应用数学和力学，第17卷 第5期（1996年5月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

函数的次微分性质*

郭 兴 明[1]

（戴世强推荐，1995年6月16日收到）

摘 要

本文给出了函数的Fenchel次微分、Frechet次微分，Hadamard次微分，Gateaux 次微分的一些重要性质，并对函数的性质尤其是凸性给出其次微分刻画。

关键词 次微分 广义中值定理 凸性质 LiPschitz性质 单调。

一、引 言

在凸分析及其应用中，Fenchel次微分是最重要的概念之一[1,2]。为了描述一般函数的性质，人们引入了其它许多类型的次微分如Clarke次微分，Frechet次微分，Gateaux次微分，Hadamard 次微分等，他们在非凸分析、非光滑分析及许多应用领域中起着重要作用[3,4,5,6]。这些次微分也用来刻画函数的凸性并给出了许多有关单调和凸性之间的关系[3,7,8]。最近R. Correa等在[9]中证明了定义在自反Banach空间上的下半连续是凸的当且仅当其Clarke次微分是单调的，在[10]中他们将这一结果推广到一般Banach空间上。其中用到了如[11]中的逼近中值定理（见[9,10]）而建立此中值定理的关键是f的次微分必须满足如下性质

$$\partial^c(f+\lambda g)(x)\subseteq\partial^c f(x)+\lambda\partial g(x) \tag{c}$$

这里$g:E\to R$是连续凸函数。非常遗憾的是上述性质对一般其它的次微分尤其是Frehet次微分，Proximal次微分，Gateaux次微分，及Hadamard次微分等都不满足[8]。

本文中对Frechet，Hadamard 及 Gateaux 次微分我们利用光滑变分原理[12]证明如[10,11]中的广义中值定理仍然成立，并给出函数的凸性，Lipschitz 性质及局部常数性质的次微分刻画。最后我们讨论了严格凸与严格单调之间的关系。

二、预 备 知 识

本文中E表示自反Banach空间，$f:E\to R\cup\{+\infty\}$ 是下半连续函数，$Df=\{x\in E\mid f(x)<+\infty\}$。$x\in E$，$f(x)$有限。

---

* 谨以此文纪念导师郭仲衡教授。

1 上海大学；上海市应用数学和力学研究所，上海200072。

f在x的Frchet次微分是集合

$$\partial^F f(x)=\left\{u\in E^*\mid \liminf_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)-\langle u,y\rangle}{|y|}\geqslant 0\right\}$$

这里 E^*表示E之共轭空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$是$E$与$E^*$之共轭对.

f在x的Gateaux次微分是集合

$$\partial^G f(x)=\left\{u\in E^*\mid \liminf_{t\to 0+}\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}\geqslant\langle u,y\rangle,\quad \forall y\in E\right\}$$

f在x的Hadamard次微分是集合

$$\partial^H f(x)=\{u\in E\mid \quad f^H(x,y)\geqslant\langle u,y\rangle,\quad \forall y\in E\}$$

这里 $f^H(x,y)=\inf\limits_{y_n\to y}\ \liminf\limits_{\substack{n\to+\infty\\ t_n\to 0^+}}\dfrac{f(x+t_ny_n)-f(x)}{t_n}$

若$f(x)=+\infty$，则$\partial^F f(x)=\partial^H f(x)=\partial^G f(x)=\phi$. 若$\partial^F f(x)(\partial^G f(x),\partial^H f(x))$非空，则称$f$是Frechet(Gateaux，Hadamard)次可微的. 分别以$\partial f(x)$，$\partial^c f(x)$记函数f在x的Fenchel次微分和Clarke次微分. 有性质

1． **引理1**[4,9] $\partial^F f(x)\subseteq\partial^H f(x)\subseteq\partial^G f(x)$，$\partial f(x)\subseteq\partial^F f(x)\subseteq\partial^c f(x)$，$x\in E$. 如果$f$是凸函数，则$\partial^F f(x)=\partial^H f(x)=\partial^G f(x)=\partial^c f(x)=\partial f(x)$.

2． 如果E是自反Banach空间，那么f在其有效域上是稠密F-次可微.

设 $T:E\to 2^{E^*}$ 是集值映射. T是单调的，如果 $\langle u-v,x-y\rangle\geqslant 0$，$\forall x,y\in E$，$u\in T(x)$，$v\in T(y)$. T是严格单调的，如果$x\neq y$时不等式严格成立.

三、主 要 结 果

命题1 如果$g:E\to R\cup\{+\infty\}$在x_0 Frechet可微，那么

$$\partial^F(f+g)(x_0)\subseteq\partial^F f(x_0)+\partial^F g(x_0),$$

$$\partial^G(f+g)(x_0)\subseteq\partial^G f(x_0)+\partial^G g(x_0),$$

$$\partial^H(f+g)(x_0)\subseteq\partial^H f(x_0)+\partial^H g(x_0).$$

由次微分定义及下极限性质容易验证. 这里$\partial^F g(x_0)=\partial^H g(x_0)=\partial^G g(x_0)=\{g'(x_0)\}$.

命题2 若x_0是f的局部极小值点，那么

$$0\in\partial^F f(x_0)\cap\partial^H f(x_0)\cap\partial^G g(x_0).$$

定理1 设E是自反Banach空间（其范数可微），f：$E\to R\cup\{+\infty\}$下半连续. a，$b\in E$，$f(a)$，$f(b)\in R$. 那么一定存在 $x_0\in[a,b)$，序列 $\{x_k\},x_k\to x_0$ 及 $x_k^*\in\partial^F f(x_k)(\partial^H f(x_k),\partial^G f(x_k))$，

$$\limsup_{k\to+\infty}\langle x_k^*,x_k-b\rangle\leqslant\frac{|c-b|}{|b-a|}(f(a)-f(b))$$

$$\limsup_{k\to+\infty}\langle x_k^*,a-b\rangle\leqslant f(a)-f(b)$$

证明 设$|\cdot|$表E之范数，有

$$\partial|x|=\begin{cases}\{x^*\in E\mid |x^*|=1,\langle x^*,x\rangle=|x|\} & (x\neq 0)\\ \{x^*\in E\mid |x^*|\leqslant 1\} & (x=0)\end{cases}$$

且当$x\neq 0$时$|\cdot|$在x可微，进一步$|\cdot|^2$在E上可微.

令 $g(y)=f(y)+\frac{f(b)-f(a)}{|b-a|}|y-b| \qquad (\forall y\in E)$

由[11]中引理4.2及 Weierstrass 定理，存在 $\varepsilon_0>0$，$x_0\in[a,b)$，使得f在 $B([a,b],\varepsilon_0)=\{x\in E|d_{[a,b]}(x)\leqslant\varepsilon_0\}$是下有界且$g(x_0)\leqslant g(y)$，$\forall y\in[a,b]$。 (*)

这里$d_{[a,b]}(x)\triangleq\inf\{|y-x|,\ y\in[a,b]\}$. 容易证明函数$d_{[a,b]}(\cdot)$在$x\notin[a,b]$ 是可微的。如令 $d_{[a,b]}(x)=|x-u|$，$u\in[a,b]$，则$d'_{[a,b]}(x)=\partial|x-u|,x\notin[a,b]$。$d^2_{[a,b]}(\cdot)$ 在E上可微。对任给的正整数j，令

$$g_j(y)=jd^2_{[a,b]}(y)+g(y) \qquad (\forall y\in E).$$

任给常数$\varepsilon>0$，由g的下半连续性，一定存在邻域$B([a,b],\delta_0)(\delta_0<\varepsilon_0)$。

$$g(y)>g(x_0)-\varepsilon,\ \forall y\in B([a,b],\delta_0)$$

取定任一正整数j_ε满足$j_\varepsilon>\{g(x_0)-\inf(g(y),y\in B([a,b],\varepsilon_0))\}/\delta_0^2$，当$j>j_\varepsilon$，$\forall y\in B([a,b],\varepsilon_0)\backslash B([a,b],\delta_0)$，$d_{[a,b]}(y)>\delta_0$，$g_j(y)\geqslant g(x_0)=g_j(x_0)$。当 $y\in B([a,b],\delta_0)$，$g_j(y)\geqslant g(y)>g(x_0)-\varepsilon=g_j(x_0)-\varepsilon$。因此任给$\varepsilon>0$，存在正整数$j_\varepsilon$，当$j\geqslant j_\varepsilon$，$\inf\{g_j(y),\ y\in B([a,b],\varepsilon_0)\}>g_j(x_0)-2\varepsilon$。于是由[12]中定理2.6及5.2，取$\varepsilon=2/k$（$k$固定），$\lambda=1/\sqrt{k}$，存在正整数$j_k$及$w_{j,k}$，$v_{j,k}\in B([a,b],\varepsilon_0)$（$j\geqslant j_k$）

1）$|x_0-v_{j,k}|<1/\sqrt{k}$，$|w_{j,k}-v_{j,k}|<1/\sqrt{k}$。

2）$g_j(w_{j,k})<\inf\{g_j(y),y\in B([a,b],\varepsilon_0)\}+2/k\leqslant g(x_0)+2/k$。

3）$g_j(w_j,k)+2|w_{j,k}-v_{j,k}|^2\leqslant g_j(y)+2|y-v_{j,k}|^2 \qquad (\forall y\in B([a,b],\varepsilon_0))$。

由不等式2易得

$$\lim_{j\to+\infty}d_{[a,b]}(w_{j,k})=0 \quad (\forall k\in N).$$

因此存在$\{w_{j,k}\}$之某子列及序列$\{w_k\}\subseteq[a,b]$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}w_{j_n,k}=w_k$，$\forall k\in N$。但显然 $w_k\to x_0(k\to+\infty)$，我们可选择子列$\{w_{j_{nk},k}\}$（j_{nk}严格增）使$w_{j_{nk},k}\to x_0(k\to+\infty)$。记 $w_{j_{nk},k}=y_k$，$v_{j_{nk},k}=x_k$，当$1/\sqrt{k}<2\varepsilon_0$，$x_k,y_k\in\operatorname{int}B([a,b],\varepsilon_0)$且函数$g_{j_{nk}}(y)+2|y-y_k|^2$在$x_k$ 取得局部极小($\forall k\in N$)。由于$x_k\to x_0\neq b$，我们可假设$x_k\neq b(\forall k)$。由命题1、2。

$$0\in\partial^F(g(x_k)+j_{nk}d^2_{[a,b]}(x_k)+2|x_k-y_k|^2)\subset\hat{\partial}^Ff(x_k)+\frac{f(b)-f(a)}{|b-a|}\partial|x_k-b|$$
$$+2\partial^F|x_k-y_k|^2+j_{nk}\partial d^2_{[a,b]}(x_k).$$

令$x_k^*\in\hat{\partial}^Ff(x_k)$，$u_k^*\in\frac{f(b)-f(a)}{|b-a|}\partial|x_k-b|$，$z_k^*=2|x_k-y_k|a_k^*$，$a_k^*\in\partial|x_k-y_k|$，

$y_k^*=j_{nk}d_{[a,b]}(x_k)e_k^*$，$e_k^*\in\partial d_{[a,b]}(x_k)$。满足

$$x_k^*+u_k^*+z_k^*+y_k^*=0 \quad (\forall k(1/\sqrt{k}<2\varepsilon_0))$$

容易验证：$\langle y_k^*,b-x_k\rangle=j_{nk}d_{[a,b]}(x_k)\langle e_k^*,b-x_k\rangle<0$。

$$\langle z_k,b-x_k\rangle=2|x_k-y_k|\langle a_k^*,b-x_k\rangle\to0 \quad (k\to\infty)$$

$$\langle u_k^*,b-x_k\rangle=-\frac{f(b)-f(a)}{|b-a|}|b-x_k|$$

因此

$$\lim_{k\to\infty}\sup\langle x_k^*,x_k-b\rangle\leqslant\frac{f(a)-f(b)}{|b-a|}|b-x_0|.$$

由于$d_{[a,b]}(x_k)<|x_k-b|$，容易验证$\langle e_k^*,b-a\rangle\leqslant0$，

$$\lim_{k\to\infty}\sup<x_k^*,a-b>\leqslant\lim_{k\to\infty}\sup<u_k^*,b-a>=\lim_{k\to\infty}\sup\frac{|b-a|}{|b-x_0|}\langle u_k^*,b-x_0\rangle$$
$$=f(a)-f(b).$$

对Hadamard(Gateaux)次微分的验证完全一样.

命题3 如果E是自反空间，$\partial^F f(\partial^H f,\partial^G f)$单调，那么$\partial^F f(x)(\partial^H f(x),\partial^G f(x))=\partial f(x)$，$x\in E$.

证明 取$x\in E$，$x^*\in\partial^F f(x)\neq\phi$. 对任意$d\in E$，如果$f(x+d)\in R$有限，由定理1，存在$c\in(x,x+d]$，序列$\{x_k\}$，$x_k\to c$，$x_k^*\in\partial^F f(x_k)$，

$$f(x+d)-f(x)\geqslant\frac{|d|}{|c-x|}\lim_{k\to\infty}\sup\langle x_k^*,x_k-x\rangle.$$

因为$\partial^F f$单调.

$$f(x+d)-f(x)\geqslant\frac{|d|}{|c-x|}\lim_{k\to\infty}\sup\langle x_k^*,x_k-x\rangle=\frac{|d|}{|c-x|}\langle x^*,c-x\rangle$$

设$c=\lambda x+(\lambda-1)(x+d)(\lambda\neq1)$，$c-x=(1-\lambda)d$

$$f(x+d)-f(x)\geqslant\langle x^*,d\rangle\quad(\forall d\in E)$$

若$f(x+d)=+\infty$，上不等式显然成立，说明$x^*\in\partial f(x)$，$\partial^F f(x)\subseteq\partial f(x)$

命题4 如果$D(\partial f)=\{x\in E|\partial f(x)\neq\phi\}$在其凸有效域中稠密，那么$f$是凸函数.

证明 取$x\in D(\partial f)$，$x^*\in\partial f(x)$. $f(y)-f(x)\geqslant<x^*,\ y-x\rangle\quad(\forall y\in E)$.

$$f^c(*)\leqslant\langle x^*,x\rangle-f(x)$$

这里$f^c(u)=\sup\limits_{x\in E}\{\langle u,x\rangle-f(x)\}$是$f$的共轭函数. 它是下半连续凸的.

$$f^c(x^*)+f(x)\leqslant\langle x^*,x\rangle\leqslant f^c(x^*)+f^{cc}(x).\ \text{所以}f(x)=f^{cc}(x).$$

若$y\in\mathrm{int}Df$，让$y_n\in D(\partial f)$，$y_n\to y$，f^{cc}在y是连续的（y是Df^{cc}的内点）

$$f^{cc}(y)\leqslant f(y)\leqslant\lim f(y_n)=\lim f^{cc}(y_n)=f^{cc}(y).\ f(y)=f^{cc}(y).$$

若$y\in Df\setminus\mathrm{int}Df$，此时$f^{cc}(y)<+\infty$. 取$u\in\mathrm{int}Df$，$\lambda\in(0,1)$ 那么$\lambda y+(1-\lambda)u\in\mathrm{int}Df$. 令$g(\lambda)\triangleq f^{cc}(\lambda y+(1-\lambda)u)$：$[0,1]\to R$，它是$[0,1]$上的下半连续凸函数容易证明它是连续的.

$$f(y)\leqslant\lim_{\lambda\to1}f(\lambda y+(1-\lambda)u)=\lim_{\lambda\to1}f^{cc}(\lambda y+(1-\lambda)u)=\lim_{\lambda\to1}g(\lambda)=g(1)=f^{cc}(y).$$

因此

$f(y)=f^{cc}(y)$，$\forall y\in Df$，f是凸函数.

定理2 如果E是自反Banach空间且$\partial^F f(\partial^H f,\partial^G f)$是单调的，那么$f$是凸函数.

证明 让$C\subseteq Df$是任一凸子集，$f_C=f|_C$. 取$x\in C$，$u\in\partial^F f(x)=\partial f(x)$. 易知$u\in\partial f_C(x)$. 由引理1及命题4知，$f_C$是凸的，这就是说$f$在$Df$之任一凸子集上是凸的.

取$x_0\in Df$，$y_0\in D(\partial^F f)$，$\lambda\in(0,1)$，$c=\lambda x_0+(1-\lambda)y_0$. 若$f(c)=+\infty$，令

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & (x\neq c)\\ m & (x=c)\end{cases}$$

这里m是任一给定大于$f(x_0)$的正实数. 利用定理 1，那么存在序列 $\{u_k\}$，$u_k\to u,u\in[x_0,c)$，$u_k^*\in\partial^F h(u_k)$，

$$h(x_0)-h(c)\geqslant\frac{|x_0-c|}{|u-c|}\lim\sup\langle u_k^*,u_k-c\rangle$$

$$\geqslant\frac{|x_0-c|}{|u-c|}\{\langle b^*,u-c\rangle+\lim\sup\langle u_k^*,y_0-c\rangle\}$$

$$=\frac{|x_0-c|}{|u-c|}\left\{\frac{\lambda}{1-\lambda}\lim\ \sup\langle u_k^*,c-x_0\rangle+\langle b^*,u-c\rangle\right\}$$

$$\geqslant\frac{|x_0-c|}{|u-c|}\langle b^*,u-c\rangle$$

这里$b^*\in\partial^F f(y_0)$，这显然与m的任意性相矛盾。因此$\forall\lambda\in(0,1)$，$\lambda a+(1-\lambda)b\in Df$。

任取 $a,b\in Df$，让 $b_n\in D(\partial^F f)$，$b_n\to b$，$f(b_n)\to f(b)$。由上述，$\lambda a+(1-\lambda)b_n\in Df$，且$f(\lambda a+(1-\lambda)b_n)\leqslant\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b_n)$。因此

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leqslant\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b).$$

定理3 如果E是自反Banach空间。$U\subseteq E$是开集，那么

1. f在U上满足常数为L的Lipschitz条件当且仅当$\partial^F f(\partial^H f,\partial^G f)$在$U$上有界且此界为$L$。

2. f在U上是常数当且仅当$\partial^F f(x)(\partial^H f,\partial^G f)=\{0\}\quad(x\in U)$。

由定义及定理1容易证明上述定理真。

下面我们讨论严格单调与严格凸之间的关系

定理4 1. f是严格凸函数$\Rightarrow\partial f$是严格单调的。

2. $\partial^F f(\partial^H f,\partial^G f)$是严格单调的$\Rightarrow f$在$D(\partial^F f)$上是严格凸的。

证明 1. 取 $x_1,x_2\in Df$，$u\in\partial f(x_1)$，$v\in\partial f(x_2)$，$h=x_2-x_1$。$g(t)=f(x_1+th)-f(x_1)$，$t\geqslant0$。很显然g是$[0,1]$上的严格凸函数$g(0)=0$。任取$0<t_2<t_1\leqslant1$，记$\lambda=t_2/t_1$。此时$g(t_2)=g(\lambda t_1)<\lambda g(t_1)$，$\dfrac{g(t_2)}{t_2}<\dfrac{g(t_1)}{t_1}$。因此

$$g(1)>\lim_{t\to0^+}\frac{g(t)}{t}\geqslant\langle u,h\rangle,\ \text{这就是}f(x_2)-f(x_1)>\langle u,x_2-x_1\rangle$$

同理 $f(x_1)-f(x_2)>\langle v,x_1-x_2\rangle$。两式相加便有

$$\langle u-v,\ x_1-x_2\rangle>0.$$

2. 由定理2知f是凸函数。借助如下事实可得到f的严格凸性。

引理2[13] g：$E\to R\cup\{+\infty\}$是凸函数，$a,b\in Dg$。若存在$\lambda\in(0,1)$满足

$g(\lambda a+(1-\lambda)b)=\lambda g(a)+(1-\lambda)g(b)$，那么$\partial g(\lambda a+(1\lambda)b)\subseteq\partial g(a)\cap\partial g(b)$。

若f在 $D(\partial f)$ 上不是严格凸的，那么存在 $\lambda\in(0,1)$，$a\neq b\in E$，$\lambda a+(1-\lambda)b\in D(\partial f)$，$f(\lambda a+(1-\lambda)b)=\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$，由上面引理。$\partial f(\lambda a+(1-\lambda)b)\subseteq\partial f(a)\cap\partial f(b)$，$\partial f(a)\cap\partial f(b)\neq\phi$。这与$\partial f$的严格单调性矛盾。

一般地，当∂f是严格单调时，f是 $D(\partial f)$ 上的严格凸函数而不一定是Df上的严格凸函数。由于$D(\partial f)\supseteq\mathrm{int}Df$，$f$的不严格凸性只可能出现在$Df$的边界上，此时$Df$的边界必含有一维数低于$Df$之维数的凸子集。

参考文献

[1] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. (1970).

[2] I. Ekeland, R and Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam (1976).

[3] F. E. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley. New York (1983).

[4] J. M. Browein and H.M. Strojwas, Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space II: Applications, *Canad. J. Math.*, 39 (1987), 428—472.

[5] Chang Kungching, Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 80 (1981), 102—129.

[6] E. S. Mistakids and P. D. Panagiotopolus, On the approximation of nonmonotone multivalued problems by monotone subproblems, *Camput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 114 (1994), 55—76.

[7] R. T. Rockafellar, Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions, *Canad. J. Math.*, (1980), 257—280.

[8] R. A. Poliquin, Subgradient monotonicity and convex functions, *Nonlinear Analysis*, 14 (1990), 305—317.

[9] R. Correa, A. Joffre and L. Thibault, Characterization of lower semicontinuous conex functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 116 (1992), 67—72.

[10] R. Correa, A. Joffre and L. Thibault, Subdifferential monotonicity as characterization of convex functions, *Numer. Funct. Anel. Optimz.*, 15 (1994), 531—535.

[11] D. Zagrodny, Approximate mean value theorem for upper subderivates, *Nonlinear Analysis*, 12 (1988), 1413—1428.

[12] J. M, Borwein and D. Preiss, A smooth variational principle with applications to subdifferenticability and to differentiability of convex functions, *Trans. Amer. Math.Soc.*, 303(2) (1987), 517—527.

[13] V. F. Demyanov and L. V. Vasilev, *Nondifferentialole Optimization*, Inc. Publication Division, Wew York (1985).

Characteristics of Subdifferentials of Functions

Guo Xingming

(*Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai* 200072, *P. R. China*)

Abstract

In the present paper, some important characteristics of Fenchel-, Frechet-, Hadamard-, and Gateaux-Subdifferentials are showed up, and properties of functions, especially convexity of functions, are described by subdifferentials.

Key words subdifferential, generalized mean value theorem, convexity, Lipscitz, monotone