

# 考虑横向剪切变形和旋转惯性的层合正交异性球壳的动态响应

杨宜谦<sup>1</sup> 马和中<sup>1</sup> 王俊奎<sup>1</sup>

(钱伟长推荐, 1995年4月7日收到)

## 摘 要

本文建立了计及横向剪切变形和旋转惯性的复合材料轴对称层合圆柱正交异性球壳的运动方程。在此基础上, 用有限差分法计算了球壳在轴对称动力载荷下的动态响应, 并讨论了材料参数、结构参数和横向剪切变形的影响。

**关键词** 层合球壳 动力响应 横向剪切变形 旋转惯性 有限差分法

## 一、引 言

与金属材料相比较, 纤维增强复合材料有许多优点。作为重要结构元件的复合材料壳体在宇航、船舶、汽车、石油化工、土木建筑、压力容器和核反应堆中得到日益广泛的应用。而且在实际应用中, 复合材料壳体常常受到不同类型的动态载荷。

复合材料层合壳的经典理论假设各个单层处于平面应力状态而忽略了横向剪切变形的影响。而近年来的研究表明, 由于先进复合材料的横向剪切模量与面内模量之比远比金属材料的低, 所以横向剪切变形在很大程度上影响着复合材料层合板壳的力学性能。

Alwar 和 Narasimhan<sup>[1]</sup>用正交配点法对考虑一阶横向剪切影响的轴对称层合正交异性球壳进行了静力分析, 并讨论了横向剪切变形影响的大小。Sheinman 和 Greif<sup>[2]</sup>、Wu等<sup>[3]</sup>用有限元法分析了层合球壳的自由振动。

本文基于 Mindlin 在处理各向同性中厚板问题的类似假设, 应用 Hamilton 原理建立了考虑一阶横向剪切变形和旋转惯性的轴对称层合圆柱正交异性球壳的运动方程, 然后用有限差分法计算了在均布阶跃载荷下的动态响应。

## 二、基 本 方 程

我们考虑如图1所示的在轴向均布载荷 $q(t)$ 作用下, 厚度为 $h$ , 曲率半径为 $R$ 的层合球壳。假设每层材料主向沿子午线向或环向。以壳体的中曲面作为坐标曲面,  $s$ 是子午线向坐标,  $\theta$ 是环向坐标。其中 $l$ 是弧长,  $l=R\varphi_1$ ,  $\varphi_1$ 为球壳中心半角。每层与中曲面的距离如图2所示。

<sup>1</sup> 北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100083

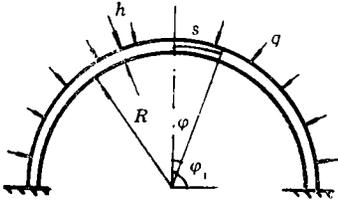


图1 层合球壳的几何形状图

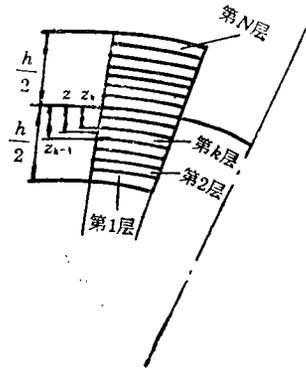


图2 每层与中曲面的距离

## 1. 几何方程

与 Mindlin<sup>[4]</sup> 处理中厚板问题中所采用的假设类似, 放弃经典薄壳理论中的 Kirchhoff-Love 直法线假设, 保留直线假设, 且假设壳体横向不可压缩, 即沿  $z$  方向的应变  $\varepsilon_z = 0$ , 且壳体的横向正应力忽略不计。

在轴对称条件下, 与壳体中曲面相距为  $z$  的第  $k$  层内任一点的径向、环向和轴向位移可表达为如下形式:

$$u^{(k)}(s, t) = u(s, t) + z\psi(s, t), \quad v^{(k)}(s, t) = 0, \quad w^{(k)}(s, t) = w(s, t) \quad (2.1)$$

其中  $u$  和  $w$  分别是壳体中曲面上点的径向位移和挠度,  $\psi$  为壳体变形前的中曲面法线的转角。

由上式可以导出壳体第  $k$  层的应变-位移关系:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_s^{(k)} &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R}} (\varepsilon_s + z k_s), & \varepsilon_\theta^{(k)} &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R}} (\varepsilon_\theta + z k_\theta) \\ \gamma_{sz}^{(k)} &= \frac{1}{1 + \frac{z}{R}} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R} + \psi \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

其中  $\varepsilon_s$  和  $\varepsilon_\theta$  分别是中曲面上子午线向和环向应变。  $k_s$  和  $k_\theta$  分别是中曲面上子午线向和环向曲率改变量, 且:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R}, & \varepsilon_\theta &= \frac{\text{ctg } \varphi u}{R} + \frac{w}{R} \\ k_s &= \frac{\partial \psi}{\partial s}, & k_\theta &= \frac{\text{ctg } \varphi \psi}{R} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

## 2. 本构方程

假设材料是弹性的, 且服从 Hooke 定律, 对于圆柱正交异性的情况, 壳体第  $k$  层的应力应变关系为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_s^{(k)} \\ \sigma_\theta^{(k)} \\ \tau_{sz}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & 0 \\ Q_{12}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_s^{(k)} \\ \varepsilon_\theta^{(k)} \\ \gamma_{sz}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\text{且} \quad \tau_{\theta\theta}^{(k)} = \tau_{\theta z}^{(k)} = \sigma_z^{(k)} = 0$$

这里  $\sigma_s^{(k)}$ ,  $\sigma_\theta^{(k)}$  和  $\sigma_{sz}^{(k)}$  是第  $k$  层的 Kirchhoff 应力分量, 而  $Q_{ij}^{(k)}$  是第  $k$  层的弹性刚度元素:

$$\left. \begin{aligned} Q_{11}^{(k)} &= \frac{E_s^{(k)}}{1 - \mu_{s\theta}^{(k)} \mu_{\theta s}^{(k)}}, & Q_{12}^{(k)} &= \frac{\mu_{s\theta}^{(k)} E_\theta^{(k)}}{1 - \mu_{s\theta}^{(k)} \mu_{\theta s}^{(k)}} \\ Q_{22}^{(k)} &= \frac{E_\theta^{(k)}}{1 - \mu_{s\theta}^{(k)} \mu_{\theta s}^{(k)}}, & Q_{55}^{(k)} &= G_{sz}^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

其中  $E_s^{(k)}$  和  $E_\theta^{(k)}$  分别是第  $k$  层子午线向和环向的弹性模量,  $\mu_{s\theta}^{(k)}$  和  $\mu_{\theta s}^{(k)}$  是 Poisson 比,  $G_{sz}^{(k)}$  是横向剪切模量, 并且在弹性常数之间有下式成立:

$$\mu_{s\theta}^{(k)} E_\theta^{(k)} = \mu_{\theta s}^{(k)} E_s^{(k)} \quad (2.6)$$

### 3. 应力-合力、力矩方程

壳体横截面上应力的合力与力矩如经典壳体理论所定义:

$$\left. \begin{aligned} N_s &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_s^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & N_\theta &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_\theta^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\ M_s &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_s^{(k)} z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, & M_\theta &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_\theta^{(k)} z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\ Q_s &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \tau_{sz}^{(k)} z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

这里  $N_s$  和  $N_\theta$  分别是子午线向和环向的薄膜力,  $M_s$  和  $M_\theta$  分别是子午线向和环向弯矩,  $Q_s$  是径向剪力,  $N$  是总层数.

将(2.3)(2.2)(2.4)(2.7)依次代入, 便得:

$$\left. \begin{aligned} N_s &= A_{11}\varepsilon_s + A_{12}\varepsilon_\theta + B_{11}k_s + B_{12}k_\theta \\ N_\theta &= A_{12}\varepsilon_s + A_{22}\varepsilon_\theta + B_{12}k_s + B_{22}k_\theta \\ M_s &= B_{11}\varepsilon_s + B_{12}\varepsilon_\theta + D_{11}k_s + D_{12}k_\theta \\ M_\theta &= B_{12}\varepsilon_s + B_{22}\varepsilon_\theta + D_{12}k_s + D_{22}k_\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

其中  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  和  $D_{ij}$  分别是面内刚度元素、耦合刚度元素和弯曲刚度元素:

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{ij}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{ij}^{(k)} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{ij}^{(k)} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \right\} \quad (i, j=1, 2) \quad (2.9)$$

将(2.2)中第三式代入(2.4)中第三式:

$$\tau_{sz}^{(k)} = G_{sz}^{(k)} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R} + \psi \right) \quad (2.10)$$

将(2.10)式代入(2.7)中第五式, 可得:

$$Q_s = A_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R} + \psi \right) \quad (2.11)$$

$$\text{其中 } A_{55} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{55}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^N Q_{55}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad (2.12)$$

但由(2.10)式显而易见, 剪应力在层间不连续, 在壳体表面上也不等于零, 而且在每一层中, 沿壳厚也不按抛物线分布, 所以需要修正(2.11)式进行修正. 引入剪切修正因子 $\kappa^2$ , 可得:

$$Q_s = \kappa^2 A_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R} + \psi \right) \quad (2.13)$$

#### 4. 运动微分方程

根据本文的假设, 由 Hamilton 原理<sup>[5]</sup>, 经变分运算, 可得球壳在轴对称变形时的运动微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_{\theta s}}{\partial s} + \frac{Q_s}{R} + \frac{\text{ctg} \varphi (N_s - N_{\theta})}{R} &= J_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + J_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ \frac{\text{ctg} \varphi Q_s}{R} + \frac{\partial Q_s}{\partial s} - \frac{(N_s + N_{\theta})}{R} &= J_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\text{ctg} \varphi (M_s - M_{\theta})}{R} - Q_s &= J_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + J_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} J_0 &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^2 dz = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \left[ z + \frac{z^2}{R} + \frac{z^3}{3R^2} \right]_{z_{k-1}}^{z_k} \\ J_1 &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^2 z dz = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \left[ \frac{z^2}{2} + \frac{2z^3}{3R} + \frac{z^4}{4R^2} \right]_{z_{k-1}}^{z_k} \\ J_2 &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^2 z^2 dz = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \left[ \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{2R} + \frac{z^5}{5R^2} \right]_{z_{k-1}}^{z_k} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

其中  $\rho^{(k)}$  是第  $k$  层材料的密度.

为了方便起见, 引入下列无量纲量:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} = \frac{ul}{h^2}, \bar{w} = \frac{w}{h}, \bar{\psi} = \frac{\psi l}{h}, \quad a_{ij} = \frac{A_{ij}}{E_T h}, \quad b_{ij} = \frac{B_{ij}}{E_T h^2}, \quad d_{ij} = \frac{D_{ij}}{E_T h^3} \quad (i, j=1, 2) \\ a_{55} = \frac{\kappa^2 A_{55}}{E_T h}, \quad \bar{q} = \frac{ql^4}{E_T h^4}, \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{E_T h}{\rho l^4}} t, \quad \bar{s} = \frac{s}{l}, \quad \bar{h} = \frac{h}{l} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

将(2.8)式和(2.13)式代入(2.14)式, 再应用(2.16)式, 便可得到由中曲面位移和转角表示的运动微分方程.

### 5. 对称性条件及边界条件

球顶对称条件为:

$$\text{当 } \bar{s}=0 \text{ 时, } \bar{u}=0, \bar{w}, \bar{v}, \bar{\psi}=0 \quad (2.17)$$

固支边界条件为:

$$\text{当 } \bar{s}=1 \text{ 时, } \bar{u}=0, \bar{w}=0, \bar{\psi}=0 \quad (2.18)$$

## 三、计算方法

方程中的惯性项, 采用 Newmark- $\beta$ 法<sup>[6]</sup>进行离散化:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_{\bar{i}+\Delta\bar{i}} &= \frac{\bar{u}_{\bar{i}+\Delta\bar{i}} - \bar{u}_{\bar{i}}}{\beta(\Delta\bar{t})^2} - \frac{\dot{\bar{u}}_{\bar{i}}}{\beta\Delta\bar{t}} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{u}_{\bar{i}} \\ \dot{u}_{\bar{i}+\Delta\bar{i}} &= \dot{u}_{\bar{i}} + \{(1-\delta)\ddot{u}_{\bar{i}} + \delta\ddot{u}_{\bar{i}+\Delta\bar{i}}\}\Delta\bar{t} \\ \bar{u}_{\bar{i}+\Delta\bar{i}} &= \bar{u}_{\bar{i}} + \dot{u}_{\bar{i}}\Delta\bar{t} + \left\{\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{u}_{\bar{i}} + \beta\ddot{u}_{\bar{i}+\Delta\bar{i}}\right\}(\Delta\bar{t})^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中 $(\ddot{\cdot})$ 表示 $\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \bar{t}^2}$ ,  $(\dot{\cdot})$ 表示 $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{t}}$ ,  $\beta$ 和 $\delta$ 为常数. 本文计算中取 $\beta=0.25$ ,  $\delta=0.5$ ,

即平均加速度法.  $\bar{w}$ 和 $\bar{\psi}$ 与 $\bar{u}$ 相同, 省略.

初始条件为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(\bar{t}=0) &= 0, \dot{\bar{u}}(\bar{t}=0) = 0 \\ \bar{w}(\bar{t}=0) &= 0, \dot{\bar{w}}(\bar{t}=0) = 0 \\ \bar{\psi}(\bar{t}=0) &= 0, \dot{\bar{\psi}}(\bar{t}=0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

由(2.14)式中第二式的无量纲形式和(3.2)式可导出:

$$\ddot{u}(\bar{t}=0) = 0, \ddot{\bar{w}}(\bar{t}=0) = \bar{q}, \ddot{\bar{\psi}}(\bar{t}=0) = 0 \quad (3.3)$$

方程和边界条件中对空间坐标( $\bar{s}$ )的导数, 采用中心差分:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} &= \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta} \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{s}^2} &= \frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{\Delta^2} \end{aligned} \right\} \quad (i=0, \dots, M) \quad (3.4)$$

其中 $\Delta = \frac{1}{M}$ 为空间差分步长, 共有 $M+1$ 个网格点,  $\bar{w}$ 和 $\bar{\psi}$ 与 $\bar{u}$ 相同, 省略.

将(3.1)式和(3.4)式代入运动微分方程和边界条件, 即可得到一组线性代数方程组, 这组方程组可排列为三对角矩阵形式, 用追赶法求解.

## 四、计算结果及讨论

基于上面介绍的计算方法, 编写了 FORTRAN 程序, 对均布阶跃载荷下的轴对称层合圆柱正交异性半球壳(固支边界条件)的动态响应进行了分析, 并讨论了材料参数、结构参数和横向剪切变形的影响.

计算参数如下:

$q=20\text{MPa}$ ,  $R=600\text{mm}$ ,  $h=20\text{mm}$ ,  $\varphi_1=90^\circ$ ,  $E_T=68.6\text{GPa}$ ,

$\rho=2.032\times 10^3\text{kg/m}^3$ , 材料 1,  $[0/90]_{2T}$  铺层。

材料有关力学性能如表 1 所示;

表 1 算例中有关弹性常数的值

	材料 1	材料 2	材料 3
$E_L/E_T$	20	10	3
$G_{LT}/E_T$	0.33	0.2	0.33
$G_{LT}/E_T$	0.2	0.2	0.2
$\mu_{LT}$	0.25	0.22	0.25

在计算中需要选择一个适当的剪切修正因子  $\kappa^2$ 。现在有许多不同的剪切修正因子供选择。Mindlin<sup>[4]</sup>研究各向同性板时提出的因子为  $\frac{\pi^2}{12}$ ，这个值也常常用于层合板和层合壳。

层合壳的剪切修正因子与铺层顺序、各单层的相对厚度和各单层的材料性能有关。Whitney<sup>[7]</sup>基于无限大板的柱面弯曲的弹性解，提出了一种计算剪切修正因子的简易方法。本文计算中，采用 Whitney 方法计算剪切修正因子。图 3 给出了选取不同剪切修正因子对动态响应曲线的影响，由图可知，这种影响不大。

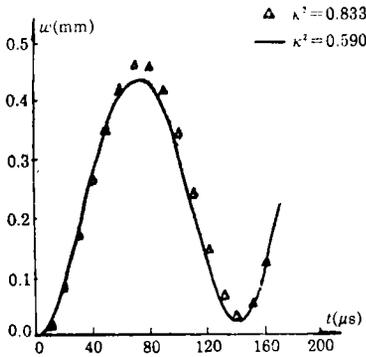


图 3 选取不同剪切修正因子对动态响应曲线的影响 ( $\bar{s}=0.5$ )

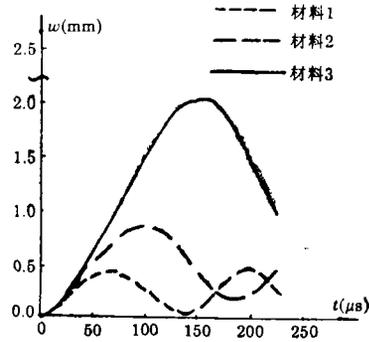


图 4 不同增强纤维材料对球壳动态响应曲线的影响 ( $\bar{s}=0.5$ )

图 4 给出了增强纤维材料不同对球壳动态响应曲线的影响。由图可知，增强纤维的弹性模量比越高，其响应幅值和周期越小。

图 5 给出了当球壳厚度不变时铺设层数对  $\bar{s}=0.5$  处最大挠度的影响。 $N=2$  时，为  $[0/90]_T$ ； $N=4$  时，为  $[0/90]_{2T}$ ； $N=6$  时，为  $[0/90]_{3T}$ ；以后类推。由图可知，随着层数的增加，最大挠度减小，且层数由 2 增加 4 时，效果十分显著，充分反应了层合材料的优点，但当层数增加至 6 层以上后，计算表明，最大挠度几乎不发生变化，所以若须通过改变铺设层数来改善层合球壳的动力特性，只须适当增加铺设层数。

图 6 给出了横向剪切变形对动态响应曲线的影响。在计算中，取很大的横向剪切模量 ( $G_{LT}$  和  $G_{TT}$ )，来模拟经典层合壳的结果。由图可知，对于半球壳，考虑横向剪切变形影响时，将使球壳的刚度增加，动态响应曲线幅值和频率都较经典层合壳理论的结果小。

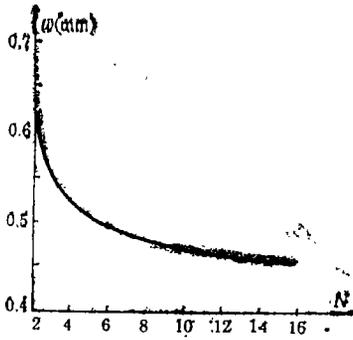


图5 不同铺设层数对 $\bar{\delta}=0.5$ 处最大挠度的影响

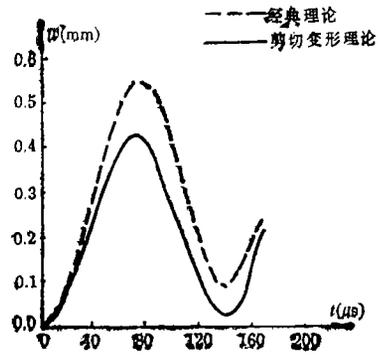


图6 横向剪切变形对动态响应曲线的影响( $\bar{\delta}=0.5$ )

### 参 考 文 献

- [1] R. S. Alwar and M. C. Narasimhan, Application of chebyshev polynomials to analysis of laminated axisymmetric spherical shells, *Composite Structures*, 15 (1990), 215—237.
- [2] I. Sheinman and S. Greif, Dynamic analysis of laminated shells of revolution, *J. Composite Mater.*, 18(3) (1984), 200—215.
- [3] Y. C. Wu, T. Y. Yang and Sunil Saigal, Free and forced nonlinear dynamics of composite shell structure, *J. Composite Mater.*, 21(10) (1987), 898—909.
- [4] R. D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of elastic plates, *J. Appl. Mech.*, 18(1) (1966), 31—38.
- [5] 鷲津久一郎, <弹性和塑性力学中的变分原理>, 科学出版社, 北京 (1984).
- [6] K. J. Bathe and E. L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1976).
- [7] J. M. Whitney, Stress analysis of thick laminated composites and sandwich plates, *J. Composite Mater.*, 6(10) (1972), 424—440.

## Dynamic Response of Laminated Orthotropic Spherical Shells Including Transverse Shear Deformation and Rotatory Inertia

Yang Yiqian    Ma Hezhong    Wang Tsunkuei

(Research Center of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, P. R. China)

### Abstract

In this paper, the equations of motion of axisymmetrically laminated cylindrical orthotropic spherical shells are derived. The effects of transverse shear deformation and rotatory inertia are considered. On this basis, the dynamic response of spherical shells under axisymmetric dynamic load is calculated by using the finite difference method. The effects of material parameters, structural parameters and transverse shear deformation are discussed.

**Key words** laminated spherical shell, dynamic response, transverse shear deformation, rotatory inertia, finite difference method