应用数学和力学，第17卷 第6期（1996年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性随机积分和微分方程组的解*

丁协平[1]　　王　凡[2]

（1995年2月27日收到）

摘　要

在本文中我们首先对具有随机定义域的连续随机算子组证明了Darbao型不动点定理。应用此定理我们给出了非线性随机 Volterra 积分方程组和非线性随机微分方程组的Cauchy问题解的存在性准则。这些随机方程组的极值随机解的存在性和随机比较结果也被获得。我们的定理改进和推广了Vaughn，Lakshmikantham，Lakshmikantham-Leela，De Blasi-Myjak和第一作者的相应结果。

关键词　非线性积分方程　随机 Volterra 积分方程　随机Cauchy问题　极值随机解　比较结果

一、引　言

已知随机积分和微分方程的理论在许多应用科学领域内有广泛的应用，例如工程、物理、化学、生物和系统科学等(见[1—3])。因此有许多数学家从事这一课题的研究。最近第一作者[4,5]已得到了非线性随机 Volterra 积分方程和非线性随机微分方程解的存在性准则和极值随机解的某些存在性定理。这些结果推广了文献中的某些已知结果。

在本文中我们将推广[4,5]中的结果到非线性随机积分和微分方程组。首先对具有随机定义域的连续随机算子组证明了一个Darbao 型随机不动点定理。应用此定理，对非线性随机Volterra 积分方程组和非线性随机微分方程组的Cauchy 问题给出了解的存在性准则。这些非线性随机方程组的极值随机解的存在性定理和比较结果也被获得。我们的结果改进和推广了Vaughn[6,7]，Lakshmikantham[8]，Lakshmikantham-Leela[2]，De Blasi-Myjak[9]和Ding[4,5]的相应结果。

二、预　备　知　识

设$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$是完备σ-有限测度空间，$X_i, i=1,\cdots,n$是可分Banach空间和 $CL(X_i)$ 是

---

* 国家自然科学基金资助项目

1 四川师范大学数学系，成都 610066

2 南通师范专科学校数学系，江苏南通 226007

X_i的一切非空闭子集的族．令$X=X_1\times\cdots\times X_n$．对每一$x=(x_1,\cdots,x_n)\in X$，定义$\|x\|=\max\limits_{1\le i\le n}\|x_i\|$．则$X$也是一可分Banach空间．

定义2.1 称映射$x_i:\Omega\to X_i$是X_i-值随机变量如果对每一开集$A_i\subset X_i$，$x_i^{-1}(A_i)=\{\omega\in\Omega:\ x_i(\omega)\in A_i\}\in\mathscr{A}$．称集值映射$E:\Omega\to CL(X)$是可测的如果对每一开集$A\subset X$，$E^{-1}(A)=\{\omega\in\Omega:E(\omega)\cap A\neq\phi\}\in\mathscr{A}$．定义$E$的图为$\mathrm{Gr}(E)=\{(\omega,x)\in\Omega\times X:x\in E(\omega)\}$．

定义2.2 称映射$T_i:\mathrm{Gr}(E)\to X_i$是具有随机定义域$E$的连续随机算子如果

(i) 对每一$\omega\in\Omega$，$x^0\in E(\omega)$，$\{x^m\}_{m\ge1}\subset E(\omega)$和当$m\to\infty$时$x^m\to x^0$则当$m\to\infty$时有$T_i(\omega,x^m)\to T_i(\omega,x^0)$；

(ii) 对每一$x\in X$和对每一开集$A_i\subset X_i$，$\{\omega\in\Omega:x\in E(\omega),\ T_i(\omega,x)\in A_i\}\in\mathscr{A}$．

令$a_{i,j}:\Omega\to[0,\infty)$，$i,j=1,\cdots,n$是实值随机变量．定义

$$a_{i,j}^1(\omega)=\begin{cases}a_{i,j}(\omega), & i\neq j,\\ 1-a_{i,j}(\omega), & i=j;\ i,j=1,\cdots,n\end{cases}$$

$$a_{i,j}^{l+1}(\omega)=\begin{cases}a_{1,1}^l(\omega)a_{i+1,j+1}^l(\omega)+a_{i+1,1}^l(\omega)a_{1,j+1}^l(\omega), & i\neq j\\ a_{1,1}^l(\omega)a_{i+1,j+1}^l(\omega)-a_{i+1,1}^l(\omega)a_{1,j+1}^l(\omega), & i=j\\ l=1,\cdots,n-1;\ i,j=1,\cdots,n-l\end{cases}$$

引理2.1[10] 存在正实值随机变量$r_i(\omega)$，$i=1,\cdots,n$，使得

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}(\omega)r_j(\omega)<r_i(\omega),\qquad \forall\omega\in\Omega,i=1,\cdots,n\tag{2.1}$$

的充要条件是

$$a_{i,j}^l(\omega)>0,\qquad \forall\omega\in\Omega,\ l=1,\cdots,n;\ i,j=1,\cdots,n+1-l$$

对有界集$S_i\subset X_i$，$\alpha(S_i)$表S_i的Kuratowski非紧性测度，对α的性质读者可参见[6，引理2.1]．

定理2.1 设$T_i:\mathrm{Gr}(E)\to X_i,i=1,\cdots,n$是具有随机定义域$E$的连续随机算子．假设

(i) 对每一$\omega\in\Omega$，$E(\omega)=E_1(\omega)\times\cdots\times E_n(\omega)$，其中$E_i(\omega)$是$X_i$的非空闭凸子集和$T_i(\omega,E(\omega))\subset E_i(\omega),i=1,\cdots,n$；

(ii) 对每一$\omega\in\Omega$，$B_i\subset E_i(\omega),i=1,\cdots,n$，

$$\alpha(T_i(\omega,B))\leqslant\sum_{j=1}^n a_{i,j}(\omega)\alpha(B_j)$$

其中$B=B_1\times\cdots\times B_n$，$T_i(\omega,B)=\{T_i(\omega,x):x\in B\}$和$a_{i,j}(\omega)$，$i,j=1,\cdots,n$是非负实值随机变量使得随机不等式组(2.1)有随机正解$(r_1(\omega),\cdots,r_n(\omega))$．

则随机算子组$T_i,i=1,\cdots,n$有随机不动点，即存在X-值随机变量$(x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega))\in E(\omega)$，$\forall\omega\in\Omega$使得

$$x_i^*(\omega)=T_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)),\ \forall\omega\in\Omega,\ i=1,\cdots,n$$

证明 对每一$\omega\in\Omega$，令

$$E_i^1(\omega)=E_i(\omega),\qquad (i=1,\cdots,n)$$

$$E_i^{m+1}(\omega)=\overline{\mathrm{co}}(T_i(\omega,E_1^m(\omega),\cdots,E_n^m(\omega))),\ i=1,\cdots,n;\ m=1,2,\cdots$$

由假设(i)推得$E_i^2(\omega)\subset E_i^1(\omega)$，$i=1,\cdots,n$．由归纳法，我们有

$$E_i^{m+1}(\omega)\subset E_i^m(\omega),\qquad (i=1,\cdots,n;\ m=1,2,\cdots)$$

令$K_i(\omega)=\bigcap_{m\geq 1}E_i^m(\omega)$，$i=1,\cdots,n$，则每一$K_i(\omega)$是闭凸的。

因为随机不等式组(2.1)的随机正解的集对正数的乘法是封闭的，不失一般性，我们能假设

$$\alpha(E_i^1(\omega))\leqslant r_i(\omega)\qquad(i=1,\cdots,n)\tag{2.2}$$

令
$$q(\omega)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{r_i^{-1}(\omega)\sum_{j=1}^n a_{i,j}(\omega)r_j(\omega)\right\}$$

则$0\leqslant q(\omega)<1$且

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}(\omega)r_j(\omega)\leqslant q(\omega)r_i(\omega)\qquad(i=1,\cdots,n)$$

从α的性质，假设(ii)和(2.2)式推得

$$\begin{aligned}\alpha(E_i^2(\omega))&=\alpha(\overline{\mathrm{co}}(T_i(\omega,E_1^1(\omega),\cdots,E_n^1(\omega))))\\&=\alpha(T_i(\omega,E_1^1(\omega),\cdots,E_n^1(\omega)))\\&\leqslant\sum_{j=1}^n a_{i,j}(\omega)\alpha(E_j^1(\omega))\\&\leqslant\sum_{j=1}^n a_{i,j}(\omega)r_j(\omega)\\&\leqslant q(\omega)r_i(\omega)\qquad(i=1,\cdots,n)\end{aligned}$$

由归纳法我们有

$$\alpha(E_i^m(\omega))\leqslant[q(\omega)]^{m-1}r_i(\omega)\qquad(i=1,\cdots,n)$$

因$0\leqslant q(\omega)<1$，我们有

$$\alpha(E_i^m(\omega))\to 0,\qquad \text{当}m\to\infty,\ i=1,\cdots,n$$

因此$K_i(\omega)=\bigcap_{m\geq 1}E_i^m(\omega)$，$i=1,\cdots,n$是非空紧凸集。

令$K(\omega)=K_1(\omega)\times\cdots\times K_n(\omega)$，则$K(\omega)$也是紧凸的，容易看出

$$T_i(\omega,K(\omega))\subset K_i(\omega)\qquad(i=1,\cdots,n)$$

令$T=(T_1,\cdots,T_n)$，则$T(\omega,\cdot):K(\omega)\to K(\omega)$是连续的。由Schauder不动点定理和$\omega\in\Omega$的任意性知$T$有广义不动点。从丁[4]的引理2.2推得存在$X$-值随机变量$(x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega))\in E(\omega)$，$\forall\omega\in\Omega$使得

$$(x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega))=T(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)),\qquad\forall\omega\in\Omega$$

且因此有

$$x_i^*(\omega)=T_i(\omega,x_1^*(\omega),\cdots,x_n^*(\omega)),\qquad\forall\omega\in\Omega,\ i=1,\cdots,n$$

注2.1 定理2.1推广了Darbao不动点定理和丁[4]的定理2.1到非线性连续随机算子组。

令G_i是X_i的开子集，$J=[t_0,t_0+a]\subset\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}$是一切实数的集。令

$$C[J,X_i]=\{x_i:J\to X_i\mid x_i\text{连续},\ \|x_i\|_J=\max_{t\in J}\|x_i(t)\|\}$$

则$(C[J,X_i],\|\cdot\|_J)$是可分Banach空间。令

$$D[\Omega\times J,G_i]=\{x_i:\Omega\times J\to G_i\mid x_i(\omega,\cdot)\text{连续},x_i(\cdot,t)\text{是}X_i\text{-值随机变量}\}$$

$$\begin{aligned}&C[\Omega\times J\times J\times G_1\times\cdots\times G_n,G_i]\\&\quad=\{K_i:\Omega\times J\times J\times G_1\times\cdots\times G_n\to G_i\mid K_i(\omega,\cdot,\cdots,\cdot)\text{连续和}\end{aligned}$$

$K_i(\cdot,t,s,x_1,\cdots,x_n)$是$X_i$-值随机变量}

引理2.2[4] 设$z_i\in G[\Omega\times J,G_i]$，则存在实值随机变量$\eta_i:\Omega\to(0,\infty)$使得

$$\{x_i\in X_i:\|x_i-z_i(\omega,t_0)\|<\eta_i(\omega)\}\subset G_i$$

引理2.3[4] 设$z_i\in C[\Omega\times J,G_i]$和$\eta:\Omega\to(0,\infty)$ 是实值随机变量．则存在实值随机变量$\delta_i:\Omega\to(0,\infty)$使得

$$|t-t_0|<\delta_i(\omega)\Rightarrow\|z_i(\omega,t)-z_i(\omega,t_0)\|<\eta(\omega)/2$$

引理2.4[9] 如果视映射$\omega\mapsto x_i(\omega,\cdot)$为映$\Omega$入$C[J,X_i]$ 的映射时是 $C[J,X_i]$-值随机变量，则$x_i\in C[\Omega\times J,X_i]$．

引理2.5[4] $z_i\in C[\Omega\times J,G_i]$，$\eta:\Omega\mapsto(0,\infty)$和$\gamma:\Omega\to(0,a]$是实值随机变量．令$J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$，则由

$$E_i(\omega)=\{x_i\in C[\Omega\times J_0(\omega),G_i]:\|x_i(\omega,t)-z_i(\omega,t)\|_{J_0(\omega)}\leqslant\eta(\omega)/2\}$$

定义的映射$E_i:\Omega\to CL(C[\Omega\times J_0(\omega),G_i])$是可测的．

引理2.6[9] 设$\{x_i^m(\omega,t)\}_{m\geqslant1}\subset C[\Omega\times J,G_i]$ 使得对每一 $\omega\in\Omega$和对每一 $i\in\{1,\cdots,n\}$,序列$\{x_i^m(\omega,t)\}_{m\geqslant1}$是紧的．则存在函数$x_i^*(\omega,t)\in C[\Omega\times J,G_i]$使得对每一 $\omega\in\Omega$和$i\in\{1,\cdots,n\}$，$x_i^*(\omega,t)$是$\{x_i^m(\omega,t)\}_{m\geqslant1}$的一聚点。

三、存在性准则

定理3.1 令$z_i\in C[\Omega\times J,G_i]$，$K_i\in C[\Omega\times J\times J\times G_1\times\cdots\times G_n,G_i]$，$i=1,\cdots,n$．假设

(H_1) 存在实值随机变量$M:\Omega\to(0,\infty)$使得对每一$\omega\in\Omega$和对任意$(t,s,x)\in J\times J\times G$，其中$x=(x_1,\cdots,x_n)\in G=G_1\times\cdots\times G_n$，

$$\|K_i(\omega,t,s,x)\|\leqslant M(\omega)\qquad(i=1,\cdots,n)$$

(H_2) 对每一 $\omega\in\Omega$，$I\subset J$和对任何有界集$B_i\subset G_i$，$i=1,\cdots,n$，

$$\lim_{t\to\tau}\left(\sup\left\{\int_I\|K_i(\omega,t,s,\psi(\omega,s))-K_i(\omega,\tau,s,\psi(\omega,s))\|ds\,\middle|\,\psi\in C[\Omega\times I,B]\right\}\right)=0$$

其中，$\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_n)$和$C[\Omega\times I,B]=C[\Omega\times I,B_1]\times\cdots\times C[\Omega\times I,B_n]$．

(H_3) 存在非负实值随机变量 $\beta_{i,j}$，$i,j=1,\cdots,n$使得对每一$\omega\in\Omega$和对任何有界集 $B_i\subset G_i$，$i=1,\cdots,n$，

$$\alpha(K_i(\omega,J,J,B))\leqslant\sum_{j=1}^n\beta_{i,j}(\omega)\alpha(B_j)$$

其中，$B=B_1\times\cdots\times B_n$．

则存在实值随机变量$\gamma:\Omega\to(0,a]$使得非线性随机Volterra积分方程组

$$x_i(\omega,t)=z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^t K_i(\omega,t,s,x_1(\omega,s),\cdots,x_n(\omega,s))ds\qquad(i=1,\cdots,n)\tag{3.1}$$

在$J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$上有随机解$(x_1^*,\cdots,x_n^*)\in C[\Omega\times J_0(\omega),G]$，其中$C[\Omega\times J_0(\omega),G]=C[\Omega\times J_0(\omega),G_1]\times\cdots\times C[\Omega\times J_0(\omega),G_n]$

证明 设$\eta_i(\omega)$如在引理2.2内被定义，令$\eta(\omega)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\eta_i(\omega)\}$，则$\eta(\omega)$是正实值随机变量使得

$$\{x_i\in X_i:\|x_i-z_i(\omega,t_0)\|<\eta(\omega)\}\subset G_i\qquad(i=1,\cdots,n)$$

设$\delta_i(\omega)$如在引理2.3内被定义，令$\delta(\omega)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\delta_i(\omega)\}$，则$\delta(\omega)$也是正实值随机变量使得

$$|t-t_0|<\delta(\omega)\Rightarrow\|z_i(\omega,t)-z_i(\omega,t_0)\|<\eta(\omega)/2\qquad(i=1,\cdots,n)$$

令$\gamma(\omega)=\min\{a,\delta(\omega),\eta(\omega)/2M(\omega),\ b/\beta(\omega)\}$，其中$b\in(0,1)$和

$$\beta(\omega)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sum_{j=1}^n\beta_{i,j}(\omega)\right\}$$

则$\gamma(\omega):\Omega\to(0,a]$是实值随机变量。

令$E_i(\omega)$如在引理2.5内被定义，则对每一$\omega\in\Omega$，$E_i(\omega)$是$C[\Omega\times J_0(\omega),\ G_i]$的非空有界闭凸子集。令$E(\omega)=E_1(\omega)\times\cdots\times E_n(\omega)$。定义映射$T_i:\mathrm{Gr}(E)\to C[\Omega\times J_0(\omega),G_i],i=1,\cdots,n$如下：

$$T_i(\omega,x_1(\omega,t),\cdots,x_n(\omega,t))=z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^t K_i(\omega,t,s,x_1(\omega,s),\cdots,x_n(\omega,s))ds\qquad(3.2)$$

由假设和丁[10]的引理5.2，容易看出$T_i,i=1\cdots.n$是具有随机定义域E的连续随机算子组。由(H_1)和(3.2)式，我们有

$$\begin{aligned}&\|T_i(\omega,x_1(\omega,t),\cdots,x_n(\omega,t))-z_i(\omega,t)\|_{J_0(\omega)}\\&\leqslant\max_{t\in J_0(\omega)}\int_{t_0}^t\|K_i(\omega,t,s,x_1(\omega,s),\cdots,x_n(\omega,s))\|ds\\&\leqslant\gamma(\omega)M(\omega)\leqslant\eta(\omega)/2\qquad(i=1,\cdots,n)\end{aligned}$$

因此我们有$T_i(\omega,\cdot,\cdots,\cdot):E(\omega)\to E_i(\omega)$，$i=1,\cdots,n$。

对每一$\omega\in\Omega$和对$B_i\subset E_i(\omega)$，$i=1,\cdots,n$，令$B=B_1\times\cdots\times B_n$。由假设$(\mathrm{H}_2)$和$\alpha$的性质(见[6]的引理2.1)，我们有

$$\begin{aligned}\alpha(T_i(\omega,B))&=\sup_{t\in J_0(\omega)}\alpha\left(\left\{\int_{t_0}^t K_i(\omega,t,s,x(\omega,s))ds:x\in B\right\}\right)\\&\leqslant\sup_{t\in J_0(\omega)}\alpha((t-t_0)\overline{\mathrm{co}}(K_i(\omega,J,J,B)))\\&\leqslant\gamma(\omega)\alpha(K_i(\omega,J,J,B))\\&\leqslant\gamma(\omega)\sum_{j=1}^n\beta_{i,j}(\omega)\alpha(B_j)\\&=\sum_{j=1}^n\gamma(\omega)\beta_{i,j}(\omega)\alpha(B_j)\qquad(i=1,\cdots,n)\end{aligned}$$

令$a_{i,j}(\omega)=\gamma(\omega)\beta_{i,j}(\omega)$，则有

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}(\omega)=\sum_{j=1}^n\gamma(\omega)\beta_{i,j}(\omega)\leqslant\gamma(\omega)\beta(\omega)\leqslant b<1\qquad(i=1,\cdots,n)$$

且因此正实值随机变量$r_i(\omega)\equiv1$，$i=1,\cdots,n$是随机不等式组(2.1)的解。从定理2.1推得存在$x_i^*(\omega,t)\in E_i(\omega)$，$i=1,\cdots,n$使得

$$x_i^*(\omega,t)=T_i(\omega,x_1^*(\omega,t),\cdots,x_n^*(\omega,t)),\qquad\forall\omega\in\Omega,\ i=1,\cdots,n$$

即$(x_1^*(\omega,t),\cdots,x_n^*(\omega,t))$是非线性随机 Volterra 积分方程组(3.1)的一随机解且由引理2.4，$x_i^*(\omega,t)\in C[\Omega\times J_0(\omega),G_i]$，$i=1,\cdots,n$。

定理3.2 对每一$i=1,\cdots,n$，令$z_i\in\Omega\to G_i$是X_i-值随机变量和$f_i:\Omega\times J\times G_1\times\cdots\times G_n\to$

G_i使得对每一$\omega\in\Omega$，$f_i(\omega,\cdot,\cdots,\cdot)$连续和对每一$(t,x_1,\cdots,x_n)\in J\times G_1\times\cdots\times G_n$，$f_i(\cdot,t,x_1,\cdots,x_n)$是$X_i$-值随机变量．假设

(i) 存在实值随机变量$M:\Omega\to(0,\infty)$使得对每一$\omega\in\Omega$ 和对一切 $(t,x_1,\cdots,x_n)\in J\times G_1\times\cdots\times G_n$，

$$\|f_i(\omega,t,x_1,\cdots,x_n)\|\leqslant M(\omega)\qquad(i=1,\cdots,n)$$

(ii) 存在非负实值随机变量$\beta_{i,j}(\omega)$，$i,j=1,\cdots,n$使得对每一$\omega\in\Omega$和对任何有界集$B_i\subset G_i$，$i=1,\cdots,n$，$B=B_1\times\cdots\times B_n$，

$$\alpha(f_i(\omega,J,B))\leqslant\sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}(\omega)\alpha(B_j)\qquad(i=1,\cdots,n)$$

则存在正实值随机变量$\gamma:\Omega\to(0,a]$使得随机Cauchy问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_i(\omega,t)}{dt}=f_i(\omega,t,x_1(\omega,t),\cdots,x_n(\omega,t))\\&x_i(\omega,t_0)=z_i(\omega)\qquad(i=1,\cdots,n)\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

在$J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$上有一随机解$(x_1^*(\omega,t),\cdots,x_n^*(\omega,t))\in C[\Omega\times J_0(\omega),G]$．

证明　解随机Cauchy问题(3.3)等价于解下面非线性随机Volterra积分方程组：

$$x_i(\omega,t)=z_i(\omega)+\int_{t_0}^{t}f_i(\omega,s,x_1(\omega,s),\cdots,x_n(\omega,s))ds\qquad(i=1,\cdots,n)\tag{3.4}$$

对一切$t\in J$和$i=1,\cdots,n$，令$z_i(\omega,t)=z_i(\omega)$和 $K_i(\omega,t,s,x_1,\cdots,x_n)=f_i(\omega,s,x_1,\cdots,x_n)$，容易验证定理3.1的一切条件被满足．由定理3.1，非线性随机Volterra积分方程组(3.4)有一随机解$(x_1^*(\omega,t),\cdots,x_n^*(\omega,t))\in C[\Omega\times J_0(\omega),G]$且因此也是随机 Cauchy问题(3.3)的随机解．

注3.1　定理3.1推广了丁[4]的定理3.1，Vaughn[6]的定理3.1，Lakshmikantham[8]的定理2.1到随机积分方程组．定理3.2推广了丁[4]的定理3.3和De Blasi-Myjak[9]的定理4.2到随机微分方程组．

四、极值随机解的存在性

在本节中我们将对非线随机Volterra积分方程组(3.1)证明极值随机解的存在性．

令$H_i\subset X_i$，$i=1,\cdots,n$是真锥和H_i的内部H_i^0是非空的．对每一$u,v\in X_i$，我们说$u\leqslant v$，如果$v-u\in H_i$；说$u<v$如果$v-u\in H_i^0$．设H_i^*和$H_{0,i}^*$表下面集合：

$$H_i^*=\{f\in L(X_i,\boldsymbol{R}):x\in H_i\Rightarrow f(x)\geqslant0\}$$

$$H_{0,i}^*=\{f\in L(X_i,\boldsymbol{R}):x\in H_i^0\Rightarrow f(x)>0\}$$

其中$L(X_i,\boldsymbol{R})$是映X_i到$\boldsymbol{R}$的一切连续线性泛函的集．

我们首先证明下面随机积分不等式组．

定理4.1　对$i=1,\cdots,n$，令$K_i\in C[\Omega\times J\times J\times X_1\times\cdots\times X_n,X_i]$ 和 $z_i,u_i,v_i\in C[\Omega\times J,X_i]$．假设对每一$(\omega,t,s)\in\Omega\times J\times J$，$K_i(\omega,t,s,x_1,\cdots,x_n)$关于$(x_1,\cdots,x_n)$ 是单调非减的，即如果$x_j\leqslant y_j$，$j=1,\cdots,n$，则

$$K_i(\omega,t,s,x_1,\cdots,x_n)\leqslant K_i(\omega,t,s,y_1,\cdots,y_n)\qquad(i=1,\cdots,n)$$

假设对$t>t_0$和$\omega\in\Omega$，下面随机不等式组之一是严格的：

$$u_i(\omega,t)\leqslant z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,u_1(\omega,s),\cdots,u_n(\omega,s))ds\qquad(i=1,\cdots,n)\tag{4.1}$$

$$v_i(\omega,t)\geqslant z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t} K_i(\omega,t,s,v_1(\omega,s),\cdots,v_n(\omega,s))ds \qquad (i=1,\cdots,n) \qquad (4.2)$$

和 $\qquad u_i(\omega,t_0)<v_i(\omega,t_0), \qquad \forall\omega\in\Omega,\ i=1,\cdots,n$

则我们有

$$u_i(\omega,t)<v_i(\omega,t), \qquad \forall\omega\in\Omega, t>t_0,\ i=1,\cdots,n$$

证明 假设结论不真，则存在$\omega\in\Omega$和$i\in\{1,\cdots,n\}$使得

$$F(\omega)=\{t\geqslant t_0: u_i(\omega,t)\nless v_i(\omega,t)\}\neq\phi$$

令$t(\omega)=\inf F(\omega)$，则$t(\omega)>t_0$和对任何$t\in[t_0,t(\omega))$，有 $v_i(\omega,t)-u_i(\omega,t)\in H_i^0$ 和 $v_i(\omega, t(\omega))-u_i(\omega,t(\omega))\in\partial H_i$。因此存在$f\in H_i^*$使得 $f(v_i(\omega,t(\omega))-u_i(\omega,t(\omega)))=0$ 且对任何$u\in H_i^0$，$f(u)>0$。

如果随机不等式组(4.2)是严格的，则由$K_i(\omega,t,s,x_i,\cdots,x_n)$关于 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的单调性有

$$\begin{aligned}f(u_i(\omega,t(\omega)))&\leqslant f\left(z_i(\omega,t(\omega))+\int_{t_0}^{t(\omega)} K_i(\omega,t(\omega),s,u_1(\omega,s),\cdots,u_n(\omega,s))ds\right)\\&\leqslant f\left(z_i(\omega,t(\omega))+\int_{t_0}^{t(\omega)} K_i(\omega,t(\omega),s,v_1(\omega,s),\cdots,v_n(\omega,s))ds\right)\\&<f(v_i(\omega,t(\omega)))\end{aligned}$$

这与$f(v_i(\omega,t(\omega))-u_i(\omega,t(\omega)))=0$相矛盾。因此结论必成立。

如果随机不等式组(4.1)是严格的，则由相同的论证，我们也能证明结论成立。

定理4.2 对每一$i=1,\cdots,n$，令 $z_i\in C[\Omega\times J,G_i]$，$K_i\in C[\Omega\times J\times J\times G_1\times\cdots\times G_n,G_i]$使得对每一$(\omega,t,s)\in\Omega\times J\times J$，$K_i(\omega,t,s,x_1,\cdots,x_n)$关于$(x_1,\cdots,x_n)$是单调非减的。假设定理3.1的条件$(\mathrm{H}_1)$，$(\mathrm{H}_2)$和$(\mathrm{H}_3)$ 成立。则存在实值随机变量 $\gamma:\Omega\to(0,a]$ 使得非线性随机Volterra积分方程组(3.1)在$J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$上有极大和极小随机解，即存在$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$(\rho_1,\cdots,\rho_n)\in C[\Omega\times J_0(\omega),G]=C[\Omega\times J_0(\omega),G_1]\times\cdots\times C[\Omega\times J_0(\omega),G_n]$ 使得对方程组(3.1)的任意随解$(x_1,\cdots,x_n)\in C[\Omega\times J_0(\omega),G]$有

$$\rho_i(\omega,t)\leqslant x_i(\omega,t)\leqslant\lambda_i(\omega,t), \qquad \forall\omega\in\Omega, t\in J_0(\omega), i=1,\cdots,n$$

证明 假设$\eta(\omega)$，$\delta(\omega)$和$\beta(\omega)$如在定理3.1的证明中被定义。令$\gamma(\omega)=\min\{a,\delta(\omega),\eta(\omega)/4M(\omega),b/\beta(\omega)\}$，其中$b\in(0,1)$，则$\gamma:\Omega\to(0,a]$是实值随机变量。令$E_i(\omega)$如在引理2.5中被定义和令 $E(\omega)=E_1(\omega)\times\cdots\times E_n(\omega)$。定义$T_i:\mathrm{Gr}(E)\to C[\Omega\times J_0(\omega),G_i]$，$i=1,\cdots,n$如下：

$$T_i(\omega,x_1(\omega,t),\cdots,x_n(\omega,t))=z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t} K_i(\omega,t,s,x_1(\omega,s),\cdots,x_n(\omega,s))ds$$

对每一$i=1,\cdots,n$，选取一 X_i-值随机变量$y_i:\Omega\to H_i^0$ 使得 $\|y_i(\omega)\|\leqslant\eta(\omega)/4$，$\forall\omega\in\Omega$。令$y_i^m(\omega)=y_i(\omega)/m$。定义映射$T_i^m:\mathrm{Gr}(E)\to C[\Omega\times J_0(\omega),G_i]$，$i=1,\cdots,n$如下：

$$T_i^m(\omega,x_1(\omega,t),\cdots,x_n(\omega,t))=T_i(\omega,x_1(\omega,t),\cdots,x_n(\omega,t))+y_i^m(\omega) \qquad (m=1,2,\cdots)$$

则对每一$\omega\in\Omega$和对$i=1,\cdots,n$，有

$$\begin{aligned}&\|T_i^m(\omega,x_1(\omega,t),\cdots,x_n(\omega,t))-z_i(\omega,t)\|_{J_0(\omega)}\\&\leqslant\|y_i^m(\omega)+\int_{t_0}^{t} K_i(\omega,t,s,x_1(\omega,s),\cdots,x_n(\omega,s))ds\|_{J_0(\omega)}\\&\leqslant\|y_i^m(\omega)\|+M(\omega)(t-t_0)\end{aligned}$$

$$\leqslant\frac{\eta(\omega)}{4m}+M(\omega)\eta(\omega)\leqslant\frac{\eta(\omega)}{2}$$

因此对每一$\omega\in\Omega$和$m=1,2,\cdots$，$T_i^m:E(\omega)\to E_i(\omega)$. 使用定理3.1的证明中类似的论证，我们能证明对每一$m=1,2,\cdots$,算子组$T_i^m,i=1,\cdots,n$有随机不动点$(x_1^m,\cdots,x_n^m)\in C[\Omega\times J_0(\omega),G]$. 使用Vaughn[6]的定理4.2的证明中同样的论证，我们能证明对每一$\omega\in\Omega$，$\{x_i^m(\omega,\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$是一致有界和等度连续的.因此由$(H_3)$对每一$\omega\in\Omega$我们有

$$\alpha(\{x_i^m(\omega,t)\}_{m=1}^{\infty})=\alpha(\{T_i(\omega,x_1^m(\omega,t),\cdots,x_n^m(\omega,t))+y_i^m(\omega,t)\}_{m=1}^{\infty})$$

$$=\alpha\left(\left\{\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,x_1^m(\omega,s),\cdots,x_n^m(\omega,s))ds\right\}_{m=1}^{\infty}\right)$$

$$\leqslant\alpha\left(\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,\{x_1^m(\omega,s)\}_{m=1}^{\infty},\cdots,\{x_n^m(\omega,s)\}_{m=1}^{\infty})ds\right)$$

$$\leqslant\gamma(\omega)\sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}(\omega)\alpha(\{x_j^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^{\infty})\qquad(i=1,\cdots,n)$$

因此对每一$\omega\in\Omega$有

$$\alpha(\{x_i^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^{\infty})=\sup_{t\in J_0(\omega)}\alpha(\{x_i^m(\omega,t)\}_{m=1}^{\infty})$$

$$\leqslant\gamma(\omega)\sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}(\omega)\alpha(\{x_j^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^{\infty})\qquad(i=1,\cdots,n)$$

因为$\gamma(\omega)\sum_{j=1}^{n}\beta_{i,j}(\omega)\leqslant\gamma(\omega)\beta(\omega)\leqslant b<1$，$\forall\omega\in\Omega$，$i=1,\cdots,n$. 对每一$\omega\in\Omega$，如果对某$k\in\{1,\cdots,n\}$,

$$\alpha(\{x_k^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^{\infty})=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\alpha(\{x_i^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^{\infty})>0$$

则我们有

$$\alpha(\{x_k^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^{\infty})\leqslant\gamma(\omega)\sum_{j=1}^{n}\beta_{k,j}(\omega)\alpha(\{x_j^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^{\infty})$$

$$\leqslant\gamma(\omega)\sum_{j=1}^{n}\beta_{k,j}(\omega)\alpha(\{x_k^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^{\infty})$$

$$\leqslant b\alpha(\{x_k^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^{\infty})$$
$$<\alpha(\{x_k^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^{\infty})$$

这是一矛盾. 因此必有$\alpha(\{x_i^m(\omega,J_0(\omega))\}_{m=1}^{\infty})=0$，$\forall\omega\in\Omega$和$i=1,\cdots,n$. 因此推得对每一$\omega\in\Omega$，$\overline{\{x_i^m(\omega,\cdot)\}_{m=1}^{\infty}}$是紧集. 由引理2.6，对每一固定$i=1,\cdots,n$，存在$\{x_i^m(\omega,\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$的子序列$\{x_i^{m_k}(\omega,\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$和$\lambda_i\in C[\Omega\times J_0(\omega),G_i]$使得$\{x_i^{m_k}(\omega,\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$一致收敛于$\lambda_i(\omega,\cdot)$. 由有界收敛定理对每一$\omega\in\Omega$，当$k\to\infty$时

$$\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,x_1^{m_k}(\omega,s),\cdots,x_n^{m_k}(\omega,s))ds\to\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,\lambda_1(\omega,s),$$
$$\cdots,\lambda_n(\omega,s))ds\qquad(i=1,\cdots,n)$$

因此$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in C[\Omega\times J_0(\omega),G]$是随机Volterra积分方程组(3.1)的一随机解.

现在令$(x_1,\cdots,x_n)\in C[\Omega\times J_0(\omega),G]$是方程组(3.1)的任一随机解，即对$\omega\in\Omega,i=1,\cdots n$，$t\in J_0(\omega)$，

$$x_i(\omega,t)=z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t} K_i(\omega,t,s,x_1(\omega,s),\cdots,x_n(\omega,s))ds$$

因为对每一$\omega\in\Omega$，$i=1,\cdots,n$，

$$x_i^{m_k}(\omega,t)=z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t} K_i(\omega,t,s,x_1^{m_k}(\omega,s),\cdots,x_n^{m_k}(\omega,s))ds+y_i^{m_k}(\omega)$$

$$>z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t} K_i(\omega,t,s,x_1^{m_k}(\omega,s),\cdots,x_n^{m_k}(\omega,s))ds$$

和 $$x_i(\omega,t_0)=z_i(\omega,t_0)<z_i(\omega,t_0)+y_i^{m_k}(\omega)=x_i^{m_k}(\omega,t_0)$$

从定理4.1推得

$$x_i(\omega,t)<x_i^{m_k}(\omega,t)$$

且因此有

$$x_i(\omega,t)\leqslant\lim_{k\to\infty}x_i^{m_k}(\omega,t)=\lambda_i(\omega,t)$$

这就证明了$(\lambda_1(\omega,t),\cdots,\lambda_n(\omega,t))$是随机Volterra 积分方程组(3.1)在$J_0(\omega)$上的极大随机解.

如果我们定义

$$\hat{T}_i^m:\mathrm{Gr}(E)\to C[\Omega\times J_0(\omega),G_i]\qquad(i=1,\cdots,n)$$

如下：

$$\hat{T}_i^m(\omega,x_1(\omega,t),\cdots,x_n(\omega,t))=T_i(\omega,x_1(\omega,t),\cdots,x_n(\omega,t))-y_i^m(\omega)$$
$$(m=1,2,\cdots)$$

由使用上面类似的论证我们能证明随机Volterra 积分方程组(3.1)的极小随机解的存在性.

注4.1 定理4.2推广了丁[5]的定理5，Vaughn[6] 的定理 4.2，Lakshmikantham-Leela[2] 的定理5.5.3到随机Volterra积分方程组.

注4.2 由使用定理3.2和定理4.2中类似的论证，我们容易获得随机Cauchy问题(3.3)的极大和极小随机解的存在性结果，它是[2]中相应结果的推广.

五、比 较 定 理

在本节中我们将对随机积分不等式组证明一比较结果.

定理5.1 设定理4.2的一切假设成立，$(\lambda_1(\omega,t),\cdots,\lambda_n(\omega,t))$和$(\rho_1(\omega,t),\cdots,\rho_n(\omega,t))$是随机Volterra 积分方程组(3.1)的积大和极小随机解. 令$(v_1(\omega,t),\cdots,v_n(\omega,t))\in C[\Omega\times J_0(\omega),G]$. 则

(i) 如果对每一$\omega\in\Omega,t\in J_0(\omega),i=1,\cdots,n$

$$v_i(\omega,t)\leqslant z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t} K_i(\omega,t,s,v_1(\omega,s),\cdots,v_n(\omega,s))ds$$

则对每一$\omega\in\Omega$，$t\in J_0(\omega)$，$i=1,\cdots,n$，

$$v_i(\omega,t)\leqslant\lambda_i(\omega,t)$$

(ii) 如果对每一$\omega\in\Omega,t\in J_0(\omega),i=1,\cdots,n$

$$v_i(\omega,t)\geqslant z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t} K_i(\omega,t,s,v_1(\omega,s),\cdots,v_n(\omega,s))ds$$

则对每一$\omega\in\Omega$，$t\in J_0(\omega)$，$i=1,\cdots,n$，

$$v_i(\omega,t)\geqslant\rho_i(\omega,t)$$

证明 我们仅需证明结论(i)，因为结论(ii)的证明是类似的。由使用定理4.2证明中相同的记号和论证，我们有对每一$\omega\in\Omega$，$i=1,\cdots,n$，

$$x_i^{m_k}(\omega,t)>z_i(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K_i(\omega,t,s,x_1^{m_k}(\omega,s),\cdots,x_n^{m_k}(\omega,s))ds$$

和

$$v_i(\omega,t_0)\leqslant z_i(\omega,t_0)<x_i^{m_k}(\omega,t_0)$$

从定理4.1推得对每一$\omega\in\Omega$，$t\in J_0(\omega)$，$i=1,\cdots,n$

$$v_i(\omega,t)<x_i^{m_k}(\omega,t)$$

在上面不等式中令$k\to\infty$取极限得结论(i)成立。

注5.1 定理5.1推广了丁[5]的定理7，Vaughn[6]的定理4.3，Lakshmikantham[8]的定理4.1和Lakshmikantham-Leela[2]的定理5.5.4。

参 考 文 献

[1] A. T. Bharucha-Reid, *Random Integral Equations*, Acad Press, New York (1972).

[2] V. Lakshmikantham and S. Leela, *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergamon Press, New York (1981).

[3] C. T. Tsokos and W. J. Padgett, *Random Integral Equations with Applications to Life Science and Engineering*, Acad. Press, New York (1974).

[4] 丁协平，随机积分和微分方程解的存在性准则，应用数学和力学，6(3) (1985), 265—270.

[5] 丁协平，随机积分方程和微分方程解的存在性和比较结果，应用数学和力学，7(7) (1986), 597—604.

[6] R. L. Vaughn, Existence and comparison results for nonlinear Volterra integral equations in Banach spaces, *Appl. Anal.*, 7 (1978), 337—348.

[7] R. L. Vaughn, Criteria for the existence and comparison of solutions to nonlinear Volterra integral equations in Banach spaces, *Nonlinear Equations in Abstract Spaces*, Acad. Press, New York (1978), 463—468.

[8] V. Lakshmikantham, Existence and comparison results for Volterra integral equations, *Volterra Integral Equations*, Springer-Verlag, (737) (1979), 120—126.

[9] F. S. De Blasi and J. Myjak, Random differential equations on closed subsets of Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 90 (1982), 273—285.

[10] 丁协平，随机集值映射的不动点定理及其应用，应用数学和力学，5(4) (1984), 561—575.

Solutions for a System of Nonlinear Random Integral and Differential Equations

Ding Xieping

(*Departmen of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu, Sichuan* 610066, *P. R. China*)

Wang Fan

(*Department of Mathematics, Nantong Teacher's College, Nantong, Jiangsu*·226007, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, we first prove a Darbao type fixed point theorem for a system of continuous random operators with random domains. Then, by using the theorem, we give the existence criteria of solutions for a systems of nonlinear random Volterra integral equations and for the Cauchy problem of a system of nonlinear random differential equations. The existence of extremal random solutions and random comparison results for these systems of random equations are also obtained. Our theorems improve and generalize the correponding results of Vaughn, Lakshmikantham, Lakshmikantham-Leela, De Blasi-Myjak and Ding.

Key words nonlinear integral equations, random Volterra integral equations, random Cauchy problem, extremal random solution, comparison result