应用数学和力学，第17卷 第7期（1996年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

用积分方程法解板的振动问题*

许明田[1]　　程德林[1]

（杨桂通推荐，1994年11月15日收到，1996年3月25日收到修改稿）

摘　　要

本文把带有集中质量、弹性支承和弹簧支撑着的质量块（振子）的薄板的振动微分方程化成为积分方程的特征值问题。然后利用广义函数理论和积分方程理论，得到了用一无穷阶矩阵的标准特征值形式给出的频率方程，从而方便地得到了固有频率和振型。并讨论了这种方法的收敛性。

关键词　积分方程　薄板　振动

一、引　　言

在机械结构中，经常遇到梁和薄板带有一附加子系统的复杂结构，通常子系统可简化为由质量和弹簧组成的有限自由度系统。有时这类子系统专门用作动力吸振器。因此研究这类子系统对整个振动系统的固有频率和振型的影响，很有实际意义。对于此类问题，许多研究人员已做了一些研究。例如，Dowell(1979)；Nicholson和Bergman(1986)；Ozguven和Candir(1986)；Manikanahally 和 Crocker(1991)。但这些工作，所得到的频率方程大多是含有级数的超越方程，不便求解。其他研究人员还利用 Rayleigh/Ritz/Galerkin法求解这类问题(Laura等，(19977)；Ercoli和 Laura(1987)；Kim和Dickinson(1988)；Verniere de Irassar等(1984))。但为了应用这些方法，需构造试函数，而选择一恰当的试函数并非易事。最近Ming Une Jen(1993)等用 Laplace 变换求解了带有两自由度弹簧质量系统的梁的固有频率和振型，这一方法推导复杂，且频率方程也是用一复杂的超越方程表示的。在文[1]中，我们提出了一种新的积分方程法，并求解了带有振子的梁的振动问题。本文改进了文[1]中的方法，求解了带有集中质量、弹性支承和振子的板的振动问题。得到了用一无穷阶矩阵的特征值形式表示的频率方程。在实际计算中，可把无穷阶矩阵截断为有限阶方阵，便可得到固有频率的近似值。

二、积分方程的形成

设梁和薄板带有R个弹性支承、q个振子和s个集中质量。当此类结构以频率ω自由振动时，根据受力分析和振动理论知其满足如下微分方程

* 山东省自然科学基金资助项目。
1 山东工业大学数理系，济南　250014.

$$K_p(u_p-w(z_p))=m_p\omega^2u_p \qquad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ q) \tag{2.1a}$$

$$Aw(z)+\sum_{i=1}^{R}\bar{K}_iw(\bar{z}_i)-\sum_{j=1}^{s}\bar{m}_j\omega^2w(\bar{\bar{z}}_j)-C\omega^2w(z)=0 \tag{2.1b}$$

其中　K_p, m_p, u_p表示第p个振子的弹性常数、质量和振幅．A是微分算子．若主结构为梁，则A为$EI\dfrac{d^4}{dx^4}$，若主结构为薄板，则A表示$D\nabla^2\nabla^2$．$\bar{K}_i$、$\bar{z}_i$表示第i个弹性支承的弹性常数和位置坐标．$\bar{m}_i$、$\bar{\bar{z}}_j$表示第j个集中质量块的质量和位置坐标．C表示单位长度或单位面积的质量．当然$w(z)$还满足一定的边界条件．

设一不带任何子结构的梁和薄板在y处作用一单位集中力，则挠度$w(z)$满足如下方程

$$Aw(z)=\delta(z-y) \tag{2.2}$$

其中　$\delta(z)$是Delta函数．另外，$w(z)$还满足一定的边界条件．并且在此假设整个结构没有刚体位移．用[11]中的方法求解方程(2.2)，可把$w(z)$表示成如下形式

$$w(z)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(z)b_i(y) \tag{2.3}$$

以后均用$G(z,\ y)$代替(2.3)式的右端．若梁和薄板在$\bar{z}_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ R)$处还带有弹性支承，则可把支承的作用，用力$p_i$代替．利用$G(z,\ y)$的力学意义得此结构的挠度$w(z)$为

$$w(z)=G(z,\ y)+\sum_{j=1}^{R}P_jG(z,\ \bar{z}_j) \tag{2.4}$$

在(2.4)中分别令$z=\bar{z}_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ R)$，可得一线性方程组．若在$\bar{z}_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ R)$处是一刚性支撑，则$w(\bar{z}_i)=0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ R)$，方程组中的未知数便是$P_i(i=1,\ 2,\cdots,R)$．若在$\bar{z}_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ R)$处是一弹性支承，则此时$P_i=\bar{K}_iw(\bar{z}_i)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ R)$方程组的未知数便是$w(\bar{z}_i)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ R)$．求解这类方程组可得

$$\mathbf{Z}=\boldsymbol{G}^{-1}[G(\bar{z}_1,\ y),\ G(\bar{z}_2,\ y),\ \cdots,\ G(\bar{z}_R,\ y)]^T \tag{2.5}$$

其中，$\mathbf{Z}$是一向量，$\boldsymbol{G}^{-1}$是$\boldsymbol{G}$的逆阵．当支承全是刚性时

$$\mathbf{Z}=[P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_R]^T$$

$\boldsymbol{G}$的元素$G_{ij}=-G(\bar{z}_i,\ \bar{z}_j)\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ R)$

当支承全是弹性时

$$\mathbf{Z}=[w(\bar{z}_1),\ \cdots,\ w(\bar{z}_R)]^T$$

而$\boldsymbol{G}$的元素是$G_{ij}=\begin{cases}-\bar{K}_jG(\bar{z}_i,\ \bar{z}_j) & (i\neq j)\\ 1-\bar{K}_iG(\bar{z}_i,\ \bar{z}_i) & (i=j)\end{cases}$

把(2.5)式代入(2.4)式，可得挠度$w(z)$，以后记其为$K(z,\ y)$，并可整理成如下形式

$$K(z,\ y)=\sum_{i=1}^{\infty}\bar{a}_i(z)\bar{b}_i(y) \tag{2.6}$$

由叠加原理和广义函数理论以及$K(z,\ y)$的力学意义，可把(2.1a、b)化成如下积分方程

$$K_p\Big[u_p-C\omega^2\int_{\Omega}K(z_p,\ y)w(y)dy$$

$$-\sum_{j=1}^{s}\bar{m}_j\omega^2\int_{\Omega}K(z_p,\ y)w(y)\delta(y-\bar{\bar{z}}_j)dy\Big]$$

$$=m_p\omega^2u_p \qquad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ q) \tag{2.7a}$$

$$w(z)=C\omega^2\int_\Omega K(z,y)w(y)dy$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\bar{m}_j\omega^2\int_\Omega K(z,\ y)w(y)\delta(y-\bar{z}_j)dy \tag{2.7b}$$

其中，$\int_\Omega$对于梁表示一重积分，对薄板表示二重积分，$\delta(y)$是Delta函数。

三、固有频率和振型的求解

把(2.6)式分别代入(2.7a)和(2.7b)中，并令

$$w_i=\int_\Omega\left[C+\sum_{j=1}^{s}\bar{m}_j\delta(y-\bar{z}_j)\right]\bar{b}_i(y)w(y)dy \text{ 得}$$

$$\begin{cases} K_p\left(u_p-\omega^2\sum_{i=1}^{\infty}\bar{a}_i(z_p)w_i\right)=m_p\omega^2u_p & (3.1a)\\ \qquad\qquad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ q) & \\ w(z)=\omega^2\sum_{i=1}^{\infty}\bar{a}_i(z)w_i & (3.1b)\end{cases}$$

在(3.1b)中，两边同乘$\left[C+\sum_{j=1}^{s}\bar{m}_j\delta(z-\bar{z}_j)\right]\bar{b}_{i_0}(z)$，并关于$z$在$\Omega$上积分得

$$\begin{cases} K_p\left(u_p-\omega^2\sum_{i=1}^{\infty}\bar{a}_i(z_p)w_i\right)=m_p\omega^2u_p & (3.2a)\\ \qquad\qquad (P=1,\ 2,\ \cdots,\ q) & \\ w_{i_0}=\omega^2\sum_{i=1}^{\infty}\int_\Omega\bar{a}_i(z)\left[C+\sum_{j=1}^{s}\bar{m}_j\delta(z-\bar{z}_j)\right]\bar{b}_{i_0}(z)dzw_i & (3.2b)\end{cases}$$

(3.2a)、(3.2b)可写成如下矩阵形式

$$\mathbf{F}\mathbf{w}=\frac{1}{\omega^2}\mathbf{w} \tag{3.3}$$

其中 $\mathbf{F}$是一矩阵，$\mathbf{w}=[u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_q,\ w_1,\ w_2,\ \cdots]^T$。

欲使(3.3)式中的$\mathbf{w}$有非零解，应有

$$\left|\frac{1}{\omega^2}\mathbf{I}-\mathbf{F}\right|=0 \tag{3.4}$$

其中 $\mathbf{I}$是单位矩阵。(3.4)式便是频率方程。把(3.4)式中的无穷阶矩阵$\mathbf{I}$和$\mathbf{F}$截断成有限阶方阵，即可求得ω_i的近似值，代入(3.3)式中，可求得ω_i对应的特征向量$\mathbf{w}_i$，再把ω_i和$\mathbf{w}_i$代入(3.1a)、(3.1b)中，可得ω_i对应的振型$w_i(z)$和$[u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_q]^T$。

四、收 敛 性

对于如下积分方程

$$\int_{\Omega} K(x, y) f(y) d\Omega = \lambda f(x)$$

[3]中有如下定理

设$K(x, y)$，$K_m(x, y)$均为平方可积函数。且$\lim\limits_{m\to 0}\|K-K_m\|_2=0$，那么

(a) $K_m(x, y)(m=1, 2, \cdots)$的特征值的非零聚点是$K(x, y)$的特征值。

(b) $K(x, y)$的每一非零特征值都是$K_m(x, y)$当$m\to\infty$时的特征值的极限点。事实上，给定$K(x, y)$的特征值λ'和$\varepsilon>0$，总存在$M_0>0$，只要$M>M_0$，那么$K_m(x, y)$便有特征值$\tilde{\lambda}$满足

$$|\tilde{\lambda}-\lambda'|<\varepsilon$$

本文提出的方法，把无穷阶矩阵截断为有限阶矩阵得到的频率方程，和把积分方程中级数形式的核函数截断为有限和形式的核函数所形成的频率方程是一样的。而有限和形式的核函数平方收敛于级数形式的核函数，所以本文提出的方法是收敛的。

五、 数 值 例 子

如图 1 所示，设一四边固定薄板在$(\bar{x}, \bar{y})$处带有一弹簧支承着的质量块。弹簧的弹性常数为$\bar{K}$，质量块的质量为$\bar{m}$。此薄板是一长为a、宽为b的矩形薄板。利用本文的方法计算的结果列于表 1 中.

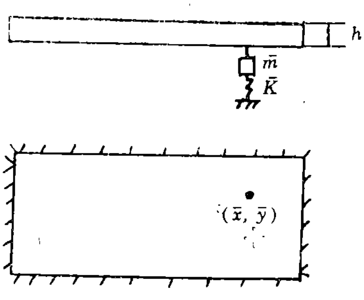

图 1

表 1 固 有 频 率 $\omega(Hz)$

$\bar{x}/a=0.5$, $\bar{y}/b=0.208$			$\bar{x}/a=0.708$, $\bar{y}/b=0.292$		
[5]中的结果		本文的结果	[5]中的结果		本文的结果
试验	数值计算		试验	数值计算	
110	111	105.621	106	101	102.891
164	168	164.764	180	178	179.636
232	238	229.265	222	220	220.355
269	281	276.854	279	282	285.242

六、结　论

本文改进了[1]中的方法，用于求解带有集中质量、弹性支承和振子的薄板的振动问题用这一方法求解时，由于不需要划分网格，且最后只需求一矩阵的标准特征值问题，所以计算简便。

参 考 文 献

[1] Xu Mingtian and Chen Delin, A new approach to solve a type of vibration problems, *Journal of Sound and Vibration*, 177(4)(1994), 565—571.

[2] Ming Vnejen and E. B. Magrab, Natural frequencies and mode shapes of beams carying a two degree-of-freedom spring-mass system, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 115(1993), 202—209.

[3] T. H. Christopher and M. A. Baker, *The Numerical Treatment Integtal Equations*, Clarendon Press, Oxford(1977).

[4] L. Ercoli and P. A. A. Laura, Analitical and experiment investigation on continuous beams carrying elastically mounted masses, *Journal of Sound and Viration*, 114(1987), 519—533.

[5] M. S. Ingber, A. L. Pate and J. M. Salazar, Vibration of a clamped plate with concentrated mass and spring attachments, *Journal of Sound and Vibration*, 153(1992), 142—166.

[6] E. H. Dowell, On some general properties of combined dynamical systems, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 46(1979), 206—209.

[7] J. W. Nicholson and L. A. Bergman, Free vibration of combined dynamical systems, *Journal of Engineering Mechanics*, 112(1986), 1—13.

[8] D. N. Manikanahally and M. J. Crocker, Vibration absorbers for hysteretically damped mass-loaded beams, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 113(1991), 116—122.

[9] C. S. Kim and S. M. Dickinson, On the analysis of laterally vibrating slender beams subject to various complicating effects, *Journal of Sound and Vibration*, 122(3)(1988), 441—455.

[10] P. L. Vemlere de Irassar, G. M. Ficcadenti and P. A. A. Laura, Dynamic analysis of a beam with an intermediate elastic support, *Journal of Sound and Vibration*, 96(3)(1984), 381—389.

[11] 严宗达, 《结构力学中的富里叶级数解法》, 天津大学出版社(1989).

Solving Vibration Problem of Thin Plates Using Integral Equation Method

Xu Mingtian Cheng Delin

(Department of Mathematics and Physics, Shandong University of Technology, Jinan 250014, *P. R. China)*

Abstract

This paper deals with reducing differential equations of vibration problem of plates with concentrated masses, elastic supports and elastically mounted masses into eigenvalue problem of integral equations. By applying the general function theory and the integral equation theory, the frequency equation is derived in terms of standard eigenvalue problems of a matrix with infinite order. So that, the natural frequencies and mode shapes can be determined. Convergence of this method has also been discussed at the end of this paper.

Keywords integral equation, thin plate, vibration