds \tag{3.1}$$

其中　$\varphi_1(t)=\beta\ (\bar{x}_n(t);\ n\geqslant 1)$，

$\varphi_1'(t)=\beta\ (\bar{x}_n'(t);\ n\geqslant 1)$.

记　$r(D(t))=\sup\{\beta(x_n(t):\ n\geqslant 1,\ x_n\in D\}$　(3.2)

$r(D'(t))=\sup\{\beta(x_n'(t);\ n\geqslant 1,\ x_n\in D\}$.

则由(3.1)式得

$$r(D(t))\leqslant\int_a^b|G(t,s)|[L_1(s)r(D(s))+L_2(s)r(D'(s)]ds,$$

$$r(D'(t))\leqslant\int_a^b|\partial_t G(t,s)|[L_1(s)r(D(s))+L_2(s)r(D'(s)]ds,$$

于是由引理5有

$$r(D(t))=0,\ r(D'(t))=0,\ \text{即}D\text{与}D'\text{是}C^1(I;\ E)\text{中相对紧集.}$$

易知T：$\bar{D}\to K$上半连续且取闭凸值. 由于$\bar{D}$是闭凸集，从而对$\forall x_0\in\bar{D}$有

$$\bar{D}\subset x_0+T_{\bar{D}}(x_0).$$

设$x_0\in\bar{D}$，则存在$\{x_n\}\subset D$使$x_n\to x_0$，由Tx_0紧及T上半连续有$Tx_0\cap\bar{D}\neq\phi$，即有对$\forall\ x_0\in\bar{D}$，$Tx_0\cap I_{\bar{D}}(x_0)\neq\phi$. 由引理1存在$x^*\in\bar{D}$使得$x^*\in Tx^*$，即二阶微分包含的边值问题(1.3)、(1.4)存在解.

参 考 文 献

[1] J. Chandra, V. Lakshmikantham and S. Mitchell, Existence of solutions of boundary value problems for nonlinear second order systems in a Banach space, *Nonlinear Analysis TMA*, 2 (1978), 157—168.

[2] H. Mönch, Boundary value problems for nonlinear differential equations of second order in Banach spaces, *Nonlinear Analysis TMA*, 4 (1980), 985—999.

[3] J. P. Aubinand and I. V. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, New York, Wiley-interscience (1984).

[4] 陈文嫄，《非线性泛函分析》，甘肃人民出版社，兰州 (1982).

[5] 郭大钧、孙经先，《抽象空间常微分方程》，山东科学技术出版社 (1988)

Two Points Boundary Value Problems in Banach Spaces

Wang Zhihua

(*Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou* 730000, *P. R. China*)

Zhang Fengxiang

(*Shan Dong Insititute of Economics, Ji'nan* 250014, *P. R. China*)

Abstract

This present paper is concerned with that boundary value problems of second order differential inclusions in a separable Banach space. An existence result is proved with weaker conditions, some existence theorems of second differential equations can be deduced from this paper's theorems.

Key words differential inclusions, measure of noncompactness, boundary value problems, fixed-point