

# 剪切流动中涡、声、热模式划分及相互作用的弱非线性分析\*

居鸿宾<sup>1</sup> 钟芳源<sup>2</sup>

(戴世强推荐, 1995年5月30日收到)

## 摘 要

本文用摄动法详细研究了非均匀流动中涡、声、热运动模式的划分及其相互作用问题。特别讨论了剪切流情形, 得到的各阶摄动方程和声、涡运动方程具有清晰的物理含义。在此基础上着重探讨了声、涡一阶作用以及二阶涡的生成, 由此解释了声学控制流动中的部分实验现象。

**关键词** 气体动力学 气动声学 剪切流动 非线性作用 非定常流

## 一、前 言

对流动中涡、声、热模式的划分及其相互作用研究具有理论和实际意义。Rayleigh<sup>[1]</sup>最先研究了均匀静止介质中的线性问题, 指出此时声波运动、涡扩散运动、热扩散运动三者相互独立, 其间耦合只存在于边界。在此基础上Chu和Kovácszay<sup>[2]</sup>讨论了高阶脉动中运动模式的划分及相互作用。他们的工作建立于空间、时间平均值基础之上, 这种平均值并非时均Navier-Stokes方程的基本解, 因而不适合于处理非均匀流。

在实际问题中空间梯度普遍存在于流动之中, 这种梯度的存在相当于连续分布着若干层面, 不同形式的运动通过时是相互耦合亦即相互作用的。另外, 空间梯度往往还决定了流动的性质, 如层流剪切层对流动稳定性起着决定性作用, 此时涡波是色散波, 涡、声、热作用中存在着频率、波数的选择匹配问题。所以研究剪切流中不同运动形式之间的相互作用是很有必要的。Doak<sup>[3]</sup>曾以动量密度 $\rho\mathbf{v}$ 而非质点速度 $\mathbf{v}$ 为独立变量对此作了讨论, 所建立的动量势统一理论具有一定的普遍性, 但在物理上涡、声等运动更应从质点速度、压力脉动角度而非动量密度去定义, 除非是低Mach数、线性情形, 否则此二者不相一致。基于这种考虑, 本文对原参数Navier-Stokes方程进行了弱非线性分析, 得到各阶脉动方程, 由此讨论了三种运动模式的划分, 得到声、涡运动方程。

作为文中所述理论的一个应用, 本文还详细分析了一阶声、涡作用产生二阶涡的情况, 得到与声发生作用的涡的性质, 声、涡间的频率关系, 以及声强度对声控效果的影响, 由此部分解释了声控翼型流动中的实验现象。

\* 国家教委博士点基金资助课题, 1994年6月3日收到初稿。

1 清华大学, 北京 100084; 2 上海交通大学, 上海 200030。

## 二、平行剪切流弱非线性方程

首先写出Navier-Stokes方程和状态方程如下:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - \frac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mu \text{def } \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f} \quad (2.2)$$

$$\frac{p}{R} \frac{DE}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \mu \left[ \frac{1}{2} (\text{def } \mathbf{v}) : (\text{def } \mathbf{v}) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right] + Q \quad (2.3)$$

$$p = \rho RT \quad (2.4)$$

其中  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $p$ ,  $E$  分别为密度、速度、压力和熵,  $\text{def } \mathbf{v}$ ,  $(\text{def } \mathbf{v}) : (\text{def } \mathbf{v})$  分别为变形率张量及张量积;  $Q$ ,  $\mathbf{f}$  分别表示热量生成率和外力. 本文讨论假设无外界质量生成, 并认为  $\mu$ ,  $c_p$  等均为常数.

仅研究时均速度是平行剪切流的情况, 即  $\mathbf{v}_0 = iU(y)$ . 令  $\varepsilon$  为一小量, 将任意独立变量  $\alpha$  级数展开:  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n + \dots$  (其中  $|\alpha_n| / |\alpha_0| \sim O(\varepsilon^n)$ ) 并代入 Navier-Stokes 方程, 比较同阶项、略去高阶项后得到  $\varepsilon^n$  阶扰动方程 (质量连续方程中已代入同阶状态方程):

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}_n + \frac{1}{\nu \rho_0} \frac{D_0 p_n}{Dt} - \frac{1}{c_p} \frac{DE_n}{Dt} &= m_n \\ \rho_0 \frac{D_0 \mathbf{v}_n}{Dt} + \rho_0 (\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla p_n - \mu \nabla^2 \mathbf{v}_n - \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_n) &= \mathbf{f}_n \\ \frac{p_0}{R} \frac{D_0 E_n}{Dt} - k \Delta T_n - \mu \frac{\partial U}{\partial y} \left( \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial v_n}{\partial x} \right) &= Q_n \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

其中  $m_n$ ,  $\mathbf{f}_n$ ,  $Q_n$  均代表了前  $n-1$  阶脉动的贡献, 具体表达式这里略去 (无外界质量生成时  $m_0 = m_1 = 0$ ).

上面  $\varepsilon^n$  阶弱非线性逼近方程有这样几个特点: ①各阶方程具有相同的形式; ②方程的解可由两部分组成, 即(i)由前  $n-1$  阶解计算第  $n$  阶方程源项  $m_n$ ,  $\mathbf{f}_n$ ,  $Q_n$ , (ii)解第  $n$  阶有源方程进而得到第  $n$  阶参量; ③第  $n$  阶方程的源项反映了前  $n-1$  阶脉动的贡献,  $n \geq 2$  时  $m_n$ ,  $\mathbf{f}_n$ ,  $Q_n$  不是实际意义上的质量、力和热源, 但从方程比拟角度它们仍起着类似的作用, 因而可分别称为质量型源、力型源和热量型源.

## 三、涡、声、热运动模式的划分

根据矢量分解原则,  $\mathbf{v}_n$  可作如下分解  $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n\Omega} + \nabla \phi_n + \nabla \psi_n$ , 其中  $\mathbf{v}_{n\Omega}$  为无散度螺线场, 它表征不可压流中涡运动:  $\nabla \cdot \mathbf{v}_{n\Omega} = 0$ ;  $\nabla \phi_n$  为速度场的无旋部分, 表示因压缩性而存在的声、热引起的运动速度:  $\nabla \times \nabla \phi_n = 0$ ,  $\nabla \psi_n$  是螺线无旋场, 它由质量型源  $m_n$  及边界运动引起:  $\nabla^2 \psi_n = m_n$ , 在边界处  $\nabla \psi_{nn} = \mathbf{v}_{nn}$  ( $\mathbf{v}_{nn}$  为边界运动法向速度).

将上述分解代入(2.5)式连续方程, 得到:

$$\nabla^2 \phi_n + \frac{1}{\nu \rho_0} \frac{D p_n}{Dt} - \frac{1}{c_p} \frac{DE_n}{Dt} = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla^2 \psi_n = m_n, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_{n\Omega} = 0$$

上式实际上已将涡运动从声、热运动中划分开来,进一步的工作是划分声、热运动,为此令:  $\phi_n = \phi_{n\phi} + \phi_{nE}$ , 那么式(3.1)可分解为:

$$\nabla^2 \phi_{n\phi} = -\frac{1}{\nu p_0} \frac{D_0 p_n}{Dt}, \quad \nabla^2 \phi_{nE} = \frac{1}{c_p} \frac{D_0 E_n}{Dt}$$

此式表明,  $\phi_{n\phi}, \phi_{nE}$  分别与压力脉动  $p_n$  和熵脉动  $E_n$  线性关联。如果从物理角度定义压力脉动为声脉动, 熵脉动为热脉动, 那么与此相应的,  $\phi_{n\phi}, \phi_{nE}$  就分别为声、热引起的  $n$  阶速度势脉动。

至此得到  $\epsilon^n$  阶运动中涡、声、热模式的划分。将各阶脉动线性叠加就可以得到总的涡、声、热速度分量为:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}_{0\Omega} + \dots + \mathbf{v}_{n\Omega} + \dots, \quad \nabla \phi_p = \nabla \phi_{0p} + \dots + \nabla \phi_{np} + \dots, \\ \nabla \phi_E &= \nabla \phi_{0E} + \dots + \nabla \phi_{nE} + \dots \end{aligned}$$

上述运动模式的划分并未受到速度梯度的影响, 但三种运动再不象时均均匀场那样相互独立地存在, 这表现在式(2.5)中动量方程和能量方程的时均速度梯度相关项。如动量方程中:

$$\rho_0 (\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \rho_0 [(\mathbf{v}_{n\Omega} + \nabla \phi_n + \nabla \psi_n) \cdot \nabla] \mathbf{v}_0$$

反映了时均速度梯度与  $n$  阶涡、声、热发生作用, 这种作用广义上讲是对这些运动的散射。

#### 四、声波方程、涡运动方程

取(2.5)式中动量方程的散度可以得到  $n$  阶声波方程为:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{D_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}_{n\phi})}{Dt} + 2\rho_0 \frac{\partial v_{n\phi}}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \Delta p_n - \frac{4}{3} \mu_0 \Delta (\nabla \cdot \mathbf{v}_{n\phi}) \\ = \nabla \cdot \mathbf{f}_n - \rho_0 \frac{D_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}_{nE})}{Dt} - \frac{4}{3} \mu_0 \Delta (\nabla \cdot \mathbf{v}_{nE}) \\ - 2\rho_0 \frac{(\partial v_{n\Omega} + v_{nE})}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} - 2\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x \partial y} \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.1)$$

左端第二项反映了速度梯度对声波的散射, 第四项反映了粘性对声波的耗散。右端第一项表明, 前  $n-1$  阶力型源中只是其散度影响第  $n$  阶声波, 后面各项表征的是同阶涡、热的作用以及质量型源  $\psi_n$  的影响。

取(2.5)式中动量方程的旋度则得到  $n$  阶涡运动方程为:

$$\rho_0 \frac{D_0 \Omega_n}{Dt} + \rho_0 \mathbf{Q}_{n\Omega} - \mu_0 \Delta \Omega_n = \nabla \times \mathbf{f}_n - \rho_0 \mathbf{Q}_{n\phi} \quad (4.2)$$

其中  $\Omega_n = \nabla \times \mathbf{v}_n = \nabla \times \mathbf{v}_{n\Omega}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{v}_{n\Omega} = 0$ ,

$$\mathbf{Q}_{n\Omega} = \frac{\partial w_{n\Omega}}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial v_{n\Omega}}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \left[ \frac{\partial u_{n\Omega}}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_{n\Omega} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] \mathbf{k},$$

$$\mathbf{Q}_{n\phi} = \frac{\partial w_{n\phi}}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial v_{n\phi}}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \left[ \frac{\partial u_{n\phi}}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_{n\phi} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] \mathbf{k}.$$

$\mathbf{Q}_{n\Omega}$  反映了速度梯度对涡的散射,  $\mathbf{Q}_{n\phi}$  则反映了同阶声、热以及前  $n-1$  阶质量型源的影响。另外, 力型源中只有其有旋部分才对第  $n$  阶涡运动起作用。

## 五、一阶声、涡作用及二阶涡生成 声控流动实验现象的解释

关于声、涡作用问题已有了大量的理论和实验研究。如对于涡声（流动声）问题，已有的研究表明<sup>[4]</sup>拟序结构的大涡是主要的声源，并且对低速情形声、涡的波数大约相等： $k_0 \approx \alpha$ 。而对声学控制流动的研究更多的是实验性的，如Zaman<sup>[5]</sup>、董国平<sup>[6]</sup>等。这些实验表明声波可以控制翼型流动的分流、转换和再附着，声波最有效的位置是在分离点稍后处，并且起作用的是声振速度而非声压本身，另外还存在声波最佳频率和声压阈值问题。上述这些实验现象至今仍未得到很好的理论解释。作为本文弱非线性方程的一个应用，这里将对声、涡一阶作用及二阶涡生成作详细讨论，由此解释了部分实验现象。

在[5]、[6]的实验中，无声控时翼型失速流动区域均存在一自由剪切层，因而本文所发展的方程是适用的。为简单起见，这里不讨论热运动并假设整个过程是多变绝热过程： $p = \rho^\gamma \cdot \text{const}$ ，此时 $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n\tau} + \mathbf{v}_{n\Omega}$ ，(2.5)式中连续方程则为：

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{n\tau} + \frac{1}{\nu \rho_0} \frac{D_0 p_n}{Dt} = m_n \quad (5.1)$$

### 1. 声、涡一阶解

将(5.1)代入声波方程(4.1)并取 $n=1$ 有：

$$c_0^2 \Delta p_1 - \frac{D_0^2 p_1}{Dt^2} + \frac{4}{3} \nu_0 \Delta \left( \frac{D_0 p_1}{Dt} \right) + 2\rho_0 c_0^2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v_{1\tau}}{\partial x} = -2\rho_0 c_0^2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v_{1\Omega}}{\partial x},$$

( $c_0$ 为音速)

量纲分析表明，在一般频率范围内（声控频率 $O(10^3)$ ）上式第三项粘性项可不予考虑，这样上式可简化为：

$$\frac{D_0}{Dt} \left( c_0^2 \Delta p_1 - \frac{D_0^2 p_1}{Dt^2} \right) - 2c_0^2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial y} = 0$$

其中第三项散射项相对于第一项量级为 $M\lambda/\delta$ （ $\lambda$ 为声波波长， $\delta$ 为剪切层厚度），一般情形下散射作用不可忽视。但若声波垂直剪切层入射（声控实验大致如此），分析表明声波频率和方向将不受剪切层影响，而声压幅值变化量级为 $\delta \cdot \text{constant}$ ，对翼型外薄剪切层也认为保持不变，但翼型的存在会使声波幅值发生变化，尽管如此，剪切层内声波仍有形式解：

$$p_1 = A \exp[i(-k_0 y - \omega_p t)], \quad v_{1\tau} = \frac{A}{\rho_0 c_0} \exp[i(-k_0 y - \omega_p t)] \quad (5.2)$$

（声波沿 $-y$ 方向入射， $k_0 = \omega_p/c_0$ ， $\omega_p$ ：声波固频率， $A$ ：考虑翼型散射后声压幅值）

下面讨论一阶涡解，主要讨论对加强主流和分离区间动量交换起主要作用的展向涡 $\Omega_{1z}$ 。由于 $\nabla \cdot \mathbf{v}_{1\Omega} = 0$ ，所以可定义流函数 $\psi_y = \bar{u} \cdot \Omega$ ， $\psi_z = -\mathbf{v}_{1\Omega}$ （上加“-”表示无量纲量），则 $n=1$ 时(4.2)化为

$$\Delta \psi_y + \bar{U} \Delta \psi_z - \bar{U}'' \psi_z - \frac{1}{\text{Re}} \Delta(\Delta \psi) = \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{v}_{1\tau} + \bar{v}_{1\tau} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2}$$

其中右端表示一阶声通过剪切层与涡耦合。沿 $-y$ 入射声波引起的涡波应也沿 $-y$ 方向传播，但上式左端表明涡波是沿 $x$ 方向的，所以外加声波对 $\Omega_{1z}$ 没有影响。如此上式即简化为不可压剪切流稳定性方程。对[5][6]所述剪切流，不稳定的优势模态空间增长率约为 $-\alpha_i \theta/R \sim 0.12$ （ $R=0.5$ ， $\theta \sim 2.5-5 \text{mm}$ ），时间增长率约为 $\omega_i \sim 360-720$ ，这样涡增长的时间尺度约

为0.001~0.003, 而声控实验中涡的演化时间一般不小于0.01 ([5]中  $U_e=12\text{m/s}$ , 翼型弦长  $L=127\text{mm}$ , 涡相速度  $C_r=0.5U_e$ ,  $L/C_r\sim 0.02$ ; [6]中  $U_e=30\text{m/s}$ ,  $L=150\text{mm}$ ,  $L/C_r\sim 0.01$ ), 它比涡增长所需时间大一个数量级, 所以可以认为一阶涡有足够的时间达到下述饱和解:

$$\psi_1 = \phi_1(y) \exp[i(\alpha \cdot x - \omega_0 t)] \quad (5.3)$$

( $\alpha$ 为涡波矢量,  $\omega_0$ 为涡圆频率)

## 2. 二阶生成涡

实验中外加声波大多在线性范围内, 过程又是多变、绝热的, 所以(4.2)中声、热影响项  $Q_{2, \theta}$  不予考虑. 此时二阶的力型源为:

$$f_2 = -\rho_1 \frac{D_0 v_0}{Dt} - \rho_0 (v_1 \cdot \nabla) v_1 - \rho_1 (v_1 \cdot \nabla) v_0 = f_{2, \theta\theta} + f_{2, \theta\omega} + f_{2, \omega\omega}$$

$f_{2, \omega\omega}$ 反映涡能量级联过程,  $f_{2, \theta\theta}$ ,  $f_{2, \theta\omega}$ 则反映了声波的作用. 这样, 体现一阶声作用的二阶展向涡运动方程为

$$\frac{2\Omega_{2z}}{\partial t} + U \frac{\partial \Omega_{2z}}{\partial w} - v_{2\omega} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - v_0 \Delta \Omega_{2z} = -\frac{\partial}{\partial y} (v_{1y} \Omega_{1z}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho_1 v_1 \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (5.4)$$

$\Omega_{2z}$ 沿  $x$  传播, 而源项第二项产生的涡波沿  $-y$ , 所以此源项不予考虑.

将一阶解(5.2)、(5.3)代入上式第一个源项可以得到二阶涡的两个频率  $\omega_y \pm \omega_0$ , 通常  $\omega_y \gg \omega_0$ , 所以二阶涡与一阶声波之间频率近似相同. 这一点与实验结果是一致的, 如[6]得到的结果(图1)就说明了这一点.

为了估计二阶涡幅值(5.4)式需做简化. 首先, 实验中的Mach数一般较低, 因而在随涡运动坐标系中一阶声波解近似不变. 另外, 因二阶涡尺度较小, 且一阶涡在速度剖面拐点处强度较大, 此时  $\partial^2 U / \partial y^2 \rightarrow 0$ , 所以(5.4)左端第三项可略去. 如此(5.4)式就简化为有源扩散方程. 二阶涡的演化时间尺度为  $1/v_0 \beta^2 \sim 2 \times 10^{-3}$  ( $\beta$ 为二阶涡波数), 比一阶涡演化时间小得多, 所以可在时间  $T$  内积分得到二阶涡稳定解

$$v_0 \Delta \overline{\Omega_{2z}} = \frac{\partial}{\partial y} \text{Re}(v_{1y} \Omega_{1z}) \quad , \quad (\text{上加“—”表示在 } T \text{ 内平均, } \text{Re}(\quad); \text{ 取实部})$$

$T$  的选择是使其包含一阶涡在一个完整周期内受到声波作用:  $T = 2\pi / \omega_0$ , 它比涡衰减周期  $1/v_0 \alpha^2$  要短得多, 而又比一阶声、二阶涡周期长得多, 这样上式即有:

$$Q = \frac{\overline{\Omega_{2z}}}{\Omega_{1z}} = \frac{A \omega_0}{4\pi \rho_0 c_0 v_0 \omega_y} \left\{ \left( \frac{k_0 + \alpha_y}{K_1} \right) [\cos(\theta_1 - \phi_1) + \cos(\theta_1 - \phi_2)] + \left( \frac{k_0 - \alpha_y}{K_2} \right) [\cos(\theta_1 + \phi_1) - \cos(\theta_1 + \phi_2)] \right\} \quad (5.5)$$

其中

$$\theta_1 = \alpha \cdot x, \quad \phi_1 = k_0 y - 2\omega_y / \omega_0, \quad \phi_2 = k_0 y,$$

$$K_1 = \alpha^2 - 2\alpha k_0 + k_0^2, \quad K_2 = \alpha^2 + 2\alpha k_0 + k_0^2, \quad \alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2.$$

$Q$ 称为二阶涡相对于一阶涡的放大系数. 上述过程中假定一阶涡解未受二阶涡增长的影响,

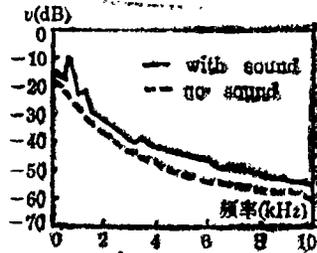


图1 声控翼型流动实验典型脉动速度谱<sup>[6]</sup>  
(声频率561Hz, SPL: 133dB, 攻角20°, 来流30m/s)

分析表明, 只有当 $Q$ 比一阶脉动小时才可能, 所以上式只有 $Q$ 较小( $<0.5$ )时才正确。

取实验典型数据:  $u^1=0.6\text{m/s}$ ,  $f_s=561\text{Hz}$ ,  $c_0=334\text{m/s}$ , 计算 $Q$ 得到图2。

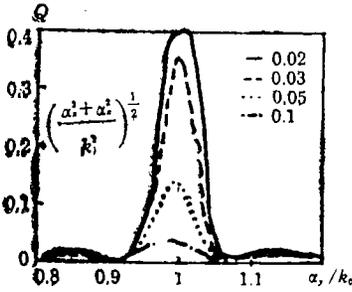
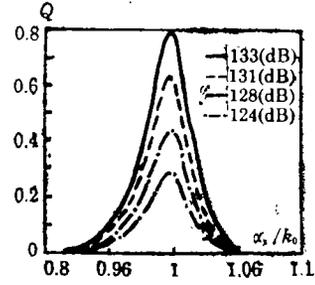


图2 二阶涡放大系数



$$((a_1^2 + a_2^2)/k_0^2)^{1/2} = 0.02$$

图3 声波幅值对二阶涡放大系数的影响

根据这个计算结果可作如下几点讨论:

a. 与涡直接发生作用的是声振速度 $v$ , 而非声压 $p$ ;  $v$ 和 $p$ 一般存在相位差, 最大值不在同一位置, 这就解释了 Zaman<sup>[5]</sup>关于此方面的实验结果, 即最佳效果发生于声振速度最大处而非声压最大处;

b. 声波对各向同性湍流( $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z$ )作用很小, 对各向异性湍流作用较大。大涡往往是各向异性的, 且对湍流能量的输运、生成起着非常重要的作用, 声波作用的正是这种大涡。结合[4]的结论可以看出大涡在声、涡作用中的重要性。Zaman<sup>[5]</sup>实验中声波对下游涡的作用较小就与下游涡趋于各向同性有关;

c. 最佳声控效果发生于 $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)/k_0^2} = 0$ ,  $\alpha = \alpha_y = k_0$ , 此时 $\omega_0/C_r = \omega_p/c_0$ ,  $\omega_0 = M\omega_p C_r/U_e$  ( $M = U_e/c_0$ ), 这就得到最佳声控时声、涡间的频率关系。实验结果可以粗略地证明这一结论。[6]中声频率 $f_s = 561\text{Hz}$ , 由此得到 $f_0 = 30\text{Hz}$ , 而翼型外分离流剪切层不稳定频率范围约为 $f_0^* \theta/U_e \sim 0 - 0.012$ ,  $f_0^* \sim 0 - 60\text{Hz}$ , 基本上一致。另外[6]中 $f_s = 1220\text{Hz}$ 时声压级也较大, 但没有声控效果, 这与此时声、涡频率不匹配有关。

随着二阶涡振幅的不断增长, 非线性过程开始占统治地位, 脉动由正弦变化向不规则转变, 出现了连续频率谱。对完全发展湍流, 运动尺度剧烈变化, 相应的频率是 $O(10^4)$ 而非 $O(10)$ , 脉动性质也趋于各向同性。声控实验中高频涡强度也有放大(图1), 估计是非线性作用的结果。

d. 由式(5.5)知道 $Q$ 与声强度 $A$ 成正比, 所以声控效果与声压级(SPL)应成指数型依赖关系, [6]证明了这一点。取不同声压级计算 $Q$ 得到图3, 由此可知 $\text{SPL} = 124\text{dB}$ 时 $Q \sim 0.28$ , 这是非线性发生作用时非线性量与线性量的特征比值, 此时的SPL也正是[6]得到的声压阈值, 低于此值则没有声控效果。这表明声、涡作用应是非线性的。

## 六、结 论

流动中涡、声、热相互作用与空间非均匀性(梯度)有关, 本文针对平行剪切流详细讨论了这一问题。首先是运动模式的划分。根据连续方程的摄动方程, 质点速度、压力和熵关于三种运动模式可得到一致的物理上的划分。其次是运动间的相互作用问题。非线性作用以质量型源、力型源以及热量型源的形式出现, 它们均反映了低阶脉动对高阶脉动的影响。不

同于均匀流, 剪切流中即使是同阶脉动也是相互耦合的, 这具体表现在文中所得声、涡运动方程中速度梯度的散射项上。

本文应用上述弱非线性理论详细分析了声波垂直入射剪切层时的声、涡作用问题并对声控流动实验做了理论解释, 结果表明声波作用的是各向异性大涡, 由此可见大涡在其致声以及为声所控制过程中的重要性。文中得到有效声控时一阶声、涡之间的频率关系, 结论与实验是一致的。至于声压问题, 理论上得到非线性发生作用时的声压级与实验中的声压阈值相一致。

### 参 考 文 献

- [1] L. Rayleigh, *Theory of Sound*, New York Dover Publications, Second Edition, (1945).
- [2] B. T. Chu and L. S. G. Kovasznay, Non-linear interaction in a viscous heat-conducting compressible gas, *J. Fluid Mech.*, 3(5) (1958).
- [3] P. E. Doak, Analysis of internally generated sound in continuous materials: 3 the momentum potential field description of fluctuation of fluid motion as a basis for unified theory of internally generated sound, *J. Sound & Vib.*, 26(1) (1973), 91—120.
- [4] J. E. Ffowce Williams and A. J. Kempton, The noise from the largescale sturcture of a jet, *J. Fluid Mech.*, 84 (1978).
- [5] K. B. M. Q. Zaman, Effect of acoustic excitation on stalled flow over an airfoil, *J. AIAA*, 30(6), (1992).
- [6] 董国平, 尾迹干扰下声学控制机翼流动的研究, 博士学位论文, 上海交通大学 (1991).

## Weakly Non-Linear Analysis on Identification of Vortex, Sound & Heat and Their Interactions in Shear Flow

Ju Hongbin

(Qinghua University, Beijing 100084, P. R. China)

Zhong Fangyuan

(Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P. R. China)

### Abstract

The identification of vortex, sound and heat motions and the interactions among them are discussed by means of velocity split and perturbation method in this paper. Especially the shear flow is considered. All the obtained weakly non-linear equations have clear physics concept. Basing on the analysis, the interaction between first order sound and vortex and the creation of the second order vortex are studied and some experiment phenomena of airfoil flow ontrol by sound are explained.

**Key words** aerodynamics, aeroacoustics, shear flow, non-linear interaction, unsteady flow