应用数学和力学，第17卷 第6期（1996年6月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

(Φ,Δ) 型概率收缩与Menger PN-空间中非线性算子方程的解*

方 锦 暄[1]

（张石生推荐，1994年11月22日收到，1995年11月27日收到修改稿）

摘 要

本文在Menger概率赋范空间中引入了(Φ,Δ)型概率收缩的概念，研究了Menger 概率赋范空间中具有这类概率收缩的非线性算子方程的解的存在性与唯一性．发展和改进了引文[1]、[4～8]的相应结果．

关键词 Menger PN-空间 h型t-范数 概率收缩 算子方程

一、引 言 与 定 义

最近，张石生[1]在概率赋范空间（简称PN-空间）中引入了由某一函数$\varphi(t)$确定的“概率收缩”的概念，并在具有h型t-范数的非阿基米德Menger PN-空间中，证明了具这类收缩的非线性算子方程解的存在性与唯一性定理．之后，张石生和彭永成[2]又在这类空间中研究了具概率收缩偶的非线性算子方程组的解的存在性与唯一性．

众所周知，非阿基米德Menger PN-空间是Menger PN-空间的特殊子类．因此，人们自然会问：能否在一般的 Menger PN-空间中建立具概率收缩的非线性算子方程的解的存在性与唯一性定理？引文[1]、[4]中，仅就$\varphi(t)=t/M(0<M<1)$这一特殊情形作了某些研究．本文将就一般情形对这一问题作进一步的讨论．我们引入(Φ,Δ)型概率收缩的概念，并在具h型t-范数的一般的 Menger PN-空间中建立具有这类收缩的非线性算子方程解的存在性与唯一性定理．作为其应用，还证明了 Menger PN-空间和赋范空间中的两个不动点定理，改进和发展了引文[1]、[4～8]的相应结果．

以下记$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$，$\mathbf{R}^+=[0,+\infty)$，$Z^+$表全体正整数的集合，$\Delta$表$t$-范数，$\mathscr{D}$表一切左连续的分布函数的集合，$H$：$\mathbf{R}\to[0,1]$表一特殊的分布函数，其定义为

$$H(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases}$$

Menger PN-空间的定义及其它有关术语见[3]．

---

* 江苏省教委自然科学基金资助课题

1 南京师范大学数学系，南京 210024

定义1[9] t-范数Δ称为是h型的，如果函数族$\{\Delta^m(t)\}_{m=1}^{\infty}$在$t=1$处是等度连续的，其中$\Delta^1(t)=\Delta(t,t)$，$\Delta^m(t)=\Delta(t,\Delta^{m-1}(t))$，$t\in[0,1]$，$m=1,2,\cdots$。

注1 $\Delta=\min$是h型t-范数，[7]中还列举了其它形式的h型t-范数。

定义2 称函数Φ：$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$满足条件$(\Phi)$，如果$\Phi(t)$不减，且$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi^n(t)<+\infty(\forall t>0)$，其中$\Phi^n(t)$是$\Phi(t)$的$n$次迭代。

容易看出，如果函数$\Phi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$满足条件$(\Phi)$，则$\lim_{n\to\infty}\Phi^n(t)=0$，$\Phi(0)=0$且$\Phi(t)<t$ $(\forall t>0)$。

定义3 设X,Y是线性空间，映射$T:Y\to X$称为奇算子，如果$T(-y)=-T(y)(\forall y\in Y)$。记$L(Y,X)$为$Y$到$X$的一切奇算子的集合。

定义4 设$(X,\mathscr{F},\Delta)$和$(Y,\tilde{\mathscr{F}},\Delta)$是Menger PN-空间，设$P:D(P)\subset X\to Y$，$\Gamma:X\to L(Y,X)$。$\Gamma$称为$P$的$(\Phi,\Delta)$型概率收缩，如果存在满足条件$(\Phi)$的函数$\Phi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，使得对一切$x\in D(P)$，$y\in Y$有$x+\Gamma(x)y\in D(P)$，且

$$\tilde{F}_{P(x+\Gamma(x)y)-Px-y}(\Phi(t))\geqslant\Delta(\tilde{F}_y(t),\Delta(\tilde{F}_{Px}(t),\ \tilde{F}_{y+Px}(t))),\qquad\forall t\geqslant 0\tag{1.1}$$

二、主 要 结 果

定理1 设$(X,\mathscr{F},\Delta)$是$\mathscr{F}$-完备的Menger PN-空间，$(Y,\tilde{\mathscr{F}},\Delta)$是Menger PN-空间，$\Delta$是$h$型$t$-范数。设$P:D(P)\subset X\to Y$是$\mathscr{F}$-闭算子，$\Gamma:X\to L(Y,X)$.若满足下列条件：

(i) Γ是P的(Φ,Δ)型概率收缩；

(ii) 存在常数$M>0$，使得对一切$x\in D(P)$，$y\in Y$有

$$F_{\Gamma(x)y}(t)\geqslant\tilde{F}_y(t/M),\qquad\forall t\geqslant 0\tag{2.1}$$

则非线性算子方程

$$Px=\theta\tag{2.2}$$

在$D(P)$中有解，且对任一$x_0\in D(P)$，迭代序列

$$x_n=x_{n-1}-\Gamma(x_{n-1})(Px_{n-1})\tag{2.3}$$

$\mathscr{F}$-收敛于该方程之一解。

又若存在某一$\bar{x}\in X$，使得$\Gamma(\bar{x}):Y\to X$是满射；则方程(2.2)在$D(P)$中有唯一解。

证 由条件(i)及(2.3)式知，$\{x_n\}\subset D(P)$，且

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{Px_n}(\Phi^n(t))&=\tilde{F}_{P(x_{n-1}-\Gamma(x_{n-1})(Px_{n-1}))-Px_{n-1}-(-Px_{n-1})}(\Phi^n(t))\\&\geqslant\Delta(\tilde{F}_{-Px_{n-1}}(\Phi^{n-1}(t)),\ \Delta(\tilde{F}_{Px_{n-1}}(\Phi^{n-1}(t)),\ \tilde{F}_\theta(\Phi^{n-1}(t))))\\&=\Delta(\tilde{F}_{Px_{n-1}}(\Phi^{n-1}(t)),\ \tilde{F}_{Px_{n-1}}(\Phi^{n-1}(t)))\\&\geqslant\Delta^3(\tilde{F}_{Px_{n-2}}(\Phi^{n-2}(t)))\geqslant\cdots\\&\geqslant\Delta^{2^n-1}(\tilde{F}_{Px_0}(t)),\qquad\forall t\geqslant 0\end{aligned}\tag{2.4}$$

由条件(ii)及(2.4)式得

$$\begin{aligned}F_{x_n-x_{n+1}}(M\Phi^n(t))&=F_{\Gamma(x_n)(Px_n)}(M\Phi^n(t))\geqslant\tilde{F}_{Px_n}(\Phi^n(t))\\&\geqslant\Delta^{2^n-1}(\tilde{F}_{Px_0}(t)),\qquad\forall t\geqslant 0\end{aligned}\tag{2.5}$$

因Δ是h型t-范数，所以对任何$\lambda\in(0,1)$，存在$\delta\in(0,1)$，使得当$s>\delta$时有

$$\Delta^k(s)>1-\lambda,\qquad\forall k\in Z^+\tag{2.6}$$

注意到 $\sup\limits_{t>0}\tilde{F}_{Px_0}(t)=1$，所以存在$t_0>0$，使$\tilde{F}_{Px_0}(t_0)>\delta$，从而 $\Delta^k(\tilde{F}_{Px_0}(t_0))>1-\lambda(\forall k\in Z^+)$。又因$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Phi^n(t_0)<+\infty$，故对任何 $t>0$，存在 $N(t,\lambda)\in Z^+$，使当 $n>N(t,\lambda)$ 时有 $\sum\limits_{i=n}^{m}\Phi^i(t_0)<t/M$，于是由(2.5)式得

$$
\begin{aligned}
F_{x_n-x_m}(t)&\geqslant F_{x_n-x_m}\Big(\sum_{i=n}^{m}M\Phi^i(t)\Big)\\
&\geqslant\Delta(F_{x_n-x_{n+1}}(M\Phi^n(t_0)),\ \Delta(F_{x_{n+1}-x_{n+2}}(M\Phi^{n+1}(t_0)),\cdots,\\
&\quad\ \Delta(F_{x_{m-2}-x_{m-1}}(M\Phi^{m-2}(t_0)),\ F_{x_{m-1}-x_m}(M\Phi^{m-1}(t_0)))\cdots)\\
&\geqslant\Delta(\Delta^{2^n-1}(\tilde{F}_{Px_0}(t_0)),\ \Delta(\Delta^{2^{n+1}-1}(\tilde{F}_{Px_0}(t_0)),\cdots,\\
&\quad\ \Delta(\Delta^{2^{m-2}-1}(\tilde{F}_{Px_0}(t_0)),\ \Delta^{2^{m-1}-1}(\tilde{F}_{Px_0}(t_0)))\cdots)\\
&\geqslant\Delta(\Delta^{2^{m-1}-1}(\tilde{F}_{Px_0}(t_0)),\ \Delta(\Delta^{2^{m-1}-1}(\tilde{F}_{Px_0}(t_0)),\cdots,\\
&\quad\ \Delta(\Delta^{2^{m-1}-1}(\tilde{F}_{Px_0}(t_0)),\ \Delta^{2^{m-1}-1}(\tilde{F}_{Px_0}(t_0)))\cdots)\\
&=\Delta^{m-n-1}(\Delta^{2^{m-1}-1}(\tilde{F}_{Px_0}(t_0)))\\
&=\Delta^{(m-n)2^{m-1}-1}(\tilde{F}_{Px_0}(t_0))>1-\lambda,\qquad\forall m,n\in Z^+,m>n>N
\end{aligned}
$$

所以$\{x_n\}$是X中的$\mathscr{T}$-Cauchy列，由X的完备性，可设 $x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x_*\in X$。

又因$\lim\limits_{n\to\infty}\Phi^n(t_0)=0$，所以对任何$t>0$，存在$N_1(t,\lambda)\in Z^+$使得当$n>N_1(t,\lambda)$时有 $\Phi^n(t_0)<t$。于是

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_{Px_n-\theta}(t)&\geqslant\Delta(\tilde{F}_{Px_n}(\Phi^n(t_0)),\ \tilde{F}_{-\theta}(t-\Phi^n(t_0)))\\
&\geqslant\Delta(\Delta^{2^n-1}(\tilde{F}_{Px_0}(t_0)),1)=\Delta^{2^n-1}(\tilde{F}_{Px_0}(t_0))>1-\lambda\qquad n>N_1(t,\lambda)
\end{aligned}
$$

故 $Px_n\xrightarrow{\mathscr{T}}\theta$。注意到 $x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x_*$，$P$是$\mathscr{T}$-闭算子，所以$x_*\in D(P)$且$Px_*=\theta$，即$x_*$是方程(2.2)的解。由$x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x_*$知，迭代序列(2.3)$\mathscr{T}$-收敛于$x_*$。

最后证明当$\Gamma(\bar{x}):Y\to X(\bar{x}\in D(P))$为满射时，$x_*$是方程(2.2)的唯一解。假设 x_{**}也是方程(2.2)的解，则由$\Gamma(\bar{x})$的满射性知，存在$y\in Y$使$x_{**}-x_*=\Gamma(\bar{x})y$，于是，我们有

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_y(\Phi^n(t))&=\tilde{F}_{P(x_*+\Gamma(\bar{x})y)-Px_*-y}(\Phi^n(t))\\
&\geqslant\Delta(\tilde{F}_y(\Phi^{n-1}(t)),\ \Delta(\tilde{F}_{Px_*}(\Phi^{n-1}(t)),\ \tilde{F}_{y+Px_*}(\Phi^{n-1}(t))))\\
&=\Delta(\tilde{F}_y(\Phi^{n-1}(t)),\ \tilde{F}_y(\Phi^{n-1}(t)))\\
&\geqslant\cdots\geqslant\Delta^{2^n-1}(\tilde{F}_y(t)),\qquad\forall t\geqslant0
\end{aligned}\tag{2.7}
$$

因$\sup\limits_{t>0}\tilde{F}_y(t)=1$，所以存在$t_1>0$使$\tilde{F}_y(t_1)>\delta$。于是由(2.6)、(2.7)式得

$$\tilde{F}_y(\Phi^n(t_1))\geqslant\Delta^{2^n-1}(\tilde{F}_y(t_1))>1-\lambda$$

令$n\to+\infty$，得$\tilde{F}_y(0^+)\geqslant1-\lambda$。由$\lambda$的任意性，即知$\tilde{F}_y(0^+)=1$。所以 $\tilde{F}_y(t)=1$，$\forall t>0$。故$y=\theta$，即$x_{**}=x_*$。

定理2 设$(X,\mathscr{F},\Delta)$是$\mathscr{T}$-完备的Menger PN-空间，Δ是h型t-范数，设算子$P:X\to X$满足下列条件。对一切x，$y\in X$及$t\geqslant0$有

$$F_{P(x+y)-Px-y}(\Phi(t))\geqslant\Delta(F_y(t),\Delta(F_{Px}(t),\ F_{y+Px}(t)))\tag{2.8}$$

其中函数$\Phi: \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$满足条件$(\Phi)$，则算子方程$Px=\theta$在$X$中有唯一解$x_*$，且对任一 $x_0\in X$，迭代序列

$$x_n=x_{n-1}-Px_{n-1}$$

$\mathscr{T}$-收敛于x_*.

证 令$\Gamma(x)\equiv I(\forall x\in X)$，其中$I$为$X$上的恒同映象. 由定理1的证明知，$x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x_*\in X$，$Px_n\xrightarrow{\mathscr{T}}\theta$（注意，定理1的这段证明中，没有用到 P 的闭性，故对本定理仍适用）. 其中迭代序列

$$x_n=x_{n-1}-\Gamma(x_{n-1})(Px_{n-1})=x_{n-1}-Px_{n-1}$$

下面只需重证$Px_*=\theta$.

事实上，由(2.8)式得

$$\begin{aligned}F_{Px_*-Px_n-(x_*-x_n)}(t)&\geqslant F_{P(x_n+(x_*-x_n))-Px_n-(x_*-x_n)}(\Phi(t))\\&\geqslant\Delta(F_{x_*-x_n}(t),\ \Delta(F_{Px_n}(t),\ F_{(x_*-x_n)+Px_n}(t)))\end{aligned}$$

又因 $n\to\infty$，$x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x_*$，$Px_n\xrightarrow{\mathscr{T}}\theta$且$\Delta(\cdot,\cdot)$在点$(1,1)$处连续，故有

$$\lim_{n\to\infty}F_{Px_*-Px_n-(x_*-x_n)}(t)=1\qquad(\forall t>0)$$

从而$Px_n\xrightarrow{\mathscr{T}}Px_*$. 注意到$\mathscr{T}$是Hausdorff的，故有$Px_*=\theta$.

定理3 设$(X,\mathscr{T},\Delta)$，$(Y,\tilde{\mathscr{T}},\Delta)$，$P$及$\Gamma$如定理1，在定理1中，将条件(i)换为

(i)′ 存在满足条件(Φ)的函数$\Phi(t)$，使得对任何$x\in D(P)$及$y\in Y$，有 $x+\Gamma(x)y\in D(P)$且

$$\tilde{F}_{P(x+\Gamma(x)y)-Px-y}(\Phi(t))\geqslant\Delta(\tilde{F}_y(t),\ \Delta(\tilde{F}_{Px-y_0}(t),\ \tilde{F}_{(y-y_0)+Px}(t)))\qquad\forall t\geqslant0\tag{2.9}$$

其中$y_0\in Y$为任一固定元. 其余条件不变，则算子方程

$$Px=y_0\tag{2.2′}$$

在$D(P)$中有解，且对任一$x_0\in D(P)$，迭代序列

$$x_n=x_{n-1}-\Gamma(x_{n-1})(Px_{n-1}-y_0)\tag{2.3′}$$

$\mathscr{T}$-收敛于方程(2.2)′之一解.

又若存在某一$\bar{x}\in X$，使得$\Gamma(\bar{x}):Y\to X$为满射，则方程(2.2)′在$D(P)$ 中有唯一解.

证 令$\bar{P}x=Px-y_0$，易知Γ，$\bar{P}$满足定理1的所有条件. 因此，本定理的结论可由定理1推得.

取$\Phi(t)=qt(0<q<1)$，$\Delta=\min$，由定理3即得如下推论，

推论1 设$(X,\mathscr{T},\Delta)$，$(Y,\tilde{\mathscr{T}},\Delta)$，$P$，$\Gamma$与定理1中的相同，如果满足以下条件：

(i)″ 存在常数$q\in(0,1)$，使得对任何$x\in D(P)$，$y\in Y$，有$x+\Gamma(x)y\in D(P)$且

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{P(x+\Gamma(x)y)-Px-y}(t)\geqslant\min\{&\tilde{F}_y(t/q),\ \tilde{F}_{Px-y_0}(t/q),\\&\tilde{F}_{(y-y_0)+Px}(t/q)\},\qquad\forall t\geqslant0\end{aligned}\tag{2.10}$$

(ii) 存在常数$M>0$，使得对一切$x\in D(P)$，$y\in Y$有

$$F_{\Gamma(x)y}(t)\geqslant\tilde{F}_y(t/M),\qquad\forall t\geqslant0$$

则定理3的结论仍成立.

注2 [1]中定理4、[4]中定理3.1都是推论1的特例，从而更是定理3的特例. 定理3也是[1]中定理 1 在某种意义下的改进和推广.

三、应 用

作为应用，在这一节中我们将利用上节得到的结果来证明 Menger PN-空间和赋范空间中的两个不动点定理。

定理4 设$(X,\mathscr{F},\Delta)$是$\mathscr{F}$-完备的Menger PN-空间，Δ是h型t-范数，$T:X\to X$ 是映象，如果存在满足条件(Φ)的函数$\Phi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$及函数$m:X\to Z^+$，使得对一切$x$，$y\in X$

$$F_{T^{m(x)}x-T^{m(y)}y}(\Phi(t))\geqslant\Delta(F_{x-y}(t),\Delta(F_{x-T^{m(x)}x}(t),F_{y-T^{m(x)}x}(t))),\qquad\forall t\geqslant 0 \tag{3.1}$$

则T在X中有唯一不动点x_*，且对任一$x_0\in X$，迭代序列$x_n=T^{m(x_{n-1})}x_{n-1}$ $\mathscr{F}$-收敛于x_*。

证 令$Px=x-T^{m(x)}x(\forall x\in X)$，则$T^{m(x)}x=x-Px$。于是(3.1)式化为

$$F_{(x-y)-(Px-Py)}(\Phi(t))\geqslant\Delta(F_{x-y}(t),\Delta(F_{Px}(t),F_{y-x+Px}(t))) \tag{3.1$'$}$$

再在上式中以$x+y$换y，即得(2.8)式。因此，由定理2知方程$Px=\theta$在X中有唯一解x_*。即x_*是$T^{m(x_*)}$的唯一不动点，且迭代序列

$$x_n=x_{n-1}-Px_{n-1}=T^{m(x_{n-1})}x_{n-1}$$

$\mathscr{F}$-收敛于x_*。注意到$T^{m(x_*)}(Tx_*)=T(T^{m(x_*)}x_*)=Tx_*$，即$Tx_*$也是$T^{m(x_*)}$的不动点。从而$Tx_*=x_*$，即$x_*$也是$T$的不动点。若$x_{**}$也是$T$的不动点，则由$Tx_{**}=x_{**}$可推得$T^{m(x_*)}x_{**}=x_{**}$，因$x_*$是$T^{m(x_*)}$的唯一不动点，故$x_{**}=x_*$。这便证明了$x_*$是$T$的唯一不动点。

在(3.1)式中令$\Phi(t)=qt\ (0<q<1)$，$m(x)\equiv 1$，$\Delta=\min$，即得如下推论：

推论2 设$(X,\mathscr{F},\Delta)$是$\mathscr{F}$-完备的Menger PN-空间，Δ是h型t-范数。设映象$T:X\to X$满足以下条件：存在$q\in(0,1)$使得对一切$x,y\in X$有

$$F_{Tx-Ty}(t)\geqslant\min\{F_{x-y}(t/q),\ F_{x-Tx}(t/q),\ F_{y-Tx}(t/q)\},\qquad\forall t\geqslant 0 \tag{3.2}$$

则T在X中存在唯一不动点x_*，且对任一$x_0\in X$，迭代序列$x_n=Tx_{n-1}(n=1,2,\cdots)$ $\mathscr{F}$-收敛于x^*。

注3 [1]中定理5是推论2的特例。推论2也是Banach压缩映象原理在Menger PN-空间的推广。

定理5 设$(X,\|\cdot\|)$是Banach空间，映象$T:X\to X$满足以下条件：存在满足条件(Φ)的严格增函数$\Phi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$和存在函数$m:X\to Z^+$，使得对一切$x,y\in X$，

$$\|T^{m(x)}x-T^{m(y)}y\|\leqslant\Phi(\max\{\|x-y\|,\|x-T^{m(x)}x\|,\|y-T^{m(x)}x\|\}) \tag{3.3}$$

则T在X中有唯一不动点x_*，且对任一$x_0\in X$，迭代序列$x_n=T^{m(x_{n-1})}x_{n-1}$ $\mathscr{F}$-收敛于x_*。

证 我们定义$\mathscr{F}:X\to\mathscr{D}$如下：

$$\mathscr{F}(x)(t)=F_x(t)=H(t-\|x\|) \tag{3.4}$$

则$(X,\mathscr{F},\min)$是$\mathscr{F}$-完备的Menger PN-空间。由(3.3)式不难推得(3.1)式。事实上，不妨设$F_{x-y}(t)$，$F_{x-T^{m(x)}x}(t)$和$F_{y-T^{m(x)}x}(t)$都等于1，则由(3.4)式知$\|x-y\|<t$，$\|x-T^{m(x)}x\|<t$，$\|y-T^{m(x)}x\|<t$。从而由(3.3)式及$\Phi(t)$的严格递增性得$\|T^{m(x)}x-T^{m(y)}y\|<\Phi(t)$，故有$F_{T^{m(x)}x-T^{m(y)}y}(\Phi(t))=1$。因此(3.1)式成立。于是，由定理4即得所需结论。

注4 定理5是Banach压缩映象原理的推广。

参 考 文 献

[1] 张石生，概率收缩与概率赋范空间中非线性方程的解，科学通报，35(19) (1990)，1451—1454.

[2] 张石生、彭永成，概率收缩偶与非阿基米德 Menger 概率赋范空间中非线性方程组的解，应用数学和力学，12(11) (1991)，965—971.

[3] 张石生，《不动点理论及应用》，重庆出版社 (1984).

[4] 曾文智，概率收缩和PN-空间的方程，数学研究与评论，11(1) (1991)，47—51.

[5] M. Altman, *Contractors and Contractor Directions Theory and Applications*, Marcel Dekker, New York (1977).

[6] A. C. Lee and W. J. Padgett, Random contractors with random nonlinear majorant functions, *Nonlinear Anal. TMA*, 3 (1979), 707—715.

[7] A. C. Lee and W. J. Padgett, Solutions of random operator equations by random step-contractors, *Nonlinear Anal. TMA*, 4 (1980), 145—151.

[8] A. C. Lee and W. J. Padgett, Random contractors and the solution of random nonlinear equations, *Nonlinear Anal. TMA*, 1 (1977), 173—185.

[9] O. Hadžić, Fixed point theorems for multi-valued mapping in probabilistic metric space, *Mat. Vesnik*, 3(16) (1979), 125—133.

(Φ,Δ)-Type Probabilistic Contractor and Solutions for a Nonlinear Operator Equations in Menger PN-Spaces

Fang Jinxuan

(Department of Mathematics, Nanjing Normal University, Nanjing 210024, P. R. China)

Abstract

The purpose of this paper is to introduce the concept of (Φ,Δ)-type probabilistic contractor in Menger PN-spaces and to study the existence and uniqueness of solutions for the nonlinear operator equations with the probabilistic contractor in Menger PN-spaces. The results presented in this paper improve and extend the corresponding results in [1] and [4—8].

Key words Menger PN-space, t-norm of h-type, probabilistic contractor, operator equation