

# 高弹粘流在三维变厚度狭缝流道 中流动的数值模拟\*

杨伯源<sup>1</sup> 李 勇<sup>1</sup>

(戴世强推荐, 1995年9月16日收到)

## 摘 要

用有限块法对高弹粘流在三维变厚度狭缝流道中的流动进行数值模拟, 求出流体流量在流道中的分布规律; 通过对实际板材挤出模鱼尾型流道中设置阻流块对流动影响的计算, 证实有限块法是简易可行的, 从而为挤出模的计算机辅助设计提供了一个重要手段。

**关键词** 高弹粘流 润滑逼近 变厚度狭缝流道 数值模拟

## 一、前 言

高聚物的挤出成形是塑性加工中的重要领域之一, 其中熔体形挤出模具占有重要地位。长期以来, 在模具设计中其流道参数大多凭经验确定。实践证明提高塑性挤出模具设计质量的根本途径是加强对聚合物熔体在模腔中流动特点的研究, 这方面的代表作是[1]、[2]。但上述研究多集中在二维平面问题和轴对称问题。本人使用模拟三维流动的有限块单元法<sup>[3]</sup>, 选取热塑性塑料板材挤出模中广泛使用的变厚度狭缝口模作为分析对象(见图1), 对熔体流动进行数值模拟, 以确定流动参数, 为模具设计提供理论依据。

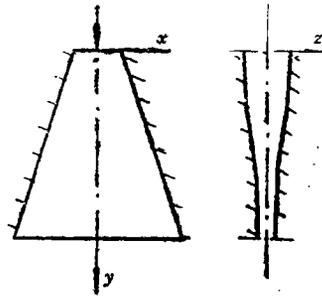


图 1

## 二、流动控制方程

根据熔体在狭缝流道中的流动特点, 对流动过程可作如下假定<sup>[4]</sup>: (1)稳态等温流动, (2)雷诺数( $Re$ )很小, (3)流体不可压缩, (4)壁面无滑移。除此之外, 由于流道厚度是变化的, 还必须根据润滑近似理论<sup>[5]</sup>作进一步简化。在图1所示坐标下, 有

\* 1994年8月10日收到初稿。

1 合肥工业大学, 合肥 230009.

## 1. 运动方程

根据牛顿第二定律, 可知连续介质的运动方程为:

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} + \rho F_j = \rho \frac{dv_i}{dt} \quad (2.1)$$

因熔体流动为蠕变流动, 可忽略惯性力和体积力, 这样(2.1)式可简化为:

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

## 2. 本构方程

应力张量可写成两部分:

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + T_{ij} \quad (2.3)$$

$p$ 是静水压力,  $T_{ij}$ 是剪切应力张量.  $T_{ij}$ 与速率张量之间的关系是

$$T_{ij} = 2\eta d_{ij} \quad (2.4)$$

其中  $d_{ij}$ 是变形速率张量,  $d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ ,  $\eta$ 为流体粘度. 通过对聚合物熔体进行的流变试验显示,  $\eta$ 是 $d_{ij}$ 的第二不变量 $I_2$ 的函数且有如下关系:

$$\eta(I_2) = \kappa I_2^{n-1} \quad (2.5)$$

$\kappa$ 为粘度系数,  $n$ 为幂率指数.

将(2.3), (2.4)式代入(2.2)式得到:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \eta(I_2) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] = 0 \quad (2.6)$$

将(2.6)式展开有:

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\eta(I_2) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta(I_2) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta(I_2) \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = 0 \\ & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta(I_2) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\eta(I_2) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \eta(I_2) \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = 0 \\ & -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta(I_2) \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta(I_2) \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2\eta(I_2) \frac{\partial w}{\partial z} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

其中  $u, v, w$ 分别为沿坐标轴的三个速度分量.

根据润滑近似, 可忽略 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial y}$ , 而压力 $p$ 也仅是 $x, y$ 的函数, 所以上式可化简为

$$\begin{aligned} & -p_{,x} + [2\eta(I_2)u_{,x}]_{,x} + [\eta(I_2)(u_{,y} + v_{,x})]_{,y} + [\eta(I_2)u_{,z}]_{,z} = 0 \\ & -p_{,y} + [\eta(I_2)(v_{,x} + u_{,y})]_{,x} + [2\eta(I_2)v_{,y}]_{,y} + [\eta(I_2)v_{,z}]_{,z} = 0 \\ & -p_{,z} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中  $I_2$  为:

$$I_2 = \{2(u_x^2 + v_x^2) + (v_x + u_y)^2 + u_z^2 + v_z^2\}^{1/2} \quad (2.9)$$

式中  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ , 其它同。

### 3. 连续性方程

根据不可压缩的假设, 可得连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

设沿  $z$  方向的模腔厚度为  $h$ ,  $h$  是变化的, 下表面为平面, 沿厚度对 (2.10) 式积分

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (2.11)$$

定义单位宽度流量:

$$q_x = \int_0^h u dz, \quad q_y = \int_0^h v dz \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} = \int_0^h \frac{\partial v}{\partial y} dz + v \frac{\partial h}{\partial y}$$

以上式中  $u, v, w$  是  $x, y, z$  的函数,  $q_x, q_y$  是  $x, y$  的函数。将 (2.13) 式代入 (2.10) 式有

$$\frac{\partial q_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial q_y(x, y)}{\partial y} = u(x, y, h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(x, y, h) \frac{\partial h}{\partial y} - w(x, y, h) \quad (2.14)$$

上式右端项为零。所以连续性方程可简化为

$$\frac{\partial q_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial q_y(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (2.15)$$

### 4. 边界条件

根据前面假定, 可给出边界条件, 如图 2 示。

在厚度方向, 当  $z=0$  时  $u=v=0$

$$(2.16)$$

在  $\Gamma_1, \Gamma_2$  上  $u=v=0$

$$(2.17)$$

在入口  $\Gamma_3$  处  $u=1, v=\bar{v}$

$$(2.18)$$

在出口  $\Gamma_4$  处, 给出力边界条件:

$$\bar{i}_x = \bar{i}_y = 0 \quad (2.19)$$

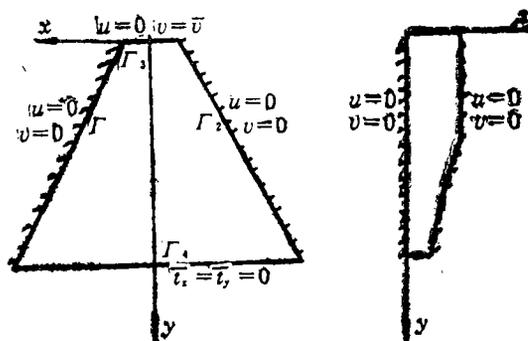


图 2

## 三、用有限块法建立单元特征方程

图 3 是变厚度狭缝流动简图。根据有限块法的基本思想<sup>[3]</sup>, 把流动区域分成小的单元块, 虽然流动厚度是变化的, 但对每个小的单元块来说可以看成是流动发生在厚度不变的二

平板之间.根据润滑近似原理,若无次级流动,这种简化是允许的.

在单元块内,将速度函数写成:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^r u^k(x, y) z_k \\ v &= \sum_{k=1}^r v^k(x, y) z_k \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

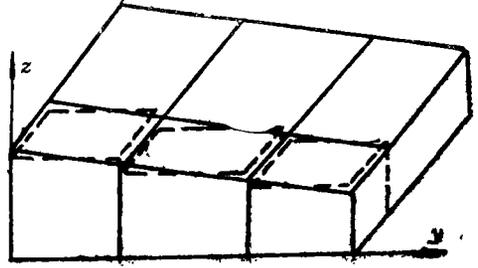


图 3

其中  $z_k$  是描述速度分量  $u, v$  在  $z$  方向变化曲线的 Fourier 级数,  $z_k = \sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right)$ . 计算表明只取该级数第一项即  $z_1 = \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right)$  就可得到足够精确的解. 该级数满足固壁处速度为零的边界条件. 这样(3.1)式变成:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \\ v(x, y, z) &= v(x, y) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

单位宽度的流量为

$$\left. \begin{aligned} q_x(x, y) &= \int_0^h u(x, y, z) dz = \frac{2h}{\pi} u(x, y) \\ q_y(x, y) &= \int_0^h v(x, y, z) dz = \frac{2h}{\pi} v(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

由于单元块厚度为常数,故连续方程可由下式决定

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.4)$$

但应注意(3.4)式在整个区域不成立.

根据加权残数法<sup>[1]</sup>,对方程(2.8)和(3.4)的求解就是寻求速度和压力的近似函数满足下面的方程:

$$\begin{aligned} &\langle -p + 2\eta(I_2)u_{,zz}; W_{,zz} \rangle + \langle \eta(I_2)(u_{,yy} + v_{,zz}); W_{,yy} \rangle \\ &\quad + \langle \eta(I_2)u_{,zz}; W_{,zz} \rangle = \int_{\Gamma_+} \bar{i}_x W ds \\ &\langle \eta(I_2)(u_{,yy} + v_{,zz}); W_{,zz} \rangle + \langle -p + 2\eta(I_2)v_{,yy} \rangle; W_{,yy} \rangle \\ &\quad + \langle \eta(I_2)v_{,zz}; W_{,zz} \rangle = \int_{\Gamma_+} \bar{i}_y W ds \\ &\langle u_{,x} + v_{,y}; q \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中  $W$  和  $q$  为权函数,  $\langle \dots; \dots \rangle$  表示体积分,例如  $\langle f; g \rangle = \int fgd\Omega$ .  $\Gamma_+$  为应力边界,  $\bar{i}_x, \bar{i}_y$  为边界力.

在  $x$ - $y$  平面内,采用四边形八节点等参元,则速度压力函数可写成

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^8 \Phi_i u_i, \quad v(x, y) = \sum_{i=1}^8 \Phi_i v_i \quad (3.6)$$

将上式代入(3.2)式得近似函数

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^8 \Phi_i u_i \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right), \quad v(x, y, z) = \sum_{i=1}^8 \Phi_i v_i \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right), \quad p = \sum_{i=1}^4 p_i \varphi_i \quad (3.7)$$

其中  $\Phi_i$  和  $\varphi_i$  为形函数. 将上述公式代入(3.5)式并取权函数  $W = \Phi_i \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right)$ ,  $q = \varphi_i$  可得:

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} u_j + C_{ij} v_j - D_{ik} p_k &= X_i \\ C_{ji} u_j + B_{ij} v_j - E_{ik} p_k &= Y_i \\ -D_{jk} u_j - E_{jk} v_j &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

其中  $i, j = 1, 2, \dots, 8$ ,  $k = 1, 2, \dots, 4$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \left\langle 2\eta(I_2) \Phi_{j,z} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right), \Phi_{i,z} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \eta(I_2) \Phi_{j,y} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right), \Phi_{i,y} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \eta(I_2) \Phi_j \frac{\pi}{h} \cos\left(\frac{\pi}{h} z\right), \Phi_i \frac{\pi}{h} \cos\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right\rangle \\ B_{ij} &= \left\langle \eta(I_2) \Phi_{j,z} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right), \Phi_{i,z} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right\rangle + \left\langle 2\eta(I_2) \Phi_{j,y} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right), \right. \\ &\quad \left. \Phi_{i,y} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right\rangle + \left\langle \eta(I_2) \frac{\pi}{h} \Phi_j \cos\left(\frac{\pi}{h} z\right), \Phi_i \frac{\pi}{h} \cos\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right\rangle \\ C_{ij} &= \left\langle \eta(I_2) \Phi_{j,z} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right), \Phi_{i,y} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right\rangle \\ D_{ik} &= \left\langle \varphi_k, \Phi_{i,z} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right\rangle \\ E_{ik} &= \left\langle \varphi_k, \Phi_{i,y} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

根据润滑近似, 还可假设  $\bar{t}_z$ ,  $\bar{t}_y$  沿  $z$  方向不变化, 所以(3.8)式的右端项可写成:

$$\left. \begin{aligned} X_i &= \int_{\Gamma_+} \bar{t}_z \Phi_i \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) ds = \frac{2h}{\pi} \int_{\Gamma} \bar{t}_z \Phi_i d\Gamma \\ Y_i &= \int_{\Gamma_+} \bar{t}_y \Phi_i \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) ds = \frac{2h}{\pi} \int_{\Gamma} \bar{t}_y \Phi_i d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

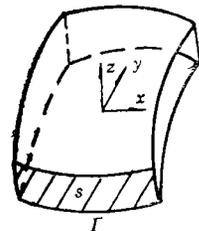


图 4

积分区域如图4所示.  $\Gamma_+$  代表阴影部分的曲面,  $\Gamma$  是该曲面在  $x$ - $y$  平面上的投影. 这样(3.8)、(3.9)、(3.10)式为块单元特征方程.

## 四、流量总体方程及求解

因各单元块厚度的不同,在单元之间节线处速度不连续,所以用以上单元块特征方程不能组合成总体方程。但由于各单元块间节线处流量是连续的,故可以将上述控制方程化为以流量为未知量的方程,然后组合成总体方程求解。由(3.3)式可得

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \int_0^h u(x, y, z) dz = \sum_{i=1}^8 \Phi_i \left( \frac{2h}{\pi} u_i \right) = \sum_{i=1}^8 \Phi_i q_{xi} \\ q_y &= \int_0^h v(x, y, z) dz = \sum_{i=1}^8 \Phi_i \left( \frac{2h}{\pi} v_i \right) = \sum_{i=1}^8 \Phi_i q_{yi} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

式中  $q_{xi}$ ,  $q_{yi}$  表示节线处的流量,即

$$\left. \begin{aligned} q_{xi} &= \frac{2h}{\pi} u_i \\ q_{yi} &= \frac{2h}{\pi} v_i \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

将式(3.10)和(4.2)代入式(3.8),并考虑单元块间内力大小相等,方向相反,在集合总体方程中不考虑内力,必须将厚度 $h$ 移至左端,得到以流量、压力为未知量的方程如下:

$$\begin{aligned} A'_{ij} q_{xj} + C'_{ij} q_{yj} - D'_{ik} p_k &= X'_i \\ C'_{ji} q_{xj} + B'_{ij} q_{yj} - E'_{ik} p_k &= Y'_i \\ -D'_{jk} q_{xj} - E'_{jk} q_{yj} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\text{式中 } A'_{ij} = \left( \frac{\pi}{2h} \right)^2 A_{ij}, \quad B'_{ij} = \left( \frac{\pi}{2h} \right)^2 B_{ij}, \quad C'_{ij} = \left( \frac{\pi}{2h} \right)^2 C_{ij}$$

$$D'_{ik} = \frac{\pi}{2h} D_{ik}, \quad E'_{ik} = \frac{\pi}{2h} E_{ik}$$

$$X'_i = \int_{\Gamma} \bar{t}_x \Phi_i d\Gamma, \quad Y'_i = \int_{\Gamma} \bar{t}_y \Phi_i d\Gamma \quad (4.4)$$

这样就可直接把单元特征方程集成以流量和压力为未知量的总体方程。

对总体非线性方程的求解可根据 Tenner 设计的迭代方式进行<sup>[6]</sup>,即把第 $n$ 次迭代结果 $q_{xi}^n$ 、 $q_{yi}^n$ 代入(4.2)求出 $u_i^n$ 、 $v_i^n$ ,然后根据速度场近似函数求第 $n+1$ 次迭代方程的系数,即

$$\begin{aligned} A'_{ij}(q_{xk}^n, q_{yk}^n) q_{xj}^{n+1} + C'_{ij}(q_{xk}^n, q_{yk}^n) q_{yj}^{n+1} - D'_{ik} p_m^{n+1} &= X'_i \\ C'_{ji}(q_{xk}^n, q_{yk}^n) q_{xj}^{n+1} + B'_{ij}(q_{xk}^n, q_{yk}^n) q_{yj}^{n+1} - E'_{ik} p_m^{n+1} &= Y'_i \\ -D'_{jk} q_{xj}^{n+1} - E'_{jk} q_{yj}^{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

当满足下列条件时,迭代停止。

$$\frac{|q_{xi}^{n+1} - q_{xi}^n|}{q_{\max}^n} < \varepsilon, \quad \frac{|q_{yi}^{n+1} - q_{yi}^n|}{q_{\max}^n} < \varepsilon, \quad \frac{|p_m^{n+1} - p_m^n|}{p_{\max}^n} < \varepsilon \quad (4.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中 } q_{\max}^n &= \sup(|q_{xi}^n|, |q_{yi}^n|, 1 \leq i \leq M) \\ p_{\max}^n &= \sup(|p_m^n|, 1 \leq m \leq N) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$M$ 和 $N$ 分别是未知速度和压力节点总数, $\varepsilon$ 为给定小量( $10^{-5}$ )。

## 五、算例及讨论

为考查文中给定的计算方法，特选择文[7]中提出的典型的鱼尾型板材挤出模流道作为算例，如图5所示。假定入口处沿 $y$ 方向流量均匀即 $q_y = \bar{q}_y$ ，熔体为幂律流体，幂律指数为 $n=0.34$ 。由于对称性，取一半流道进行计算。单元划分与边界条件如图6所示， $x-y$ 平面上采用四边形八节点等参元，单元数72个，节点253个。边界条件为：壁面 $\Gamma_1$ 处， $q_x = q_y = 0$ ；对称面 $\Gamma_2$ 处， $q_x = t_y = 0$ ；入口处 $\Gamma_3$ ， $q_x = 0$ ， $q_y = \bar{q}_y$ ，出口处 $\Gamma_4$ ， $t_x = t_y = 0$ 。

首先对不设阻流块时，即流体在厚度不变的流道中的流动进行计算。其出口速度分布图如图7(a)所示，可以看出流道中部流量偏大，流动是不均匀的。

其次对图5中加阻流块流道进行计算。这里是采用固定阻流块前沿位置和大致形状曲线，而去调整阻流块厚度进行计算的。对阻流块前沿部分单元厚度采用近似曲线拟合决定。图7中示出当 $H_2/H_1$ 为不同值时，流量在出口的分布图。

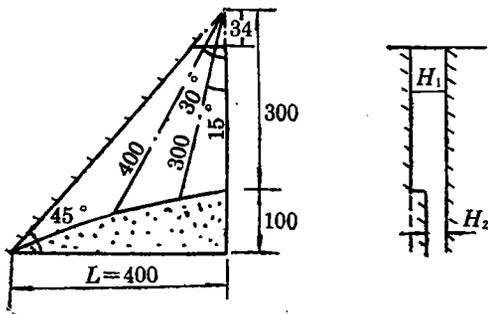


图 5

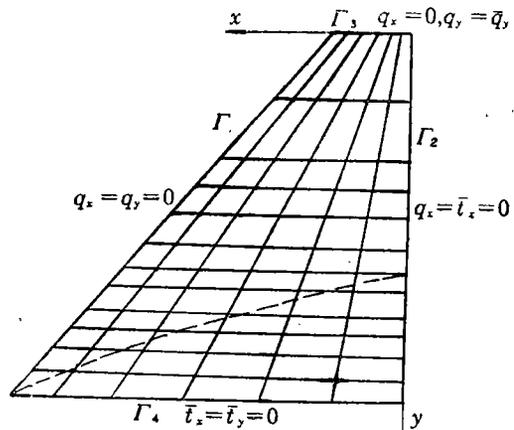


图 6

由图7可知，当 $H_2/H_1=0.4$ 时（阻流块厚度较大），出口处流量在两附近较大，说明阻流块的影响是很大的。图7中的(c)曲线是按照阻力块厚度 $H_2/H=0.5$ ，阻力块前沿形状如图6所示计算的，计算结果与文[7]中给出的结果是吻合的。且出口流动区域内流量是均匀的，流线图如图8所示。这说明本文解法与近似计算结果是基本一致的。

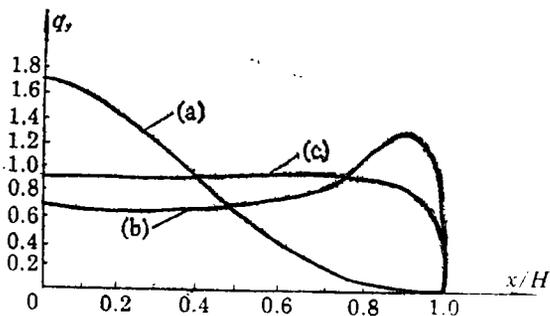


图7 (a)  $\frac{h_2}{H_1}=1$ , (b)  $\frac{h_2}{H_1}=0.4$ , (c)  $\frac{h_2}{H_1}=0.5$

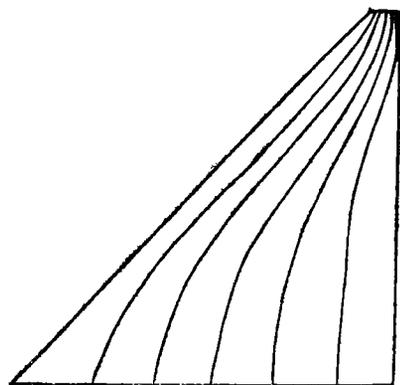


图8 非牛顿流体在流道中流线图

由以上分析知,采用有限块法可以处理高弹粘流在变厚度狭缝流道中流动问题,且有方法简便,精度高,收敛速度快等优点。对该法的进一步研究与完善,可实际应用于聚合物熔体板材挤出模流道的计算机辅助设计中去。

### 参 考 文 献

- [1] M. J. Crochet, A. R. Davies, and K. Water, *Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow*, Elsevier Science Publishers (1984).
- [2] K. R. Reddy and R. I. Tanner, Finite element solution of viscous jet flows with surface, *Comput. Fluid*, (6) (1978), 83—91.
- [3] 李勇,《聚合物熔体流动的有限元计算》, 硕士论文 (1994).
- [4] 古大治,《高分子流体动力学》, 四川教育出版社 (1988).
- [5] I. 塔德莫尔, C. G. 戈戈斯著, 耿考正等译,《聚合物加工原理》, 化学工业出版社 (1990).
- [6] R. I. Tanner, R. E. Nickell and R. W. Bilger, *Comput. Methods of Appl. Mech. Eng.*, 6 (1975), 155.
- [7] 唐志玉,《塑料模流变学设计》, 国防工业出版社 (1991).

## Numerical Simulation of Flow of Highly Viscoelastic Flow in Three-Dimensional Varying Thick Slit Channel

Yang Boyuan    Li Yong

(Department of Applied Mathematics and Mechanics, Hefei  
University of Technology, Hefei 230009, P. R. China)

### Abstract

The distributive law of flow rate is studied for highly viscoelastic flow in three-dimensional slit channel with varying thickness by using Finite Block Element Method (FBM). As an example, the influence of restrictive block on flow rate is obtained in fish channel of the plate extruding die and the results of numerical simulation are in concordance with the approximational analytical solution. It is proved that FBM can be considered as an important tool for CAD/CAM.

**Key words** highly viscoelastic flow, lubricating approximation, varying thick slit channel, numerical simulation