应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

J-J 方程组的渐近惯性流形*

蔡日增[1] 徐振源[1]

（许政范推荐，1995年3月27日收到）

摘　要

本文构造了 Liapunov 泛函，得出了 Josephson 结中的 sine-Gordon 方程组的高模态的衰减性质，从而给出了渐近惯性流形。

关键词　无穷维动力系统　渐近惯性流形

一、引　言

sine-Gordon 方程是当前研究无穷维动力系统的一个典型例子，数值结果已证明该方程的动力学行为由低维决定．文献[1]对此做了些理论分析工作，但并未给出低维决定这一关键问题以合理的说明．为了解释[1]的结果，文献[2]证明了 sine-Gordon 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+\sin u+g(x)=0 & (1.1)\\ u(x,t)=0, \qquad x\in\Gamma & (1.2)\\ u(0,\ x)=u_0(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,\ x)=u_1(x) & (1.3)\end{cases}$$

在$H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$中存在渐近惯性流形，其中$\Omega\subseteq\mathbf{R}^n(n\leqslant 3)$是具有充分正则边界$\Gamma$的有界开集．本文我们推广[2]的结果，证明了在 Josephson 结中的 sine-Gordon 方程组（简称为J-J方程组）

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\dfrac{\partial u_1}{\partial t}-\Delta u_1+\sin u_1+K(u_1-u_2)=f_1 & (1.4)\\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial t}-\Delta u_2+\sin u_2+K(u_2-u_1)=f_2 & (1.5)\\ u_i(x,t)=0, \qquad x\in\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n\ \ (n\leqslant 3) & (1.6)\\ u_i(x,\ 0)=u_i^0(x),\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,0)=u_i^1(x), \qquad (i=1,2) & (1.7)\end{cases}$$

存在渐近惯性流形．

在第二节中我们研究了J-J方程组的一些性质，在第三节中证明了高模态衰减的性质，在一定的条件下构造了J-J方程组的渐近惯性流形μ_0，当t充分大时，$(u_1,\partial u_1/\partial t,u_2,\ \partial u_2/\partial t)$

---

* 国家自然科学基金资助项目

1 无锡轻工大学，江苏无锡 214036

必进入X_0的离μ_0的关于X_0范数距离为$\delta^{3/2}$的领域中，其中 $\delta=O(1/\lambda_{m+1})$，$X_0=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$. 而通常的 Galerkin 方法只给出了$O(\delta^{1/2})$的精度.

二、有关J-J方程组的一些性质

设$A=-\Delta$为$L^2(\Omega)$上的线性无界自共轭算子，其定义域为

$$D(A)=\{u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\}$$

那么A^{-1}是紧的，且能定义A的幂次A^β，当装备有范数$\|A^\beta u\|_0$时，$D(A^\beta)$是 Hilbert 空间，这里$\|\cdot\|_0$和$(\cdot,\cdot)$为$L^2(\Omega)$的范数和内积，$\|\cdot\|_1=\|A^{1/2}\|_0$为$H^1(\Omega)$的范数，$|\cdot|_p$为$L^p(\Omega)$范数，$1\leqslant p<+\infty$. A的本征向量组成$L^2(\Omega)$的正交基

$$AW_j=\lambda_j W_j \qquad (j=1,2,\cdots)$$

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_j\to\infty \qquad (j\to\infty)$$

对固定的m，设$P=P_m$为$L^2(\Omega)$到$\{W_1, W_2,\cdots.W_m\}$张成的空间投影，$Q=Q_m=I-P_m$，引入 $p=P_m u$，$q=Q_m u$，并设

$$X_0=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$$

$$X_1=(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\times(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\times(H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega))$$

此时J-J方程组(1.4)～(1.7)可写为

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u_1}{dt^2}+\dfrac{du_1}{dt}+Au_1+\sin u_1+K(u_1-u_2)=f_1 & (2.1)\\[2ex] \dfrac{d^2u_2}{dt^2}+\dfrac{du_2}{dt}+Au_2+\sin u_2+K(u_2-u_1)=f_2 & (2.2)\\[2ex] u_i(0)=u_i^0,\quad \dfrac{du_i}{dt}(0)=u_i^1 \qquad (i=1,\ 2) & (2.3)\end{cases}$$

其中$f_i(x)\in H^2(\Omega)$. 由[3]，有以下引理:

引理2.1 设b是非负实数，满足$b\leqslant\inf\{1/8,\ \lambda_1/4,\ \sqrt{\lambda_1}/4\}$，$\lambda_1$是$A$的第一本征值，$(\varphi,\ \chi)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$，那么有下列不等式成立

$$\frac{1}{2}\|\chi\|_0^2+2b(\varphi,\chi)+\frac{1}{2}\|\varphi\|_1^2\geqslant\frac{1}{4}(\|\chi\|_0^2+\|\varphi\|_1^2) \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{2}\|\chi\|_0^2+2b(\varphi,\chi)+\frac{1}{2}\|\varphi\|_1^2\leqslant\frac{3}{4}(\|\chi\|_0^2+\|\varphi\|_1^2) \tag{2.5}$$

$$(1-2b)\|\chi\|_0^2+2b(\varphi,\chi)+2b\|\varphi\|_1^2\geqslant b(\|\chi\|_0^2+\|\varphi\|_1^2) \tag{2.6}$$

定理2.2 当$K\leqslant\lambda_1/8$时，(2.1)～(2.3)的解在X_0中是有界耗散的，即存在$C_0>0, r_0>0$，$t_0=t_0(r_0)$，当$t\geqslant t_0(r_0)$时，$\|u_1^1\|_0^2+\|u_2^1\|_0^2+\|u_1^0\|_1^2+\|u_2^0\|_1^2\leqslant r_0^2$的(2.1)～(2.3)的解$u_i(t)$必满足

$$\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2+\|u_1\|_1^2+\|u_2\|_1^2\leqslant C_0^2,\qquad t\geqslant t_0(r_0) \tag{2.7}$$

(以后C_i，r_i，K_i均为大于0的常数，不再一一指出).

证明 固定b满足引理2.1条件，引入泛函

$$V(\varphi_1,\ \chi_1,\ \varphi_2,\ \chi_2)=\int_\Omega\Big[\frac{1}{2}|\chi_1(x)|^2+\frac{1}{2}|A^{1/2}\varphi_1(x)|^2+\frac{1}{2}|\chi_2(x)|^2$$

$$+\frac{1}{2}|A^{1/2}\varphi_2(x)|^2+2b|\chi_1(x)\varphi_1(x)|+2b|\chi_2(x)\varphi_2(x)|-\cos\varphi_1(x)$$

$$-\cos\varphi_2(x)+\frac{K}{2}(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))^2-f_1(x)\varphi_1(x)-f_2(x)\varphi_2(x)\Big]dx \tag{2.8}$$

如果u_1，u_2是(2.1)～(2.3)的解，则当$t\geqslant 0$时，

$$\frac{d}{dt}V\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},\ u_2,\ \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)=-(1-2b)\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2-2b\|u_1\|_1^2-2b\left(\frac{\partial u_1}{\partial t},\ u_1\right)$$

$$-2b(\sin u_1,\ u_1)-2bK(u_1-u_2,\ u_1)+2b(f_1,\ u_1)-(1-2b)\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2$$

$$-2b\|u_2\|_1^2-2b\left(\frac{\partial u_2}{\partial t},\ u_2\right)-2b(\sin u_2,\ u_2)-2bK(u_2-u_1,\ u_2)+2b(f_2,\ u_2)$$

$$\leqslant -b\left[\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2+\|u_1\|_1^2\right]-2b(\sin u_1,u_1)+4bK(u_1,u_2)-2bK(\|u_1\|_0^2+\|u_2\|_0^2)$$

$$-b\left[\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2+\|u_2\|_1^2\right]-2b(\sin u_2,u_2)+2b[(f_1,u_1)+(f_2,u_2)]$$

$$\leqslant -b\left[\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2+\|u_1\|_1^2\right]-2b(\sin u_1,\ u_1)+4bK(u_1,\ u_2)-2b\Big(K\|u_1\|_0^2$$

$$-\frac{2(f_1,\sqrt{K}u_1)}{2K}+\frac{\|f_1\|_0^2}{4K}\Big)+\frac{2b\|f_1\|_0^2}{4K}-b\left[\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2+\|u_2\|_1^2\right]-2b(\sin u_2,u_2)$$

$$-2b\Big(K\|u_2\|_0^2-\frac{2(f_2,\sqrt{K}u_2)}{2K}+\frac{\|f_2\|_0^2}{4K}\Big)+\frac{2b\|f_2\|_0^2}{4K}$$

由于 $\lim\limits_{v\to\infty}\frac{\sin v}{v}=0$，于是存在$\eta>0$，使

$$v\sin v<\eta v^2+C_\eta$$

因而有

$$\frac{d}{dt}V\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},\ u_2,\ \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\leqslant -\frac{b}{2}\left[\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2+\|u_1\|_1^2+\|u_2\|_1^2\right]$$

$$-\frac{b\lambda_1}{2}[\|u_1\|_0^2+\|u_2\|_0^2]+2b\eta\|u_1\|_0^2+4bC_\eta|\Omega|$$

$$+2Kb[\|u_1\|_0^2+\|u_2\|_0^2]+2b\eta\|u_2\|_0^2+\frac{b[\|f_1\|_0^2+\|f_2\|_0^2]}{2K}$$

当$\eta=\lambda_1/8$，$K\leqslant\lambda_1/8$时，有

$$\frac{d}{dt}V\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},\ u_2,\ \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\leqslant -\frac{b}{2}\left[\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2+\|u_1\|_1^2+\|u_2\|_1^2\right]$$

$$+4bC_\eta|\Omega|+\frac{b(\|f_1\|_0^2+\|f_2\|_0^2)}{2K}$$

利用(2.4)，可得不等式

$$V\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},\ u_2,\ \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\geqslant\frac{1}{8}\left[\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2+\|u_1\|_1^2+\|u_2\|_1^2\right]$$

$$-2|\Omega|-\frac{4}{\lambda_1}[\|f_1\|_0^2+\|f_2\|_0^2]$$

利用(2.5)，可得不等式

$$V\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},\ u_2,\ \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\leqslant\frac{3}{4}\left[\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2+\|u_1\|_1^2+\|u_2\|_1^2\right]$$

$$+2|\Omega|+\left(\frac{K}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_1}\right)(\|u_1\|_1^2+\|u_2\|_1^2)+\|f_1\|_0^2+\|f_2\|_0^2$$

由此可得

$$\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2+\|u_1\|_1^2+\|u_2\|_1^2\geqslant \frac{1}{3/4+K/\lambda_1+1/\lambda_1}\left[V\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},u_2,\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\right.$$
$$\left.-2|\Omega|-\|f_1\|_0^2-\|f_2\|_0^2\right]$$

设 $V^*\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},u_2,\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)=V\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},u_2,\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)+2|\Omega|+\frac{4}{\lambda_1}\|f_1\|_0^2+\frac{4}{\lambda_1}\|f_2\|_0^2$

根据前面得到的不等式知$V^*(u_1,\ \partial u_1/\partial t,\ u_2,\ \partial u_2/\partial t)\geqslant 0$，而且有

$$\frac{d}{dt}V^*\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},u_2,\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\leqslant-\frac{b}{2}\left[\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2+\|u_1\|_1^2+\|u_2\|_1^2\right]$$

$$+4bC_\eta|\Omega|+\frac{b(\|f_1\|_0^2+\|f_2\|_0^2)}{2K}$$

$$\leqslant-K_0V^*\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},u_2,\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)+C_1$$

其中

$$K_0=\frac{b}{2(3/4+K/\lambda_1+1/\lambda_1)},$$

$$C_1=(4K_0+4b\,C_\eta)|\Omega|+\left(\frac{4K_0}{\lambda_1}+\frac{b}{2K}\right)(\|f_1\|_0^2+\|f_2\|_0^2)$$

积分上式得

$$V^*\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},u_2,\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\leqslant V^*(u_1^0,\ u_1^1,\ u_2^0,\ u_2^1)\exp[-K_0t]$$

$$+\frac{C_1}{K_0}(1-\exp[-K_0t])$$

当$t\geqslant t_0(r_0)$，即t充分大时有

$$V^*\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},u_2,\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\leqslant 2C_1/K_0$$

故得

$$\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2+\|u_1\|_1^2+\|u_2\|_1^2\leqslant\frac{16C_1}{K_0}=C_0^2$$

定理2.3 对于任意$r_0>0$，存在$C_0^*(r_0)$，对于满足$\|u_1^0\|_1^2+\|u_2^0\|_1^2+\|u_1^1\|_0^2+\|u_2^1\|_0^2\leqslant r_0^2$的(2.1)～(2.3)的解成立估计式

$$\int_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2\right)ds\leqslant C_0^*(r_0) \tag{2.9}$$

证明 令

$$V^0(\varphi_1,\ \chi_1,\ \varphi_2,\ \chi_2)=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|\chi_1(x)|^2+\frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}\varphi_1(x)|^2\right.$$

$$-\cos\varphi_1(x)-\cos\varphi_2(x)+\frac{1}{2}|\chi_2(x)|^2+\frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}\varphi_2(x)|^2$$

$$+\frac{K}{2}(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))^2-f_1(x)\varphi_1(x)-f_2(x)\varphi_2(x)\Big]dx$$

如果u_1，u_2是(2.1)～(2.3)的解，则

$$\frac{d}{dt}V^0\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},u_2,\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)=-\left(\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2\right)\leqslant 0$$

从而 $V^0\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},u_2,\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\leqslant V^0(u_1^0,\ u_1^1,\ u_2^0,\ u_2^1)$

$$V^0\left(u_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial t},u_2,\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)-V^0(u_1^0,\ u_1^1,\ u_2^0,\ u_2^1)=-\int_0^t\left(\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2\right)ds$$

由于

$$V^0(\varphi_1,\ \chi_1,\ \varphi_2,\ \chi_2)\leqslant\tilde{C}_3[\|\chi_1\|_0^2+\|\varphi_1\|_1^2+\|\chi_2\|_0^2+\|\varphi_2\|_1^2+1]$$

$$V^0(\varphi_1,\ \chi_1,\ \varphi_2,\ \chi_2)\geqslant\tilde{C}_4[\|\chi_1\|_0^2+\|\varphi_1\|_1^2+\|\chi_2\|_0^2+\|\varphi_2\|_1^2-1]$$

故

$$\int_0^{+\infty}\left[\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_0^2\right]ds\leqslant 2V^0(u_1^0,\ u_1^1,\ u_2^0,\ u_2^1)\leqslant C_0^*(r_0)$$

定理2.4 任意$r_1>0$，存在$C_3>0$，$C_2^*>0$，$C_3^*>0$，对于满足$\|u_1^1\|_1^2+\|u_1^0\|_2^2+\|u_2^1\|_1^2+\|u_2^0\|_2^2\leqslant r_1^2$的(2.1)～(2.3)的解成立以下估计式

$$\left\|\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_1^2+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_1^2\leqslant C_2^*+C_3^*\exp[-C_3 t] \tag{2.10}$$

证明 因为$\|u_1^1\|_1^2+\|u_1^0\|_2^2+\|u_2^1\|_1^2+\|u_2^0\|_2^2\leqslant r_1^2$，所以$(u_1(t),\ u_2(t),\ \partial u_1/\partial t,\ \partial u_2/\partial t)\in C_0([0,\ +\infty),\ X_1)$.

虑考以下对线性双曲方程组

$$\text{(i)}\quad\begin{cases}\dfrac{d^2w_1}{dt^2}+\dfrac{dw_1}{dt}+Aw_1=-K(w_1-w_2)-\cos u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial t} & (2.11)\\[2ex] \dfrac{d^2w_2}{dt^2}+\dfrac{dw_2}{dt}+Aw_2=-K(w_2-w_1)-\cos u_2\dfrac{\partial u_2}{\partial t} & (2.12)\end{cases}$$

(ii) $w_i(x,t)=0,\qquad x\in\Gamma\quad(i=1,2)$

(iii) $w_i(0,x)=u_i^1\qquad(i=1,2)$

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}(0,x)=f_1-u_1^1-\sin u_1^0-K(u_1^0-u_2^0)-Au_1^0$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t}(0,x)=f_2-u_2^1-\sin u_2^0-K(u_2^0-u_1^0)-Au_2^0$$

由于$\cos u_i(\partial u_i/\partial t)\in C^0([0,+\infty),\ L^2(\Omega))$，$(i=1,2)$，则$(w_1,\ w_2,\ \partial w_1/\partial t,\ \partial w_2/\partial t)\in X_0$，由线性双曲方程组解的唯一性知$w_1=\partial u_1/\partial t$，$w_2=\partial u_2/\partial t$. 固定$b>0$满足引理2.1条件，引进泛函

$$\tilde{V}(\varphi_1,\ \chi_1,\ \varphi_2,\ \chi_2)=\int_\Omega\Big[\frac{1}{2}|\chi_1(x)|^2+2b|\chi_1(x)\varphi_1(x)|+\frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}\varphi_1(x)|^2$$

$$+\frac{1}{2}|\chi_2(x)|^2+2b|\chi_2(x)\varphi_2(x)|+\frac{1}{2}|A^{\frac{1}{2}}\varphi_2(x)|^2+\frac{K}{2}(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))^2\Big]dx \tag{2.13}$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{V}\left(w_1,\ \frac{\partial w_1}{\partial t},\ w_2,\ \frac{\partial w_2}{\partial t}\right)\leqslant-\frac{b}{2}\left[\left\|\frac{\partial w_1}{\partial t}\right\|_0^2+\|w_1\|_1^2+\left\|\frac{\partial w_2}{\partial t}\right\|_0^2+\|w_2\|_1^2\right]$$

$$+\left(\frac{1}{2b}+\frac{2b}{\lambda_1}+4bK\right)(\|w_1\|_0^2+\|w_2\|_0^2)$$

因为 $\tilde{V}\left(w_1,\ \frac{\partial w_1}{\partial t},\ w_2,\ \frac{\partial w_2}{\partial t}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left[\left\|\frac{\partial w_1}{\partial t}\right\|_0^2+\|w_1\|_1^2+\left\|\frac{\partial w_2}{\partial t}\right\|_0^2+\|w_2\|_1^2\right]$

所以可得

$$\frac{d}{dt}\tilde{V}\left(w_1,\ \frac{\partial w_1}{\partial t},\ w_2,\ \frac{\partial w_2}{\partial t}\right)\leqslant-C_3\tilde{V}\left(w_1,\ \frac{\partial w_1}{\partial t},\ w_2,\ \frac{\partial w_2}{\partial t}\right)+C_4(\|w_1\|_0^2+\|w_2\|_0^2)$$

由此可得

$$\tilde{V}\left(w_1,\ \frac{\partial w_1}{\partial t},\ w_2,\ \frac{\partial w_2}{\partial t}\right)\leqslant\tilde{V}\left(w_1(0,x),\frac{\partial w_1}{\partial t}(0,x),\ w_2(0,x),\ \frac{\partial w_2}{\partial t}(0,x)\right)$$

$$\cdot\exp[-C_3t]+\exp[-C_3t]\int_0^t\exp[C_3s]C_4(\|w_1\|_0^2+\|w_2\|_0^2)ds$$

从而得估计式(2.10)．对充分大的t_1，当$t>t_1$时成立

$$\left\|\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|_1^2+\left\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\right\|_1^2\leqslant C_5^2$$

类似于以上推导可得

定理2.5 若$(u_1,\ u_2)$是(2.1)～(2.3)的满足条件

$$\|u_1^1\|_2^2+\|u_2^1\|_2^2+\|u_1^0\|_3^2+\|u_2^0\|_3^2\leqslant r_3^2$$

的解，则对充分大的t_2，当$t>t_2$时，成立以下估计式

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\left\|\frac{\partial^3 u_i}{\partial t^3}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right\|_1^2+\left\|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right\|_2^2\right]\leqslant C_6^2$$

定理2.6 若$(u_1,\ u_2)$是(2.1)～(2.3)的满足条件 $\|u_1^1\|_4^2+\|u_2^1\|_4^2+\|u_1^0\|_5^2+\|u_2^0\|_5^2\leqslant r_4^2$ 的解，则对充分大的t_4，当$t>t_4$时成立以下估计式

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\left\|\frac{\partial^5 u_i}{\partial t^5}\right\|_0^2+\left\|\frac{\partial^4 u_i}{\partial t^4}\right\|_1^2\right]\leqslant C_7^2$$

三、渐近惯性流形

令$\theta(s)$为C^∞截断函数，$\theta(s)=1$，$0\leqslant s\leqslant1$，$\theta(s)=0$，$s>2$，$|\theta'(s)|\leqslant2$，$0\leqslant s\leqslant2$．定义$F_i(s)=\theta(s^2/C_0^2)[\sin s-f_i(x)]$ $(i=1,2)$，其中C_0为(2.7)定义的吸引集半径．设$u_i(t)$ $(i=1,2)$满足方程

$$\begin{cases}\frac{d^2u_1}{dt^2}+\frac{du_1}{dt}+Au_1+F_1(u_1)+K(u_1-u_2)=0 & (3.1)\\ \frac{d^2u_2}{dt^2}+\frac{du_2}{dt}+Au_2+F_2(u_2)+K(u_2-u_1)=0 & (3.2)\end{cases}$$

$$u_i(0)=u_i^0,\ du_i(0)/dt=u_i^1\qquad(i=1,2)$$

其中u_i^0，u_i^1 $(i=1,2)$满足第二节中所有定理的条件．

令$\lambda=\lambda_m$，$\Lambda=\lambda_{m+1}$，$\delta=\lambda_1/\lambda_{m+1}$，则成立不等式

$$\|A^{\beta+\frac{1}{2}}p\|_0^2\leqslant\lambda\|A^\beta p\|_0^2,\qquad \forall p\in P_mD(A^{\beta+\frac{1}{2}})\tag{3.3}$$

$$\|A^{\beta+\frac{1}{2}}q\|_0^2\geqslant\Lambda\|A^\beta q\|_0^2,\qquad \forall q\in Q_mD(A^{\beta+\frac{1}{2}})\tag{3.4}$$

再令 $p_i=P_mu_i$, $q_i=(I-P_m)u_i=Q_mu_i(i=1,\ 2)$，则(3.1)，(3.2)可分解为

$$\begin{cases}\dfrac{d^2p_1}{dt^2}+\dfrac{dp_1}{dt}+Ap_1+P_mF_1(p_1+q_1)+K(p_1-p_2)=0 & (3.5)\\[2ex] \dfrac{d^2q_1}{dt^2}+\dfrac{dq_1}{dt}+Aq_1+Q_mF_1(p_1+q_1)+K(q_1-q_2)=0 & (3.6)\\[2ex] \dfrac{d^2p_2}{dt^2}+\dfrac{dp_2}{dt}+Ap_2+P_mF_2(p_2+q_2)+K(p_2-p_1)=0 & (3.7)\\[2ex] \dfrac{d^2q_2}{dt^2}+\dfrac{dq_2}{dt}+Aq_2+Q_mF_2(p_2+q_2)+K(q_2-q_1)=0 & (3.8)\end{cases}$$

引理3.1 当t充分大，$t>t_4$时，q_i满足

$$\|q_i\|_1\leqslant K_5\delta^{1/2},\quad \|q_i\|_0\leqslant K_5\delta\qquad (i=1,2)\tag{3.9}$$

证明 在$L^2(\Omega)$中用Aq_1与(3.6)作内积，并注意到d^2q_i/dt^2的有界性，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|q_1\|_1^2+\|Aq_1\|_0^2=-(Q_mF_1(p_1+q_1),\ Aq_1)-(K(q_1-q_2),\ Aq_1)$$
$$-(d^2q_1/dt^2,\ Aq_1)\leqslant(K_{11}+K_{12}+K_{13})\|Aq_1\|_0$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\|Aq_1\|_0^2+\left(\frac{K_{11}+K_{12}+K_{13}}{2}\right)^2$$

从而

$$d\|q_1\|_1^2/dt+\Lambda\|q_1\|_1^2\leqslant K_{14}$$

则有

$$\|q_1\|_1^2\leqslant\|q_1(t_0)\|_1^2\exp[-\Lambda(t-t_0)]+(K_{14}/\Lambda)(1-\exp[-\Lambda(t-t_0)])$$

故当$t>t_4$充分大时，有下式成立

$$\|q_1\|_1^2\leqslant K_5^2\delta,\quad \|q_1\|_0^2\leqslant K_5^2\delta^2$$

同理，在$L^2(\Omega)$中用Aq_2与(3.8)作内积，得

$$\|q_2\|_1^2\leqslant K_5^2\delta,\quad \|q_2\|_0^2\leqslant K_5^2\delta^2$$

从而引理3.1得证。

类似可以证明

引理3.2 当t充分大，$t>t_4$时，成立以下估计式

$$\left\|\frac{dq_i}{dt}\right\|_0\leqslant K_6\delta,\quad \left\|\frac{d^2q_i}{dt^2}\right\|_0\leqslant K_7\delta,\quad \left\|\frac{d^3q_i}{dt^3}\right\|\leqslant K_8\delta\qquad (i=1,2)\tag{3.10}$$

我们现在构造惯性流形μ_0，令

$$Aq_1+Q_mF_1(p_1)+K(q_1-q_2)=0,\quad Aq_2+Q_mF_2(p_2)+K(q_2-q_1)=0\tag{3.11}$$

对任意p_1，$p_2\in P_mH_0^1(\Omega)$，由(3.11)决定

$$q_{10}=\Phi_{01}(p_1,\ p_2),\quad q_{20}=\Phi_{02}(p_1,\ p_2)$$

函数Φ_{0i}：$PH_0^1\times PH_0^1\to QH_0^1$，这定义了$X_0$中的光滑流形

$$\mu_0=\{p_1+q_{10},\ p_1'+q_{10}',\ p_2+q_{20},\ p_2'+q_{20}'\}$$

这里撇表示对t求导。

定理3.4 当t充分大，$t>t_4$时，(2.1)～(2.3)的轨道必进入X_0的离μ_0的关于X_0的范数距离为$O(\delta^{3/2})$的邻域中。

证明 令$u_1=p_1+q_1$，$u_1'=p_1'+q_1'$，$u_2=p_2+q_2$，$u_2'=p_2'+q_2'$为(3.1)，(3.2)在X_0中的

轨道。因为

$$q_{10}=\Phi_{01}(p_1, p_2), \quad q_{20}=\Phi_{02}(p_1, p_2)$$

则 $(p_1(t)+q_{10}(t),\ p_1'(t)+q_{10}'(t),\ p_2(t)+q_{20}(t),\ p_2'(t)+q_{20}'(t))$

在μ_0上。定义(u_1, u_1', u_2, u_2')与μ_0的距离为

$$\mathrm{dist}(u_1, u_2, \mu_0)=\|q_{10}(t)-q_1(t)\|_1+\|q_{20}(t)-q_2(t)\|_1+\|q_{10}'(t)-q_1'(t)\|_0+\|q_{20}'(t)-q_2'(t)\|_0$$

令$X_{10}=q_{10}(t)-q_1(t)$，$X_{20}=q_{20}(t)-q_2(t)$，则由(3.11)与(3.6)，(3.8)可得

$$AX_{10}=Q_mF_1(p_1+q_1)-Q_mF_1(p_1)-K(X_{10}-X_{20})+\frac{d^2q_1}{dt^2}+\frac{dq_1}{dt}$$

$$AX_{20}=Q_mF_2(p_2+q_2)-Q_mF_2(p_2)-K(X_{20}-X_{10})+\frac{dq_2}{dt^2}+\frac{dq_2}{dt}$$

$$AX_{10}'=Q_mF_1'(p_1+q_1)(p_1'+q_1')-Q_mF_1(p_1)p_1'-K(X_{10}'-X_{20}')+\frac{d^3q_1}{dt^3}+\frac{d^2q_1}{dt^2}$$

$$AX_{20}'=Q_mF_2'(p_2+q_2)(p_2'+q_2')-Q_mF_2(p_2)p_2'-K(X_{20}'-X_{10}')+\frac{d^3q_2}{dt^3}+\frac{d^2q_2}{dt^2}$$

则有 $\|AX_{10}\|_0\leqslant K_{41}\delta$, $\|AX_{20}\|_0\leqslant K_{42}\delta$

$\|AX_{10}'\|_0\leqslant K_{51}\delta$, $\|AX_{20}'\|_0\leqslant K_{62}\delta$

因此 $\mathrm{dist}(u_1, u_2, \mu_0)\leqslant K_5\delta^{3/2}+K_6\delta^2=O(\delta^{3/2})$

参 考 文 献

[1] A. R. Flasch Bishop, Correlations between chaos in a perturbed sine-Gordon equation and a truncated model system, *SIAM. J. Math. Anal.*, 21(6) (1990), 1511—1536.

[2] Xu Zhenyuan and Liu Zengrong, Approximate inertial manifolds for sine-Gordon equation, *Kexue Tongbao*, 38(19) (1993), 1752—1753.

[3] J. K. Hale and G. Raugel, Upper semicontinuity of the attractor for a singularly perturbed hyperbolic equation, *J. Diff. Equn.*, 73 (1988), 197—214.

[4] J. K. Hale and J. Scheurle, Smoothness of bounded solutions of nonlinear evolution equation, *J. Diff. Equn.*, 56 (1985), 142—163.

Approximate Inertial Manifolds for the System of the J-J Equations

Cai Rizeng Xu Zhenyuan

(Wuxi Institute of Light Industry, Wuxi, Jiangsu 214036, P.R. China)

Abstract

In this paper the Liapunov functionals have been constructed, the decay property of the high dimensional modes of the J-J equations in the Josephson junctions is obtained, and thus the approximate inertial manifolds are given.

Key words approximate inertial manifolds, infinite dimensional dynamical systems