应用数学和力学，第17卷 第5期（1996年5月）
Applied Mathematics and Mechaaics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 论非完整系统的Hamilton原理与完整系统的Hamilton原理的统一性

梁立孚[1]　韦　扬[1]

（钱伟长推荐，1995年9月2日收到）

**摘　要**

本文通过典型实例和理论分析证明了：在有势力作用下，对于非完整系统，Hamilton原理同样有像完整系统那样使Lagrange函数取驻值的形式；使 Lagrange 函数变分对时间积分为零的形式是前者的演变形式；因此，两种形式是统一的。

**关键词**　非完整系统　完整系统　Hamilton原理　真实轨道　测地轨道

## 一、导　言

通过分析一个典型实例，Pars，L.A.得到如下结论：当考虑非完整系统时，Hamilton原理被推广为两种不同的形式。一种推广

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L(q,\ \dot{q},\ t)dt=0 \tag{1.1}$$

是不对的；另一种推广

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L(q,\ \dot{q},\ t)dt=0 \tag{1.2}$$

是正确的[1]．这一结论肯定了Hamilton原理能够应用于非完整系统，是对非完整系统分析动力学的重大贡献．因此，这一结论得到Rumyantsev．V.V.等许多知名学者的支持[2]．他们认为，在有势力作用下，对于非完整系统，Hamilton 原理没有像完整系统那样使Lagrange函数取驻值的形式，而有Lagrange函数变分对时间积分为零的形式．

通过典型实例和理论分析，我们将如上的结论推广为：在有势力作用下，对于非完整系统，Hamilton原理同样有像完整系统那样使Lagrange函数取驻值的形式，Lagrange函数变分对时间积分为零的形式是前者演变形式，因此，两种形式是统一的．

## 二、从一个典型实例得出的结论

考虑一个单位质量的质点在惯性系中运动，外作用力为零，受有一非完整约束．

1　哈尔滨工程大学，哈尔滨 150001．

$$z\dot{x}-\dot{y}=0 \tag{2.1}$$

假设其边界条件为

$$\begin{aligned} &x=\bar{x}_0,\ y=\bar{y}_0,\ z=\bar{z}_0 \qquad (t=t_0)\\ &x=\bar{x}_1,\ y=\bar{y}_1,\ z=\bar{z}_1 \qquad (t=t_1) \end{aligned} \tag{2.2}$$

### 2.1 应用$\delta\int Ldt=0$，不应用Chetaev条件

这一问题的Lagrange函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \tag{2.3}$$

引入Lagrange乘子，将约束方程纳入(1.1)中

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\mu(\dot{y}-z\dot{x})\right]dt=0 \tag{2.4}$$

经变分运算，可得测地轨道方程

$$\ddot{x}-\dot{\mu}z-\mu\dot{z}=0 \tag{2.5}$$

$$\ddot{y}+\dot{\mu}=0 \tag{2.6}$$

$$\ddot{z}+\mu\dot{x}=0 \tag{2.7}$$

方程(2.5)、(2.6)、(2.7)与约束方程(2.1)一起，并考虑适当的定解条件，可以求得系统的测地轨道。

### 2.2 应用$\int\delta Ldt=0$，应用Chetaev条件

如果对约束方程(2.1)应用Chetaev条件，则有

$$z\delta x-\delta y=0 \tag{2.8}$$

引入Lagrange乘子，将约束方程(2.8)纳入(1.2)中

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\lambda(\delta y-z\delta x)\right]dt=0 \tag{2.9}$$

经变分运算，可得真实轨道方程

$$\ddot{x}+\lambda z=0 \tag{2.10}$$

$$\ddot{y}-\lambda=0 \tag{2.11}$$

$$\ddot{z}=0 \tag{2.12}$$

方程(2.10)、(2.11)、(2.12)与约束方程(2.1)一起，并考虑到适当的定解条件，可求得系统的真实轨道。

### 2.3 应用$\int\delta Ldt=0$，不应用Chetaev条件

如果不应用Chetaev条件，将(2.1)变分，可得

$$\delta\dot{y}=\delta(z\dot{x}) \tag{2.13}$$

引入Lagrange乘子，将(2.13)式纳入(1.2)式中

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\mu[\delta\dot{y}-\delta(z\dot{x})]\right\}dt=0 \tag{2.14}$$

经变分运算，可得测地轨道方程

$$\ddot{x}-\mu\dot{z}-\dot{\mu}z=0 \tag{2.15}$$

$$\ddot{y}+\dot{\mu}=0 \tag{2.16}$$

$$\ddot{z}+\mu\dot{x}=0 \tag{2.17}$$

方程(2.15)、(2.16)，(2.17)和约束方程(2.1)一起，并考虑到适当的定解条件，可以求得系统的测地轨道。

## 2.4 分析问题

在§2.1中，应用(1.1)式求得系统的测地轨道方程，进而解得系统的测地轨道；在§2.2中，应用(1.2)式求得系统的真实轨道方程，进而解得系统的真实轨道。由此我们似乎可以做出结论：在有势力作用下，对于非完整系统，Hamilton原理没有像完整系统那样取(1.1)的形式，而有(1.2)的形式。

但是，我们还应当注意到：在§2.3中，同样应用(1.2)式，却得不到真实轨道方程，而得到测地轨道方程。比较§2.2和§2.3的全过程可以发现，二者的差别在于在§2.2中应用了Chetaev条件，而在§2.3中没有应用Chetaev条件，从而启发我们进一步查明，§2.1与§2.2得到不同结果的原因，也在于§2.1中没有应用Chetaev条件，而在§2.2中应用了Chetaev条件。那么，能否由(1.1)式出发，应用Chetaev条件导出真实轨道方程呢？回答是肯定的，不过应当注意到，在(1.1)式中引入Chetaev条件不如在(1.2)式中引入那么方便。我们将在§2.5中实现这一点。

## 2.5 应用$\delta\int Ldt=0$，应用Chetaev条件

将约束方程(2.1)变分，可得

$$z\delta\dot{x}+\dot{x}\delta z-\delta\dot{y}=\dot{x}\delta z-\dot{z}\delta x+\frac{d}{dt}(z\delta x-\delta y)=0 \tag{2.18}$$

应用Chetaev条件(2.8)，上式变换为

$$\dot{x}\delta z-\dot{z}\delta x=0 \tag{2.19}$$

在§2.1中，(2.4)式可以变换为

$$\int_{t_0}^{t_1}\{-[\ddot{x}-(\mu z)']\delta x-(\ddot{y}+\dot{\mu})\delta y-(\ddot{z}+\mu\dot{x})\delta z\}dt=0 \tag{2.20}$$

将(2.19)式代入(2.20)式，可得

$$\int_{t_0}^{t_1}[-(\ddot{x}-\dot{\mu}z)\delta x-(\ddot{y}+\dot{\mu})\delta y-\ddot{z}\delta z]dt=0 \tag{2.21}$$

由于引入Lagrange乘子，使得$\delta x$，$\delta y$，$\delta z$相互独立，故由(2.21)式可得

$$\ddot{x}-\dot{\mu}z=0 \tag{2.22}$$

$$\ddot{y}+\dot{\mu}=0 \tag{2.23}$$

$$\ddot{z}=0 \tag{2.24}$$

可见，只要令$\lambda=-\dot{\mu}$，则(2.22)、(2.23)、(2.24)式立即变为真实轨道方程(2.10)、(2.11)(2.12)式。这便说明(2.22)、(2.23)、(2.24)式也是真实轨道方程。

下面，我们将讨论一般情况。

# 三、一般情况

考虑一个动力学系统，该系统由Lagrange函数和非完整约束的非线性方程

$$f_\beta(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)=0 \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ g;\ n>g) \tag{3.1}$$

来描述．$\dot{q}_s=\frac{d}{dt}q_s$，这里$q_s$为广义坐标，而$\dot{q}_s$为广义速度，$t$是时间．假设边界条件为

$$q_s=\bar{q}_{s0}\quad(t=t_0),\quad q_s=\bar{q}_{s1}\quad(t=t_1)\tag{3.2}$$

对于如上的系统，Hamilton原理的泛函为

$$\Pi=\int_{t_0}^{t_1}L(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)dt\tag{3.3}$$

其附加条件为(3.1)式，边界条件为(3.2)式．按照专著[3][4]，积分形式的泛函与其附加条件和边界条件一起，构成一个变分原理．

### 3.1　应用$\delta\int Ldt=0$，不应用Chetaev条件

将$\Pi$变分，并令$\delta\Pi=0$，则得(1.1)式．引入Lagrange乘子$\mu_\beta$，将附加条件(3.1)纳入(1.1)式，得

$$\delta\Pi=\delta\int_{t_0}^{t_1}\Big[L(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta f_\beta(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)\Big]dt=0\tag{3.4}$$

交换变分和积分的次序，可得

$$\delta\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta L(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\delta f_\beta(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)\Big]dt=0\tag{3.5}$$

经变分运算，可得测地轨道方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\Big(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\Big)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}=0\tag{3.6}$$

方程(3.6)与其附加条件(3.1)一起，并考虑到适当的定解条件，可以解得系统的测地轨道．

### 3.2　应用$\int\delta Ldt=0$，应用Chetaev条件

将$\Pi$变分，并令$\delta\Pi=0$，经交换变分和积分的次序，可得(1.2)式．应用 Chetaev 条件，其附加条件变换为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0\tag{3.7}$$

引入Lagrange乘子$\lambda_\beta$，将附加条件(3.7)纳入(1.2)中

$$\delta\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\delta L(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\Big]dt=0\tag{3.8}$$

经变分运算，得真实轨道方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}=0\tag{3.9}$$

方程(3.9)与附加条件(3.1)一起，并考虑到适当的定解条件，可以解得系统的真实轨道．

### 3.3　应用$\int\delta Ldt=0$，不应用Chetaev条件

如果不应用Chetaev条件，将(3.1)变分，则有

$$\delta f_\beta(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)=0\tag{3.10}$$

引入Lagrange乘子$\mu_\beta$，将附加条件(3.10)纳入(1.2)中

$$\delta\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta L(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\delta f_\beta(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)\right]dt=0 \tag{3.11}$$

经变分运算，得测地轨道方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}=0 \tag{3.6}$$

方程(3.6)与其附加条件(3.1)一起，并考虑到适当的定解条件，可以解得系统的测地轨道．

### 3.4 分析问题

在§3.1中，应用(1.1)式求得系统的测地轨道方程，进而解得系统的测地轨道；在§3.2中，应用(1.2)式求得系统的真实轨道方程，进而解得系统的真实轨道．由此我们似乎可以做出结论：在有势力作用下，对于非完整系统，Hamilton原理没有像完整系统那样取(1.1)的形式，而有(1.2)的形式．但是，我们还应当注意到：在§3.3中，同样应用(1.2)式，却得不到真实轨道方程，而得到测地轨道方程．比较§3.2和§3.3的全过程可以发现，二者的差别在于在§3.2中应用了Chetaev条件，而在§3.3中没有应用Chetaev条件，从而启发我们进一步查明，§3.1与§3.2得到不同结果的原因，也在于§3.1中没有应用Chetaev条件，而在§3.2中应用了Chetaev条件．那么，能否由(1.1)式出发，应用Chetaev条件导出真实轨道方程呢？回答是肯定的，不过应当注意到，在(1.1)式中引入Chetaev条件不如在(1.2)式中引入那么方便．我们将在§3.5中实现这一点。

### 3.5 应用$\delta\int Ldt=0$，应用Chetaev条件

将附加条件(3.1)变分，可得

$$\delta f_\beta(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s+\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0 \tag{3.12}$$

应用Chetaev条件(3.7)，则(3.12)式变换为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s=0 \tag{3.13}$$

在§3.1中，(3.5)式可以变换为

$$\delta\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)-\sum_{s=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right]\delta q_s dt$$
$$=0 \tag{3.14}$$

将(3.13)式代入(3.14)式，可得

$$\delta\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s dt=0 \tag{3.15}$$

由于引入Lagrange乘子，使得$\delta q_s$相互独立，故由(3.15)式可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}=0 \tag{3.16}$$

可见，只要令$\lambda_\beta=-\dot{\mu}_\beta$，则(3.16)式立即变换为真实轨道方程(3.9)，这便说明(3.16)式也是真实轨道方程。

## 四、结　论

本文的工作表明，变分和积分次序可以交换，这是变分学中的基本原理，这一基本原理也适用于非完整系统。这样一来，只要将(1.1)式中变分和积分次序交换，便得到(1.2)式。应用(1.1)式和应用(1.2)式，都既能导出真实轨道方程又能导出测地轨道方程。之所以导出不同方程，不是因为使用(1.1)式和(1.2)式的区别所致，而是因为是否应用 Chetaev 条件所致。因此，我们可以得出结论：在有势力作用下，对于非完整系统，Hamilton原理同样有像完整系统那样使Lagrange函数取驻值的形式；而使Lagrange函数变分对时间积分为零的形式是前者的演变形式；因此，两种形式是统一的。

## 参 考 文 献


[1] L. A. Pars, Variation principles in dynamics, *J. Mech. and Appl. Math.*, 7 (3) (1954), 338—351.

[2] B. B. Румянцев, О принциие Гамильтона для неголоноллных систем, *Прикл. Мат. и Мех.*, 42(3) (1978), 387—399.

[3] 钱伟长，《变分法及有限元》，科学出版社 (1980).

[4] 胡海昌，《弹性力学变分原理及其应用》，科学出版社 (1981).


# On the Unification of the Hamilton Principles in Non-Holonomic System and in Holonomic System


Liang Lifu　　Wei Yang

(*Harbin Engineering University, Harbin* 150001, *P. R. China*)



**Abstract**

In this paper, by means of typical engineering examples and deep theortical analysis, we prove that: under the effect of conservative force, the Hamilton principles in holonomic systems have the same formula $\delta\int Ldt=0$. The formula $\int\delta Ldt=0$ is an evolved form of the formula $\delta\int Ldt=0$. Therefore, the two formulas are unified.



**Key words** non-holonomic system, holonomic system, the Hamilton principle, actual trajectory, geodesic trajectory