应用数学和力学，第17卷 第5期（1996年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

高阶椭圆型偏微分方程奇异摄动问题一致收敛差分格式

刘国庆[1]　苏煜城[2]

（1995年4月28日收到）

摘　　要

本文，我们讨论了一类高阶椭圆型偏微分方程奇异摄动问题．给出了连续问题解的先验估计．另外，我们还提供了一种数值求解该类问题的指数型差分格式．最后，证明了差分问题的解在能量范数意义下关于小参数一致收敛到连续问题的解．

关键词　椭圆型　奇异摄动　差分格式　一致收敛

一、引　　言

我们讨论具有如下形式的四阶椭圆型方程奇异摄动边值问题

$$L_\varepsilon\phi\equiv-\varepsilon^2\Delta^2\phi+a(x,y)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+c(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial x}+d(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$+e(x,y)\phi=f(x,y)\qquad((x,y)\in D)\tag{1.1a}$$

$$\phi|_\Gamma=0\tag{1.1b}$$

$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial n^2}\right|_\Gamma=0\tag{1.1c}$$

其中　$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant\alpha,\ 0\leqslant y\leqslant\beta\}$，$\Gamma$是$D$的边界，$n$表示$\Gamma$的内法线方向，$0<\varepsilon\ll1$．对(1.1a)的系数，主要假设如下：

H_1、$a(x,y)\geqslant a_0>0$，$b(x,y)\geqslant b_0>0$和$e(x,y)\leqslant e_0<0$，这里a_0，b_0和e_0均为常数；

H_2、$e(x,y)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2a}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2b}{\partial x^2}-\dfrac{\partial c}{\partial x}-\dfrac{\partial d}{\partial y}\right)<0$；

H_3、函数$a(x,y)$，$b(x,y)$，$c(x,y)$，$d(x,y)$，$e(x,y)$和$f(x,y)$具有足够的光滑性且满足一定的相容性条件保证问题(1.1)的解$\phi\in C^4(D)$和$\phi\in C^2(D\cup\Gamma)$．

众所周知，当$\varepsilon\to0$时，问题(1.1)将退化为[3][4]

$$a(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+c(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+e(x,y)u=f(x,y)\qquad((x,y)\in D)\tag{1.2a}$$

1 南京化工学院，南京 210009．

2 南京大学，南京 210008．

$$u|_{\Gamma}=0 \tag{1.2b}$$

这就是说奇异摄动问题(1.1)在边界Γ附近出现边界层．在文[5][6]中，我们曾经讨论过类似的问题．但是在证明差分格式的一致收敛性时所利用的导数估计是通过，形式渐近解粗糙估计出来的．本文中，我们针对差分问题的解进行了细致的分析，从而严格地证明了差分格式的一致收敛性．

本文的结构如下：在第二节中，将导出在能量范数意义下连续问题(1.1)解的导数估计及相关性质.为了数值求解问题(1.1)，在第三节中，我们构造了一类指数型拟合差分格式，并对差分方程的解进行了分析．最后，在离散的能量范数意义下，我们证明了所构造的差分问题的解关于小参数是一致收敛的，其阶数为1．

记号　为方便起见，本文中带有下标的C表示不依赖于变量x，y和小参数ε，步长h，τ的常数．另外，令

$$(u,v)=\iint_D vu\,dx\,dy$$

$$\|u\|^2_{H^m(D)}=\sum_{s+t=0}^{m}\left(\frac{\partial^{s+t}u}{\partial x^s\partial y^t},\ \frac{\partial^{s+t}u}{\partial x^s\partial y^t}\right)$$

二、连　续　问　题

在这一节里，我们将利用类似于文[5]的技巧来研究问题(1.1)解的导数估计及其相关性质。结论如下

定理2.1　如果假设H_1，H_2和H_3成立，那么有

$$\varepsilon^2\|\phi\|^2_{H2(D)}+\|\phi\|^2_{H1(D)}\leqslant C_0\|f\|^2_{H0(D)} \tag{2.1}$$

证明　用ϕ乘以方程(1.1a)的两边，再在区域D上积分，然后利用分部积分及齐次边界条件(1.1b)和(1.1c)，类似于[5,定理1]的证明，(2.1)式不难得到，故略去．

定理2.2　如果假设H_1，H_2和H_3成立，那么有

$$\varepsilon^2\|\phi\|^2_{H3(D)}+\|\phi\|^2_{H2(D)}\leqslant C_0\|f\|^2_2 \tag{2.2}$$

证明　用$\Delta\phi$乘以方程(1.1a)的两边，再在区域D上积分，即

$$(\mathscr{L}\varepsilon\phi,\ \Delta\phi)=(f,\Delta\phi) \tag{2.3}$$

下面对(2.3)进行估计．利用(1.1b)和(1.1c)，由分部积分，易知

$$(\Delta^2\phi,\Delta\phi)=\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)+2\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial y},\ \frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial y}\right)$$
$$+2\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial y^2},\ \frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial y^3},\ \frac{\partial^3\phi}{\partial y^3}\right) \tag{2.4}$$

$$\left(a\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2},\Delta\phi\right)=\left(a\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)+\left(b\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)$$
$$+\left((a+b)\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial x}\ \frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial b}{\partial y}\ \frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial a}{\partial y}\ \frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial x}\ \frac{\partial\phi}{\partial y},\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right) \tag{2.5}$$

将(2.4)和(2.5)式代入(2.3)中，整理得

$$\varepsilon^2\|\phi\|^2_{H3(D)}+\|\phi\|^2_{H2(D)}\leqslant C_1\Big(f+\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|+|\phi|,$$

$$\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right|+\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right|+\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right|\Big) \tag{2.6}$$

对上式利用不等式

$$(P,Q)\leqslant\omega(P,P)+\omega^{-1}(Q,Q)\qquad(\omega>0) \tag{*}$$

我们有

$$\varepsilon^2\|\phi\|^2_{H3(D)}+\|\phi\|^2_{H2(D)}\leqslant C_0\|\phi\|^2_{H1(D)}+C_1\|f\|^2_{H0(D)} \tag{2.7}$$

由(2.1)和(2.7)知，(2.2)成立．定理证毕．

定理2.3 如果假设H_1，H_2和H_3满足，ϕ和u分别是问题(1.1)和退化问题(1.2)的解，那么

$$\varepsilon^2\|\phi-u\|^2_{H2(D)}+\|\phi-u\|^2_{H0(D)}\leqslant C_0\varepsilon^3$$

成立．

证明 令$v=\phi-u$，则v满足

$$\mathscr{L}_\varepsilon v=-\varepsilon^2\Delta^2 u \tag{2.8a}$$

$$v|_\Gamma=0 \tag{2.8b}$$

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial n^2}\right|_\Gamma=-\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_\Gamma \tag{2.8c}$$

对(2.8a)的两边同乘以v，再在D内积分，得

$$(\mathscr{L}_\varepsilon v,v)=(-\varepsilon^2\Delta^2 u,v) \tag{2.9}$$

下面，我们要对(2.9)进行估计．为此，首先考虑$I_1=\varepsilon^2(\Delta^2 v,v)$，由(2.8b)和(2.8c)，利用分部积分可得

$$I_1=\varepsilon^2\Big[\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big)+2\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\Big)+\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big)\Big]$$

$$+\varepsilon^2\int_\Gamma\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial n}ds \tag{2.10}$$

其中

$$\left|\varepsilon^2\int_\Gamma\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial n}ds\right|\leqslant\varepsilon^2\omega\int_\Gamma\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big)^2ds+\varepsilon^2\omega^{-1}\int_\Gamma\Big(\frac{\partial v}{\partial n}\Big)^2ds \tag{2.11}$$

对不等式(2.11)中的最后一项利用迹定理[1][5]，得

$$\int_\Gamma\Big(\frac{\partial v}{\partial n}\Big)^2ds\leqslant\frac{2}{\delta}\Big[\Big(\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial x}\Big)+\Big(\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial y}\Big)\Big]+\delta\Big[\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big)$$

$$+\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big)\Big]\qquad(\delta>0) \tag{2.12}$$

在(2.11)中取$\omega=C_1^{-1}\varepsilon$(这里$C_1$充分小)，在(2.12)式中取$\delta=\varepsilon$，

$$\left|\varepsilon^2\int_\Gamma\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial n}ds\right|\leqslant C_2\varepsilon^3+C_1\Big[\varepsilon^2\|v\|^2_{H2(D)}+\|v\|^2_{H1(D)}\Big] \tag{2.13}$$

其次，考虑$I_2=\Big(a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+c\frac{\partial v}{\partial x}+d\frac{\partial v}{\partial y}+ev,v\Big)$，

由(2.8b)和分部积分，知

$$I_2=-\left(a\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\left(b\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\left(e+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\partial d}{\partial y}\right)\right)v,\ v\right) \tag{2.14}$$

所以，综合(2.9)，(2.10)，(2.13)和(2.14)，并利用不等式(*)和假设H_2，不难得

$$\varepsilon^2\|v\|^2_{H2(D)}+\|v\|^2_{H1(D)}\leqslant C_0\varepsilon^3$$

定理证毕。

另一方面，类似地利用文[5]中渐近展开式及相应的能量不能式，我们不难得如下定理

定理2.4 如果假设H_1，H_2和H_3满足，ϕ和u分别是问题(1.1)和相应退化问题(1.2)的解，那么有

$$\|\phi-u\|_{H0(D)}\leqslant C_0\varepsilon^2$$

证明略。

三、差 分 格 式

为了数值求解问题(1.1)，我们构造如下形式的指数型拟合差分格式

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{h,\tau}\phi_{ij}\equiv-\varepsilon^2(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2\phi_{ij}+a_{ij}\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}+b_{ij}\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}$$

$$+c_{ij}\hat{\nabla}_x\phi_{ij}+d_{ij}\hat{\nabla}_y\phi_{ij}+e_{ij}\phi_{ij}=f_{ij} \tag{3.1a}$$

$$\phi_{ij}=0,\ i=0,\ N,\ j=\overline{0,M};\ j=0,M,\ i=\overline{0,N} \tag{3.1b}$$

$$\left.\begin{aligned}&\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}=0,\ i=1,\ N-1,\ j=\overline{0,M}\\&\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}=0,\ j=1,\ M-1,\ i=\overline{0,N}\end{aligned}\right\} \tag{3.1c}$$

其中

$$\sigma_1=\rho_1\sqrt{a_{ij}}/\sinh\left(\rho_1\sqrt{a_{ij}}\right)\qquad(\rho_1=h/\varepsilon)$$

$$\sigma_2=\rho_2\sqrt{b_{ij}}/\sinh\left(\rho_2\sqrt{b_{ij}}\right)\qquad(\rho_2=\tau/\varepsilon)$$

另外，相应于退化问题(1.2)的差分问题为：

$$a_{ij}\nabla_x\overline{\nabla}_x u_{ij}+b_{ij}\nabla_y\overline{\nabla}_y u_{ij}+c_{ij}\hat{\nabla}_x u_{ij}+d_{ij}\hat{\nabla}_y u_{ij}+e_{ij}u_{ij}=f_{ij} \tag{3.2a}$$

$$u_{ij}=0\qquad(i=0,N,\ j=\overline{0,M};\ j=0,\ M,\ i=\overline{0,N}) \tag{3.2b}$$

为简便起见，这里及以后记

$$(u_{ij},v_{ij})=h\tau\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}u_{ij}v_{ij}$$

$$\|v_{ij}\|_2^2=(v_{ij},v_{ij})$$

下面，我们来研究差分问题(3.1)解的性质．为此，类似于文[6]的讨论，我们不难得如下两个引理。

引理3.1 $\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1}v_i\nabla w_i=-\sum_{i=1}^{N}w_i\overline{\nabla}v_i+v_Nw_N-v_0w_0$

$$\sum_{i=0}^{N-1}v_i\nabla\overline{\nabla}w_i=-\sum_{i=1}^{N}\overline{\nabla}w_i\overline{\nabla}v_i+v_N\overline{\nabla}w_N-v_0\overline{\nabla}w_0$$

$$\nabla(w_iv_i)=w_{i+1}\nabla v_i+v_i\nabla w_i$$

$$\overline{\nabla}(w_iv_i)=w_{i-1}\overline{\nabla}v_i+v_i\overline{\nabla}w_i$$

$$\hat{\nabla}(w_i v_i)=w_i\hat{\nabla}v_i+v_i\hat{\nabla}w_i$$

其中 ∇，$\overline{\nabla}$和$\hat{\nabla}$分别表示前差、后差和中心差。

引理3.2 当h，τ量级相同时，有

$$\left|\frac{\nabla_x\sigma_1^2}{\sigma_1^2}\right|,\quad\left|\frac{\nabla_y\sigma_2^2}{\sigma_2^2}\right|,\quad\left|\frac{\nabla_x\overline{\nabla}_x\sigma_1^2}{\sigma_1^2}\right|,\quad\left|\frac{\nabla_y\overline{\nabla}_y\sigma_2^2}{\sigma_2^2}\right|$$

$$\left|\frac{\nabla_x\nabla_y(\sigma_1\sigma_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right|\text{和}|\sigma_s|,\quad\left|\frac{\nabla_x\sigma_s}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}\right|,\quad\left|\frac{\nabla_y\sigma_s}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}\right|\qquad(s=1,2)$$

关于ε一致有界。

有了以上两个引理，我们可以导出下面的定理。

定理3.1 如果假设$H_1\sim H_3$满足，那么

$$\varepsilon^2(\|\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\|_2^2+\|\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\|_2^2+\|\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\nabla_x\nabla_y\phi_{ij}\|_2^2)$$
$$+\|\nabla_x\phi_{ij}\|_2^2+\|\nabla_y\phi_{ij}\|_2^2+\|\phi_{ij}\|_2^2\leqslant C_0\|f_{ij}\|_2^2\tag{3.3}$$

证明 用$h\tau\phi_{ij}$乘以方程(3.1a)的两边，再对i和j求和，有

$$(\mathscr{L}_\varepsilon^{h,\tau}\phi_{ij},\phi_{ij})=(f_{ij},\phi_{ij})\tag{3.4}$$

利用引理和边界条件(3.1b)，(3.1c)，可得

$$((\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2\phi_{ij},\phi_{ij})=(\sigma_1^2\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij},\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij})$$
$$+(\sigma_2^2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij},\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})+2(\sigma_1\sigma_2\nabla_x\nabla_y\phi_{ij},\nabla_x\nabla_y\phi_{ij})$$
$$+(\nabla_x\overline{\nabla}_x\sigma_1^2\phi_{ij}+\nabla_x\sigma_1^2\nabla_x\phi_{ij},\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij})+(\nabla_y\overline{\nabla}_y\sigma_2^2\phi_{ij}+\nabla_y\sigma_2^2\nabla_y\phi_{ij},\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})$$
$$+2(\nabla_x\nabla_y(\sigma_1\sigma_2)\phi_{ij}+\nabla_x\sigma_1\nabla_y\phi_{ij}+\nabla_y\sigma_2\nabla_x\phi_{ij},\nabla_x\nabla_y\phi_{ij})\tag{3.5}$$

$$(a_{ij}\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij},\phi_{ij})=-(a_{ij}\nabla_x\nabla\phi_{ij},\nabla_x\phi_{ij})+\frac{1}{2}(\nabla_x\overline{\nabla}_x a_{ij}\phi_{ij},\phi_{ij})\tag{3.6}$$

$$(b_{ij}\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij},\phi_{ij})=-(b_{ij}\nabla_y\phi_{ij},\nabla_y\phi_{ij})+\frac{1}{2}(\nabla_y\overline{\nabla}_y b_{ij}\phi_{ij},\phi_{ij})\tag{3.7}$$

$$(c_{ij}\hat{\nabla}_x\phi_{ij},\phi_{ij})=\frac{1}{2}(-\hat{\nabla}_x c_{ij}\phi_{ij},\phi_{ij})\tag{3.8}$$

$$(d_{ij}\hat{\nabla}_y\phi_{ij},\phi_{ij})=\frac{1}{2}(-\hat{\nabla}_y d_{ij}\phi_{ij},\phi_{ij})\tag{3.9}$$

综述(3.4)～(3.9)，利用引理3.2及不等式

$$(u_{ij},v_{ij})\leqslant\omega(u_{ij},u_{ij})+\omega^{-1}(v_{ij},v_{ij})\qquad(\omega>0)\tag{3.10}$$

我们可得(3.3)成立。定理证毕。

定理3.2 如果假设$H_1\sim H_3$满足，那么

$$\|\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\|_2^2+\|\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\|_2^2+\|\nabla_x\phi_{ij}\|_2^2+\|\nabla_y\phi_{ij}\|_2^2+\|\phi_{ij}\|_2^2\leqslant C_0\|f_{ij}\|_2^2\tag{3.11}$$

证明 用$h\tau(\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}+\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})$乘以方程(3.1a)的两边，再对$i$，$j$求和，然后借助于引理3.1和3.2及定理3.1，类似于定理2.2的证明，不难证明(3.11)式成立。故略去。

定理3.3 如果假设$H_1\sim H_3$成立，那么

$$\|\phi_{ij}-u_{ij}\|_2^2\leqslant C_0\varepsilon^2\max(h,\tau,\varepsilon^2)\tag{3.12}$$

证明 若令$v_{ij}=\phi_{ij}-u_{ij}$，那么v_{ij}满足

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{h,\tau}v_{ij}=-\varepsilon^2(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2u_{ij}\tag{3.13a}$$

$$v_{ij}=0\qquad(i=0,N,\ j=\overline{0,M};\ j=0,M,\ i=\overline{0,N})\tag{3.13b}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\nabla_x\overline{\nabla}_x v_{ij}=-\nabla_x\overline{\nabla}_x u_{ij} & (i=1,N-1,\ j=\overline{0,M})\\ \nabla_y\overline{\nabla}_y v_{ij}=-\nabla_y\overline{\nabla}_y u_{ij} & (j=1,M-1,\ i=\overline{0,N})\end{array}\right\}\tag{3.13c}$$

用$h\tau v_{ij}$乘以方程(3.13a)的两边，再对i，j求和，得

$$(\mathscr{L}_\varepsilon^{h,\tau}v_{ij},v_{ij})=(-\varepsilon^2(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2u_{ij},v_{ij})\tag{3.14}$$

为了估计上式，计算如下：

$$\begin{aligned}((\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2v_{ij},v_{ij})&=(\nabla_x\overline{\nabla}_x(\sigma_1^2v_{ij}),\nabla_x\overline{\nabla}_xv_{ij})\\&+(\nabla_y\overline{\nabla}_y(\sigma_2^2v_{ij}),\nabla_y\overline{\nabla}_yv_{ij})+2(\sigma_1\sigma_2\nabla_x\nabla_yv_{ij},\nabla_x\nabla_yv_{ij})\\&-\tau\sum_j\nabla_x\overline{\nabla}_xv_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x(\sigma_1^2v_{ij})\Big|_{i=1}^{i=N-1}-h\sum_i\nabla_y\overline{\nabla}_yv_{ij}\cdot\overline{\nabla}_y(\sigma_2^2v_{ij})\Big|_{j=1}^{j=M-1}\end{aligned}\tag{3.15}$$

因为

$$\begin{aligned}\Big|\tau\sum_j\nabla_x\overline{\nabla}_xv_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x(\sigma_1^2v_{ij})\Big|&=\Big|\tau\sum_j\nabla_x\overline{\nabla}_xu_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x(\sigma_1^2v_{ij})\Big|\\&\leqslant\delta^{-1}\omega\tau\sum_j(\nabla_x\overline{\nabla}_xu_{ij})^2+\delta\omega^{-1}\tau\sum_j(\overline{\nabla}_x(\sigma_1^2v_{ij}))^2\qquad(i=1,N-1)\end{aligned}\tag{3.16}$$

另外，利用离散化迹定理[6]

$$\tau\sum_j u_{ij}^2\leqslant\frac{2}{Lh}(u_{ij},u_{ij})+(L+1)h(\nabla_xu_{ij},\nabla_xu_{ij})\qquad(i=1,N-1)\tag{3.17}$$

这里 $1\leqslant L\leqslant M$，可得

$$\begin{aligned}\tau\sum_j(\overline{\nabla}_x(\sigma_1^2v_{sj}))^2&\leqslant\frac{2}{Lh}(\overline{\nabla}_x(\sigma_1^2v_{ij}),\overline{\nabla}_x(\sigma_1^2v_{ij}))\\&+(L+1)h(\nabla_x\overline{\nabla}_x(\sigma_1^2v_{ij}),\nabla_x\overline{\nabla}_x(\sigma_1^2v_{ij}))\qquad(s=1,N-1)\end{aligned}\tag{3.18}$$

所以，如果在(3.16)中取$\omega=\max(h,\varepsilon^2)$，在(3.18)中取$L=\left[\frac{\varepsilon^2}{h}\right]+1$（这里$[\cdot]$表示取整），再利用定理2.2，引理3.2和定理3.1，那么我们有

$$\begin{aligned}\Big|\varepsilon^2\tau\sum_j\nabla_x\overline{\nabla}_xv_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x(\sigma_1^2v_{ij})^2\Big|_{i=1}^{i=N-1}\Big|&\leqslant C_1\varepsilon^2\max(h,\varepsilon^2)\\&+C_2\delta[\varepsilon^2(\sigma_1^2\nabla_x\overline{\nabla}_xv_{ij},\nabla_x\overline{\nabla}_xv_{ij})+(\nabla_xv_{ij},\nabla_xv_{ij})+(v_{ij},v_{ij})]\end{aligned}\tag{3.19}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\Big|\varepsilon^2h\sum_i\nabla_y\overline{\nabla}_yv_{ij}\cdot\overline{\nabla}_y(\sigma_2^2v_{ij})^2\Big|_{j=1}^{j=M-1}\Big|&\leqslant C_1\varepsilon^2\max(\tau,\varepsilon^2)\\&+C_2\delta[\varepsilon^2(\sigma_2^2\nabla_y\overline{\nabla}_yv_{ij},\nabla_y\overline{\nabla}_yv_{ij})+(\nabla_yv_{ij},\nabla_yv_{ij})+(v_{ij},v_{ij})]\end{aligned}\tag{3.20}$$

最后，我们不难得

$$\begin{aligned}&((a_{ij}\nabla_x\overline{\nabla}_x+b_{ij}\nabla_y\overline{\nabla}_y+c_{ij}\hat{\nabla}_x+d_{ij}\hat{\nabla}_y+e_{ij})v_{ij},v_{ij})\\&=-(a_{ij}\nabla_xv_{ij},\nabla_xv_{ij})-(b_{ij}\nabla_yv_{ij},\nabla_yv_{ij})+((e_{ij}+\frac{1}{2}(\nabla_x\overline{\nabla}_xa_{ij}+\nabla_y\overline{\nabla}_yb_{ij}\\&-\hat{\nabla}_xC_{ij}-\hat{\nabla}_yd_{ij})v_{ij},v_{ij})\end{aligned}\tag{3.21}$$

将(3.19)～(3.21)代入(3.14)，(3.15)中，并取δ充分小，然后利用不等式(3.10)和假设H_2，可知(3.12)式成立。证毕。

四、一 致 收 敛 性

在这一节里，我们来研究差分问题的收敛性。一方面，利用定理2.4和定理3.3，我们有[2][5]

$$\|\phi_{ij}-\phi(x_i,y_j)\|_2^2=\|\phi_{ij}-u_{ij}+u_{ij}-u(x_i,y_j)+u(x_i,y_j)-\phi(x_i,y_j)\|_2^2$$
$$\leqslant\|\phi_{ij}-u_{ij}\|_2^2+\|u_{ij}-u(x_i,y_j)\|_2^2+\|\phi(x_i,y_j)-u(x_i,y_j)\|_2^2$$
$$\leqslant C_0(\varepsilon^2\max(\varepsilon^2,h,\tau)+h^2+\tau^2+\varepsilon^4) \tag{4.1}$$

另一方面，考虑截断误差

$$R_{ij}\equiv\mathscr{L}_\varepsilon^{h,\tau}(\phi_{ij}-\phi(x_i,y_j))$$
$$=-L_\varepsilon^{h,\tau}\phi(x_i,y_j)$$
$$=[\varepsilon^2(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2+a_{ij}\nabla_x\overline{\nabla}_x+b_{ij}\nabla_y\overline{\nabla}_y$$
$$+c_{ij}\hat{\nabla}_x+d_{ij}\overline{\nabla}_y+d_{ij}]\phi(x_i,y_j)$$

利用拟合系数σ_1，σ_2的性质[6]

$$|\sigma_s-1|\leqslant C_0\rho_s^2 \qquad (s=1,2)$$
$$|\sigma_1\sigma_2-1|\leqslant C_0(\rho_1^2+\rho_2^2)$$

和定理2.2～2.4，我们有[6]

$$\|R_{ij}\|_2^2\leqslant C_0\left(\left(\frac{h^2+\tau^2}{\varepsilon^2}\right)^2+\frac{\tau^2h^2}{\varepsilon^4}\right) \tag{4.2}$$

另外，若设$\psi_{ij}=\phi_{ij}-\phi(x_i,y_j)$，则$\psi_{ij}$满足

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{h,\tau}\psi_{ij}=R_{ij}$$
$$\psi_{ij}=0 \qquad (i=0\text{或}N,j=\overline{0,M};\ \ j=0\text{或}M,i=\overline{0,N})$$
$$\begin{cases}\nabla_x\hat{\nabla}_x\psi_{ij}=-\nabla_x\hat{\nabla}_x\phi(x_i,y_j) & (i=1,N-1,j=\overline{0,M})\\ \nabla_y\hat{\nabla}_y\psi_{ij}=-\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi(x_iy_i) & (j=1,M-1,\ i=\overline{0,N})\end{cases}$$

考虑到

$$\tau\sum_j(\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{sj})^2=h^2\tau\sum_j\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)^2(\xi_s,y_j)$$
$$\leqslant h^2\left[2\delta^{-1}\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)+\delta\left(\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4},\ \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}\right)\right] \qquad (s=1,N-1)$$

令$\delta=\varepsilon$，利用方程(1.1a)及定理2.2，得

$$\tau\sum_j(\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{sj})^2\leqslant C_0\frac{h^2}{\varepsilon^3} \qquad (s=1,N-1)$$

同理

$$h\sum_i(\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{is})^2\leqslant C_0\frac{\tau^2}{\varepsilon^3} \qquad (s=1,\ M-1)$$

因此，类似于定理3.3的证明（注意这时取$\omega=\max(h,\tau,\varepsilon)$），我们有

$$\|\psi_{ij}\|_2^2\leqslant C_0\left(\frac{h^2+\tau^2}{\varepsilon}\cdot\max(h,\tau,\varepsilon)+\frac{(h^2+\tau^2)^2}{\varepsilon^4}\right) \tag{4.3}$$

由(4.1)和(4.3)容易导出如下的定理。

定理4.1 如果假设H_1，H_2和H_3满足，且h与τ同量级时，那么有

$$\|\phi_{ij}-\phi(x_i,y_j)\|_2^2\leqslant C_0(h^2+\tau^2) \tag{4.4}$$

证明 当$\varepsilon^2\geqslant h$或τ时，由(4.3)得(4.4)式成立；当$\varepsilon^2\leqslant h$或τ时，由(4.1)得(4.4)式成立。定理证毕。

参 考 文 献

[1] O.A. Ladyzhenskaya, *The Boundary Problems of Mathematical Physics*, Springer-Verlag (1985).

[2] K. Niijima, A uniformly convergent difference scheme for a semilinear singular perturbation problem, *Numer. Math.*, 43 (1984), 175—198.

[3] 苏煜城，《奇异摄动中的边界层校正法》，上海科技出版社 (1983).

[4] 苏煜城、吴启光，《奇异摄动问题数值方法引论》，重庆出版社 (1991).

[5] 苏煜城、刘国庆，四阶椭圆型奇异摄动问题渐近解，应用数学和力学，11(7) (1990)，597—610.

[6] 苏煜城、刘国庆，四阶椭圆型奇异摄动问题的数值解，应用数学和力学，12(10) (1991)，879—901.

A Uniformly Convergent Difference Scheme for the Singular Perturbation Problem of a High Order Elliptic Differential Equation

Liu Guoqing

(*Nanjing Institute of Chemical Technolngy*, *Nanjing* 210009, *P. R. China*)

Su Yucheng

(*Nanjing University*, *Nanjing* 210008, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, we first consider the singularly perturbed boundary value problem for the fourth-order elliptic differential equation, estaqlish the priori estimation of the solution of the continuous problem. Then, we present an exponential fitted difference scheme and discuss the selution properties of the difference equations. Finally, the uniform convergence of this scheme with respect to the small parameter in the discrete energy norm, is proved.

Key words elliptic singular perturbation, difference scheme, uniform convergence