

一种 h 型自适应有限单元*

徐 兴¹ 凌道盛¹ 丁皓江¹ 杜庆华²

(1994年11月25日收到, 1996年1月11日收到修改稿)

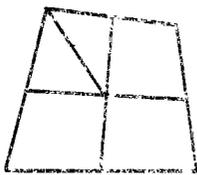
摘 要

h 型自适应有限单元在网格局部细划时, 会产生非常规节点, 从而破坏了一般意义上的单元连续性假定。本文利用参照节点对非常规单元进行坐标和位移插值, 为保证单元之间坐标和位移的连续性, 本文提出了一组修正的形函数, 常用的形函数是它的一个特例。本方法应用于有限元程序时, 除形函数外无须做任何改动, 算例表明本文的方法具有方法简单、精度高、自由度少、计算量小等优点。

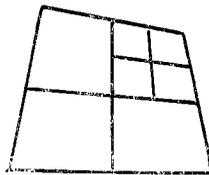
关键词 自适应网格 有限单元 误差估计

一、引 言

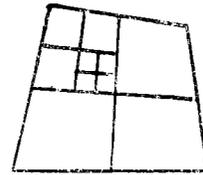
自适应有限单元法 (AFEM) 通过对有限单元的基本参数 (如单元几何尺寸 h 、单元插值形函数的阶次 p 、单元节点的位置 R) 的优化配置, 达到采用最少自由度获得要求精度的目的。根据不同的优化参数, 自适应有限单元分为 h 型、 p 型、 $h-p$ 型和 R 型四类^[1]。目前已有一系列这方面的文献^[2-9]发表。 p 型自适应有限单元具有较快的收敛速度, 但需要特殊的数据结构和求解器, 而 h 型自适应有限单元则不同, 它更容易被应用于比较成熟的有限元程序。



(a) 常规网格



(b) 一阶非常规网格



(c) 二阶非常规网格

图1 常规和非常规网格

h 型自适应有限单元的局部网格细剖不可避免地引入非常规节点。按文[8]所述, 如果某节点是所有与它相临单元的节点, 称为常规节点, 否则称之为非常规节点 (irregular node)。含有非常规节点的网格称为非常规网格 (irregular mesh)。通常以单元一边上

* 国家自然科学基金资助项目

1 浙江大学力学系, 杭州 310027

2 清华大学力学系, 北京 100084

非常规节点数目的最大值作为网格非常规程度的指标 (index of irregularity, 如图 1 示)。指标为 k 的网格称为 k 阶非常规网格。非常规节点的存在破坏了一般意义上的单元间连续性假定。以三个 8 节点单元构成的平面网格 (图 2) 为例, 非常规节点 A 和 B 使得函数 f (如坐标 x , 位移 u) 在穿越单元交界面时不再连续, 这种不连续现象影响数值解的精度和稳定性。为此必须强加一个约束条件:

$$f(A) = \alpha f(C) + \beta f(D) + \gamma f(E)$$

式中, α, β, γ 为给定的参数。这种方法的缺点是: 不易应用于成熟的有限元程序、计算量较大、对高阶非常规网格不易处理。鉴于非常规节点的不独立性, 本文利用节点 E 和 C (而不是非常规节点 A 和 B) 对单元进行坐标和位移插值。这里, 我们称节点 E 是非常规节点 A 的参照节点, 称节点 C 是非常规节点 B 的参照节点。为方便起见, 定义常规节点的参照节点是它本身。下文我们将讨论适用于非常规 8 节点平面单元和 20 节点空间单元的形函数。分别记 $N_i(\xi, \eta), \psi_i(\xi, \eta, \xi)$ 为常规 8 节点平面单元和 20 节点空间单元 (图 3) 的形函数, 并定义

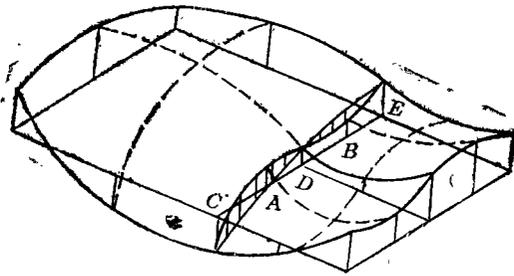


图2 位移不连续性

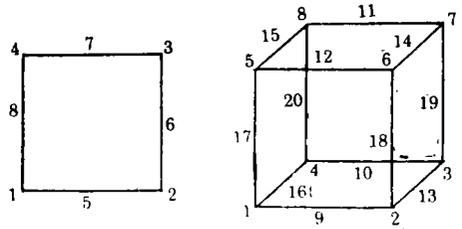


图3 常规8节点和20节点单元

$$L_1(\xi) = -\xi(1-\xi)/2, L_2(\xi) = 1-\xi\xi, L_3(\xi) = \xi(1+\xi)/2 \tag{1.1}$$

二、8节点平面单元和20节点空间单元

8节点平面单元(Q^2)和20节点空间单元(Q^3)得到广泛的应用。这一部分将细致地讨论适用于非常规 Q^2 单元的修正形函数, 并对非常规 Q^3 单元进行分析。应当说明的是, 本文的方法可以很容易地推广到其它类型的单元。

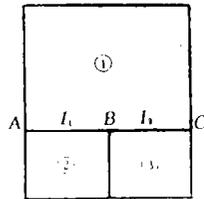


图4 平面非常规单元

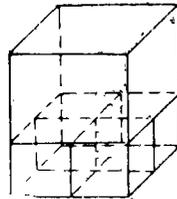


图5 空间非常规单元

如图 4 示, 单元 ② 和 ③ 各含一个非常规节点 I_1 和 I_2 。公共边 AI_1B 的坐标和位移可分别由 ①、② 单元插值得到:

$$\left. \begin{aligned} x_\alpha &= L_1(\xi^1)x_\alpha^A + L_2(\xi^1)x_\alpha^B + L_3(\xi^1)x_\alpha^C \\ u_\alpha &= L_1(\xi^1)u_\alpha^A + L_2(\xi^1)u_\alpha^B + L_3(\xi^1)u_\alpha^C \end{aligned} \right\} \alpha = 1, 2, \xi^1 \in [-1, 0] \tag{2.1}$$

$$\left. \begin{aligned} x_\alpha &= L_1(\xi^2)x_\alpha^A + L_2(\xi^2)x_\alpha^B + L_3(\xi^2)x_\alpha^C \\ u_\alpha &= L_1(\xi^2)u_\alpha^A + L_2(\xi^2)u_\alpha^B + L_3(\xi^2)u_\alpha^C \end{aligned} \right\} \alpha=1,2; \xi^2 \in [-1,1] \quad (2.2)$$

式中, ξ^1, ξ^2 分别为单元①和②的局部坐标. 假定当 $\xi^1 = \bar{\xi} (\bar{\xi} \in (-1,0))$ 时有: $x_\alpha = x_\alpha^B, u_\alpha = u_\alpha^B$, 即

$$\left. \begin{aligned} x_\alpha^B &= L_1(\bar{\xi})x_\alpha^A + L_2(\bar{\xi})x_\alpha^B + L_3(\bar{\xi})x_\alpha^C \\ u_\alpha^B &= L_1(\bar{\xi})u_\alpha^A + L_2(\bar{\xi})u_\alpha^B + L_3(\bar{\xi})u_\alpha^C \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

把(2.3)式代入(2.2)式,

$$\left. \begin{aligned} x_\alpha &= \bar{L}_1(\xi^2)x_\alpha^A + \bar{L}_2(\xi^2)x_\alpha^B + \bar{L}_3(\xi^2)x_\alpha^C \\ u_\alpha &= \bar{L}_1(\xi^2)u_\alpha^A + \bar{L}_2(\xi^2)u_\alpha^B + \bar{L}_3(\xi^2)u_\alpha^C \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

式中,

$$\bar{L}_1(\xi) = L_1(\bar{\xi})L_2(\xi) + L_1(\xi), \quad \bar{L}_2(\xi) = L_2(\bar{\xi})L_2(\xi) + L_3(\xi), \quad \bar{L}_3(\xi) = L_3(\bar{\xi})L_2(\xi)$$

比较(2.1)式和(2.4)式可见, 如果存在某个 $\bar{\xi}$ 和某个关于 $\xi^1 \in [-1,0]$ 和 $\xi^2 \in [-1,1]$ 的一一对应关系使得下式恒成立:

$$L_i(\xi^1) = \bar{L}_i(\xi^2) \quad (i=1,2,3) \quad (2.5)$$

则①②单元间的连续性可得到保证, 考虑到恒等式

$$L_1(\xi^1) + L_2(\xi^1) + L_3(\xi^1) = \bar{L}_1(\xi^2) + \bar{L}_2(\xi^2) + \bar{L}_3(\xi^2) = 1 \quad (2.6)$$

式(2.5)只有两个是独立的, 容易导出

$$\bar{\xi} = -1/2, \quad \xi^1 = (\xi^2 - 1)/2 \quad (2.7)$$

同样, 对于单元①③我们也可以导出

$$\bar{\xi} = 1/2, \quad \xi^1 = (\xi^3 + 1)/2 \quad (2.8)$$

根据(2.7)式和(2.8)式我们可以得到适用于非常规单元的改进形函数

$$\bar{N}_i = N_i + L_1(\bar{\xi}_j)N_j + L_2(\bar{\xi}_k)N_k, \quad \bar{N}_{i+4} = L_3(\bar{\xi}_{i+4})N_{i+4} \quad (2.9)$$

式中, $i=1,2,3,4, j=5,6,7,8, k=8,5,6,7, \bar{\xi}_j (j=5,6,7,8)$ 是由参照节点位置来确定, 以 $\bar{\xi}_5$ 为例,

$$\bar{\xi}_5 = \begin{cases} -1/2 & \text{节点5是非常规节点且参照节点在12方向} \\ 1/2 & \text{节点5是非常规节点且参照节点在21方向} \\ 0 & \text{节点5是常规节点} \end{cases}$$

非常规 Q^3 单元修正形函数的构造与非常规 Q^2 单元在本质上是相同的, 但前者更为复杂, 非常规节点和参照节点之间不一定有一一对应关系. 如图5示是一个“大”单元和四个“小”单元的交界面. R_i 表示常规节点, I_i 表示非常规节点. 根据上述推导可见: ①②单元间满足

$$\xi^1 = (\xi^2 - 1)/2, \quad \eta^1 = (\eta^2 - 1)/2 \quad (2.10)$$

为描述方便起见, 称 Q^3 单元表面的每一部分为单元面 (一个 Q^3 单元有六个单元面), 不包含非常规节点的单元面是常规的, 否则为非常规的. 如图6示, 称单元面 $P = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8\}$ 为非常规单元面 $p = \{R_1, R_5, I_1, R_8, I_5, I_3, I_2, I_{13}\}$ 的参照单元面. 规定常规单元面的参照单元面是它本身. 则修正形函数可表示为,

$$\bar{\psi}_{I_i} = \sum_{j=1}^8 N_i(\bar{\xi}_{I_j}, \bar{\eta}_{I_j}) \psi_{I_j} \quad (2.11)$$

式中, $i (i=1,2,\dots,8)$ 是单元面的节点序号 (同 Q^2 单元), I_i 为对应节点在 Q^3 单元中的节点

序号(如图6示)。\$\bar{\xi}_{I_i}\$和\$\bar{\eta}_{I_i}\$是节点\$I_i\$在参照单元面中的局部坐标。对常规单元面,由于参照单元面是它自身,因此有\$N_i(\bar{\xi}_{I_i}, \bar{\eta}_{I_i}) = \delta_{ij}\$,即得到常用的形函数\$\bar{\psi}_{,i} = \psi_{,i}\$。

由(2.9)和(2.11)式不难看出,新的形函数具有以下优点:

1. 新的形函数形式非常简洁;
2. 新的形函数在保留等参插值的基础上保证了传统的连续性假定;
3. 新的形函数与常规形函数能很好地一致。后者是前者的一个特例;前者可由后者求得;
4. 采用新的形函数降低了节点和自由度的数目(非常规节点不再是真实节点),强制约束的困难得以避免。

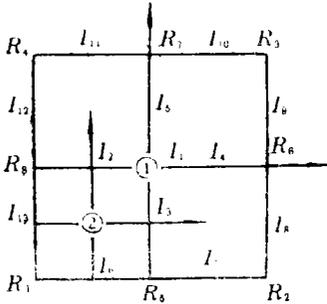


图6 单元面

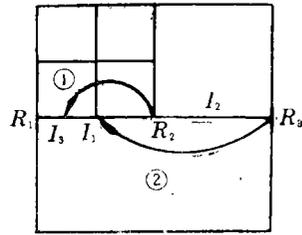


图7 高阶非常规网格

前面讨论的仅限于一阶非常规网格。对于高阶非常规网格,上述方法经过迭代仍旧适用。这里只以\$Q^2\$单元为例加以说明。图7示出一个二阶非常规网格,对于①单元,\$R_3\$是\$I_1\$的参照节点,用\$R_3\$代替\$I_1\$,由(2.9)式得形函数\$\bar{N}_i\$;\$R_2\$是\$I_3\$参照节点,用\$R_2\$代替\$I_3\$,令\$N_i = \bar{N}_i\$,由(2.9)式即得适用于单元①的形函数\$\bar{N}_i\$。显然,这一过程在计算机上是很容易实现的。

三、误差估计和灵活的自适应方式

给出一个可靠的判据判定数值结果的有效性对数值分析来说是非常重要而且困难的。目前已提出很多种事后误差估计因子^[31~37]。本文采用了文[4]提出的能量模误差估计因子。对下述形式的边值问题

$$\begin{cases} -\nabla^T a \nabla u + bu + f = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 域内} \\ u = 0 & \text{在约束函数边界 } \Gamma_d \text{ 上} \\ a(\partial u / \partial n) = q & \text{在给定通量边界 } \Gamma_t \text{ 上} \end{cases} \quad (3.1)$$

能量模形式的误差估计因子为,

$$\|e\|^2 = \sum_{\Omega_i} \int_{\Omega_i} e r d\Omega + \sum_{\Gamma_k \notin \Gamma} \int_{\Gamma_k} e \rho d\Gamma - \sum_{\Gamma_k \in \Gamma} \int_{\Gamma_k} e \xi d\Gamma \quad (3.2)$$

式中, \$e = \bar{u} - u\$, \$r = -\nabla^T a \nabla \bar{u} + b\bar{u} + f\$, \$\xi = q - a(\partial \bar{u} / \partial n)\$, \$\rho = J[a(\partial \bar{u} / \partial n)]_{\Gamma_k} \delta_k\$。
\$\bar{u}\$为数值解, \$u\$为精确解, \$\Omega_i\$是单元所占区域, \$\Gamma_i\$是单元间的交界面, \$J[\]\$为阶跃量。

对于一些具有规则几何形状的单元(如矩形单元),某一个或两个方向往往容易达到一

定的精度要求，一个灵活的自适应策略将可以减少单元的数目。如图8示，如果沿某一方向误差估计因子达到一定的精度，则该方向不再网格剖分（注意确保单元良好的几何性质）。

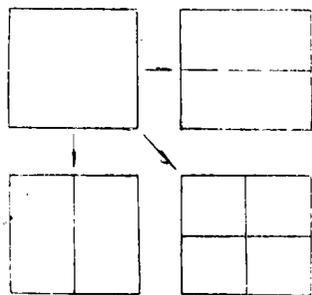


图8 灵活的自适应方式 (平面)

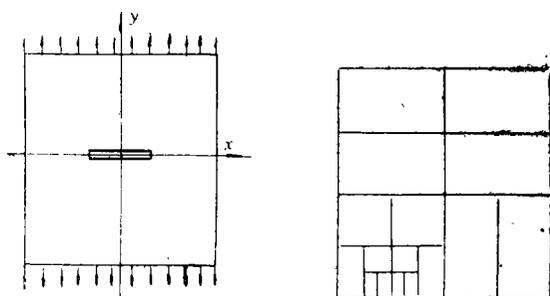


图9 Griffith 问题及网格

四、数值算例

为验证方法的有效性，计算了两个算例。

算例1 Griffith 裂纹问题

如图9所示含裂纹的无限大平板受垂直于裂纹方向的均布荷载 p 的作用。裂纹长度为 a ，文[10]给出了在平面应变条件下裂纹表面的法向位移。

$$v(x,0) = \begin{cases} \frac{2(1-\mu^2)ap}{E} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad (4.1)$$

式中， E 为弹性模量， μ 为泊松比，这里取 $p=1$ ， $a=4$ ， $E=7.28$ ， $\mu=0.3$ 。由问题的对称性取四分之一进行计算(网格如图9示，共16个单元，168个自由度)。数值结果如图10所示，节点位移的最大百分误差为2%。由此可见，对非常规网格采用新的形函数是很有效的。

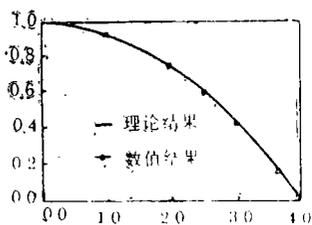


图10 裂纹表面法向位移

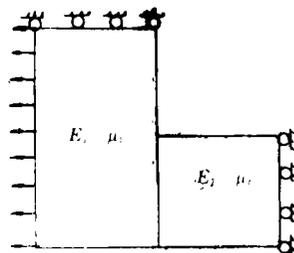


图11 L型域

算例2 L型域

由两种不同的材料($E_2=3E_1$ ， $\mu_2=\mu_1$)组成的L型域承受如图11所示的均布荷载作用。图12是自适应五步对应的网格。与文[5]比较，两者的网格粗细分布的趋势完全一致。

五、结论

本文通过修改习用的形函数以确保非常规单元的连续性，该方法简单方便。修正的形函

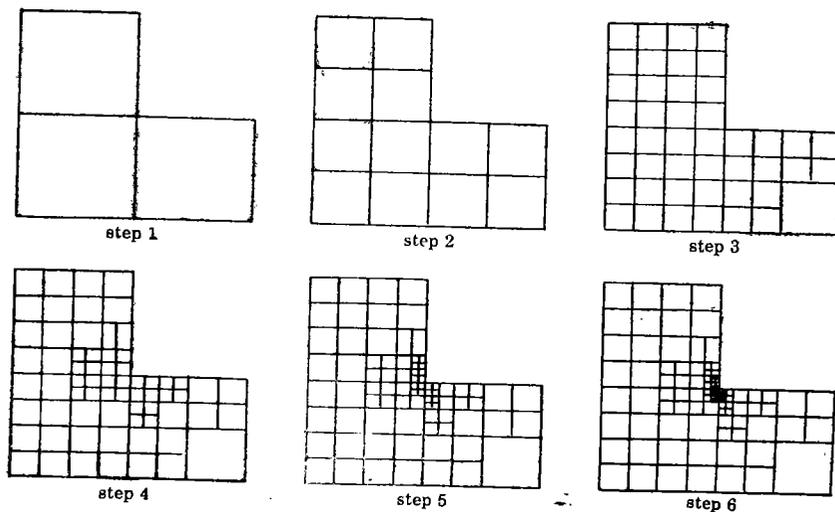


图12 L型域的网络自适应

数和习用的形函数有很好的一致性。灵活的自适应方式减少了单元的数目，加速了自适应过程的完成。

参 考 文 献

- [1] A. K. Noor and S. N. Atluri, Advances and trends in computational structural mechanics, *AIAA Journal*, 25 (1987), 977—995.
- [2] L. Demkowicz, J. T. Oden, W. Rachowicz and O. Hardy, Toward a universal h - p adaptive finite element strategy, Part 1: Constrained approximation and data structure, *Comput. Method Appl. Mech. Engng.*, 77 (1989), 79—112.
- [3] J. T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz and T. A. Westermann, Toward a universal h - p adaptive finite element strategy, Part 2: A posteriori error estimation, *Comput. Methods Appl. Engng.*, 77 (1989), 113—180.
- [4] D. W. Kelly, J. P. DE S. R. Gago and O. C. Zienkiewicz, A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method, Part I: Error analysis, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 19 (1983), 1593—1619.
- [5] J. P. DE S. R. Gago, D. W. Kelly and O. C. Zienkiewicz, A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method, Part I: Adaptive mesh refinement, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 19 (1983), 1621—1656.
- [6] R. E. Bank and A. Werser, Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations, *Math. Comput.*, 44 (1985), 283—301.
- [7] I. Babuska and A. Miller, A feedback finite element method with a posteriori error estimation, Part I: The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 61 (1987), 1—40.
- [8] W. C. Rheinboldt and CH. K. Mesztenyi, On a data structure for adaptive finite element mesh refinement, *ACM Trans., Math. Software*, 6 (1980), 166—187.

- [9] L. Demkowicz and J. T. Oden, A review of local mesh refinement techniques and corresponding data structures in h -type adaptive finite element methods, TICOM Rept. 88-02, the Texas Institute for Computational Mechanics, the University of Texas at Austin, Texas 78-12 (1983).
- [10] 范天佑, 《断裂力学基础》, 江苏科学技术出版社 (1978).

An h -Type Adaptive Finite Element

Xu Xing Ling Daosheng Ding Haojiang

(Zhejiang University, Hangzhou 310027, P. R. China)

Du Qinghua

(Qinghua University, Beijing 100084, P. R. China)

Abstract

For h -type adaptive finite element method, the local mesh refinement introduces irregular nodes and destroys the standard continuity between elements. The reference nodes of the irregular are used to interpolate element coordinates and displacements. The improved shape functions, of which the conventional shape functions are a particular case, are presented to guarantee the continuity. No changes but the shape functions are needed when the method is applied in finite element programs. The computational results show the features of the method, higher accuracy, simplicity, fewer degrees of freedom and less computation effort.

Key words adaptive mesh, finite element, error estimation