应用数学和力学，第17卷 第7期（1996年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

求解动力学问题的普遍方法

孙 右 烈[1]

（何福保推荐，1995年5月3日收到）

摘 要

本文阐明了标准化的 Routh 方程[1]的应用，给出了求解系统动力学问题的约束反力及运动状态变化的普遍方法，并给出了相应的矩阵方程。

关键词 复杂系统 动力学问题 约束力

一、引 言

在现代工程技术问题中，求解约束反力是一个重要问题，而拉格朗日第二类方程只能用于求解复杂系统的运动，于是，系统中的约束反力必须用拉格朗日第一类方程来求解，但在其运算过程中，又涉及到极其繁复的消去法。

在文献[1]中，已给出了系统动力学的标准化的Routh方程。本文将以具体问题为例子，从而阐明该方程的应用，并给出求解复杂系统动力学问题的普遍方法，使计算过程大大简化。由于所给出的方程组是用矩阵形式表述的，因此，对今后引入计算机进行复杂系统动力学问题的求解是很有值价的。

二、求解复杂系统动力学问题的普遍方法

由文献[1]知，系统动力学的标准化的Routh方程为：

$$\frac{d}{dt}\{P\}^T[B]=\{Q\}^T[B]+[\{\sigma\}^T \quad \{0\}^T] \tag{2.1}$$

本节将用这组方程给出求解动力学问题的普遍方法，并通过例子加以具体说明。

对于具有 l 个约束的力学系统，可按下述的普遍方法求解该系统的运动及其中$s(s\leqslant l)$个约束的约束反力。

1．先解除这 s 个约束，再对已解除 s 个约束的系统选取广义坐标$q_i(i=1,2,\cdots,n)$，其中n-s为系统未解除约束时的自由度。

2．以所取的广义坐标 $q_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为自变量，写出上述 s 个约束所应满足的约束方程

$$F_\beta(q_i,\dot{q}_i,t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,s)$$

算出标准化因子[1][2][3] $[B]=[[D] \quad [C]]$，其中

---

1 上海大学力学教研室，上海 200072

$$[D]=\begin{bmatrix}[0]\\ [A_2]^{-1}\end{bmatrix},\qquad [C]=\begin{bmatrix}[I]\\ -[A_2]^{-1}[A_1]\end{bmatrix}$$

$$[A_1]=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_1}\cdots\frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_{n-s}}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_1}\cdots\frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_{n-s}}\end{bmatrix},\qquad [A_2]=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_{n-s+1}}\cdots\frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_{n-s+1}}\cdots\frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_n}\end{bmatrix}$$

式中$[0]$为$(n-s)\times s$零矩阵，$[I]$为$(n-s)\times(n-s)$单位矩阵。所取广义坐标及约束方程要满足$|A_2|\neq 0$[1][3]。

3． 以所取的广义坐标为自变量，写出系统的动能T，算出广义动量$\{P\}=[p_1,\cdots,p_n]^T$及广义力$\{Q\}=[Q_1,\cdots,Q_n]^T$。

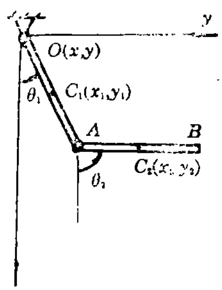
4． 以$[B]$，$\{P\}$和$\{Q\}$代入标准化的 Routh 方程(2.1)，由此可得系统动力学的全部方程组，它是由Ⅰ、Ⅱ两组方程构成的，其中方程组Ⅰ为s个关于待定乘子已解耦的方程，方程组Ⅱ为$n-s$个消去待定乘子的方程。

5． 方程组Ⅱ与约束方程联立，可求解系统的运动；方程组Ⅰ与约束方程联立，可以求解与待定乘子有关的约束反力。

下面将以标准化的Routh方程(2.1)为基础，通过具体例子，说明如何运用上述普遍方法来求解问题。现分三个问题来讲述。

1． **问题1**

已知质量为m，长为l的两根相同的均质杆OA，AB，以铰链铰接于A点，并悬挂于水平轴O上，如图1所示。开始时系统处于静止状态，其位置为$\theta_1=30°$，$\theta_2=90°$，求开始释放时两杆的角加速度，以及OA杆与AB杆分别在O与A点所受到的约束反力X_0, Y_0, X_A, Y_A。



图

现在用方程(2.1)来求解这一问题，由上述普遍方法知道，对所给问题，需先考虑解除O与A点的约束，再取广义坐标依次为OA，AB杆相对铅垂线的偏角$\theta_1=q_1$，$\theta_2=q_2$，杆OA质心C_1的坐标$x_1=q_3$，$y_1=q_4$，以及杆AB质心C_2的坐标$x_2=q_5$，$y_2=q_6$。

加在系统上的约束为O点固定、A点铰接，其约束方程为：

$$\left.\begin{aligned}&x_1-\frac{l}{2}\cos\theta_1=0\\ &y_1-\frac{l}{2}\sin\theta_1=0\\ &x_2-\frac{l}{2}\cos\theta_2=x_1+\frac{l}{2}\cos\theta_1\\ &y_2-\frac{l}{2}\sin\theta_2=y_1+\frac{l}{2}\sin\theta_1\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

或者

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{x}_1+\frac{l}{2}\sin\theta_1\dot{\theta}_1=0\\
&\dot{y}_1-\frac{l}{2}\cos\theta_1\dot{\theta}_1=0\\
&\dot{x}_2+\frac{l}{2}\sin\theta_2\dot{\theta}_2-\dot{x}_1+\frac{l}{2}\sin\theta_1\dot{\theta}_1=0\\
&\dot{y}_2-\frac{l}{2}\cos\theta_2\dot{\theta}_2-\dot{y}_1-\frac{l}{2}\cos\theta_1\dot{\theta}_1=0
\end{aligned}\right\} \qquad (2.2)'$$

所取广义坐标以及约束(2.2)′，给出矩阵$[A_2]$，如下式所示，满足$|A_2|\neq 0$，于是 系统的标准化因子$[B]$可求得[1][3]如下：

$$[A_1]=\begin{bmatrix}\frac{l}{2}\sin\theta_1 & 0\\ -\frac{l}{2}\cos\theta_1 & 0\\ \frac{l}{2}\sin\theta_1 & \frac{l}{2}\sin\theta_2\\ -\frac{l}{2}\cos\theta_1 & -\frac{l}{2}\cos\theta_2\end{bmatrix},\qquad [A_2]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix},$$

$$[A_2]^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},\qquad -[A_2]^{-1}[A_1]=\begin{bmatrix}-\frac{l}{2}\sin\theta_1 & 0\\ \frac{l}{2}\cos\theta_1 & 0\\ -l\sin\theta_1 & -\frac{l}{2}\sin\theta_2\\ l\cos\theta_1 & \frac{l}{2}\cos\theta_2\end{bmatrix}$$

$$[D]=\begin{bmatrix}[0]\\ [A_2]^{-1}\end{bmatrix},\qquad [C]=\begin{bmatrix}[0]\\ -[A_2]^{-1}[A_1]\end{bmatrix}$$

$$[B]=[[D]\quad[C]]=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&-\frac{l}{2}\sin\theta_1&0\\0&1&0&0&\frac{l}{2}\cos\theta_1&0\\1&0&1&0&-l\sin\theta_1&-\frac{l}{2}\sin\theta_2\\0&1&0&1&l\cos\theta_1&\frac{l}{2}\cos\theta_2\end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

系统中主动力所作的功效率为：

$$\delta N = mg\delta x_1 + mg\delta x_2$$

于是广义力为

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \\ 0 \\ mg \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

系统动能为

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

于是广义动量为

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_1 \\ \frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_2 \\ m\dot{x}_1 \\ m\dot{y}_1 \\ m\dot{x}_2 \\ m\dot{y}_2 \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

将(2.3)、(2.4)及(2.5)式代入方程(2.1)，得到

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_1 \\ \frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_2 \\ m\dot{x}_1 \\ m\dot{y}_1 \\ m\dot{x}_2 \\ m\dot{y}_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{2}\sin\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{l}{2}\cos\theta_1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -l\sin\theta_1 & -\frac{l}{2}\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & l\cos\theta_1 & \frac{l}{2}\cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \\ 0 \\ mg \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{2}\sin\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{l}{2}\cos\theta_1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -l\sin\theta_1 & -\frac{l}{2}\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & l\cos\theta_1 & \frac{l}{2}\cos\theta_2 \end{bmatrix} + \left[\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^T \right] \tag{2.6}$$

(2.6)式为一矩阵方程，它包含以下 6 个微分方程：

$$\left.\begin{aligned}
&m\ddot{x}_1+m\ddot{x}_2=2mg+\sigma_1\\
&m\ddot{y}_1+m\ddot{y}_2=\sigma_2\\
&m\ddot{x}_2=mg+\sigma_3\\
&m\ddot{y}_2=\sigma_4\\
&\frac{1}{12}ml^2\ddot{\theta}_1-m\ddot{x}_1\frac{l}{2}\sin\theta_1+m\ddot{y}_1\frac{l}{2}\cos\theta_1-m\ddot{x}_2l\sin\theta_1+m\ddot{y}_2l\cos\theta_1=-\frac{3}{2}mgl\sin\theta_1\\
&\frac{1}{12}ml^2\ddot{\theta}_2-m\ddot{x}_2\frac{l}{2}\sin\theta_2+m\ddot{y}_2\frac{l}{2}\cos\theta_2=-\frac{1}{2}mgl\sin\theta_2
\end{aligned}\right\}\qquad(2.6)'$$

由(2.2)或(2.2)′可知，加在$\ddot{\theta}_1$，$\ddot{\theta}_2$，$\ddot{x}_1$，$\ddot{y}_1$，$\ddot{x}_2$，$\ddot{y}_2$的约束条件为：

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}_1+\frac{l}{2}\sin\theta_1\ddot{\theta}_1+\frac{l}{2}\cos\theta_1(\dot{\theta}_1)^2=0\\
&\ddot{y}_1-\frac{l}{2}\cos\theta_1\ddot{\theta}_1+\frac{l}{2}\sin\theta_1(\dot{\theta}_1)^2=0\\
&\ddot{x}_2+\frac{l}{2}\sin\theta_2\ddot{\theta}_2+l\sin\theta_1\ddot{\theta}_1+\frac{l}{2}\cos\theta_2(\dot{\theta}_2)^2+l\cos\theta_1(\dot{\theta}_1)^2=0\\
&\ddot{y}_2-\frac{l}{2}\cos\theta_2\ddot{\theta}_2-l\cos\theta_1\ddot{\theta}_1+\frac{l}{2}\sin\theta_2(\dot{\theta}_2)^2+l\sin\theta_1(\dot{\theta}_1)^2=0
\end{aligned}\right\}\qquad(2.2)''$$

动力学方程组(2.6)′的最后两个方程与约束条件(2.2)″联立，就可求出系统的运动，考虑到初条件：$\theta_1=30°$，$\theta_2=90°$，及$\dot{\theta}_1=0$，$\dot{\theta}_2=0$，其解为，

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{\theta}_1=-\frac{18}{55}\frac{g}{l}\\
&\ddot{\theta}_2=-\frac{69}{55}\frac{g}{l}\\
&\ddot{x}_1=\frac{9}{110}g\\
&\ddot{y}_1=-\frac{9\sqrt{3}}{119}g\\
&\ddot{x}_2=\frac{87}{110}g\\
&\ddot{y}_2=-\frac{9\sqrt{3}}{55}g
\end{aligned}\right\}\qquad(2.7)$$

再由动力学方程组(2.6)′的前四个方程，就能求出待定乘子 σ_1，$\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$，它们分别为$OA$杆在$O$点及$AB$杆在$A$点承受到的约束反力：$X_0,Y_0,X_A,Y_A$,以(2.7)式代入(2.6)′,解为：

$$\left.\begin{aligned}
&X_0=\sigma_1=-2mg+m\ddot{x}_1+m\ddot{x}_2=-\frac{62}{55}mg\\
&Y_0=\sigma_2=m\ddot{y}_1+m\ddot{y}_2=-\frac{27\sqrt{3}}{110}mg\\
&X_A=\sigma_3=-mg+m\ddot{x}_2=-\frac{23}{110}mg\\
&Y_A=\sigma_4=m\ddot{y}_2=-\frac{9\sqrt{3}}{55}mg
\end{aligned}\right\}\qquad(2.8)$$

2. 问题2

在上述问题中，已知条件保持不变，求AB杆上A点所承受到的约束反力X_A,Y_A。

为了求解这一问题，先解除A点的约束，再取广义坐标依次为OA，AB杆相对铅垂线的偏角$\theta_1=q_1$，$\theta_2=q_2$，以及杆AB质心C_2的坐标$x_2=q_3$，$y_2=q_4$。

加在系统上的约束为OA与AB杆在A点铰接，约束方程为：

$$\left.\begin{aligned} x_2-\frac{l}{2}\cos\theta_2=l\cos\theta_1 \\ y_2-\frac{l}{2}\sin\theta_2=l\sin\theta_1 \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

或者

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_2+\frac{l}{2}\sin\theta_2\dot{\theta}_2+l\sin\theta_1\dot{\theta}_1=0 \\ \dot{y}_2-\frac{l}{2}\cos\theta_2\dot{\theta}_2-l\cos\theta_1\dot{\theta}_1=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.9$'$}$$

所取广义坐标以及约束(2.9)$'$给出矩阵$[A_2]$，如下式所示，满足$|A_2|\neq 0$，于是，系统的标准化因子$[B]$可求得如下：

$$[A_1]=\begin{bmatrix} l\sin\theta_1 & \frac{l}{2}\sin\theta_2 \\ -l\cos\theta_1 & -\frac{l}{2}\cos\theta_2 \end{bmatrix},\quad [A_2]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad [A_2]^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D]=\begin{bmatrix} 0 \\ [A_2]^{-1} \end{bmatrix},\qquad [C]=\begin{bmatrix} [I] \\ -[A_2]^{-1}[A_1] \end{bmatrix}$$

$$[B]=[[D]\ \ [C]]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -l\sin\theta_1 & -\frac{l}{2}\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & l\cos\theta_1 & \frac{l}{2}\cos\theta_2 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

系统中主动力所作的功率可求得如下：

$$\begin{aligned} \delta N&=mg\delta\dot{x}_1+mg\delta\dot{x}_2 \\ &=-\frac{l}{2}\sin\theta_1\cdot mg\delta\dot{\theta}_1+mg\delta\dot{x}_2 \end{aligned}$$

其中 $x_1=\frac{l}{2}\cos\theta_1$，即$\dot{x}_1=-\frac{l}{2}\sin\theta_1\dot{\theta}_1$，推得$\delta\dot{x}_1=-\frac{l}{2}\sin\theta_1\delta\dot{\theta}_1$，于是，广义力为：

$$\{Q\}=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}mgl\sin\theta_1 \\ 0 \\ mg \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

系统动能为

$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$$

于是广义动量为：

$$\{P\}=\left\{\begin{matrix}\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}_1\\ \frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_2\\ m\dot{x}_2\\ m\dot{y}_2\end{matrix}\right\} \tag{2.12}$$

将(2.10)，(2.11)及(2.12)式代入方程(2.1)，得到：

$$\left\{\begin{matrix}\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}_1\\ \frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}^2\\ m\dot{x}_2\\ m\dot{y}_2\end{matrix}\right\}^T\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&-l\sin\theta_1&-\frac{l}{2}\sin\theta_2\\0&1&l\cos\theta_1&\frac{l}{2}\cos\theta_2\end{bmatrix}$$

$$=\left\{\begin{matrix}-\frac{1}{2}mgl\sin\theta_1\\ 0\\ mg\\ 0\end{matrix}\right\}^T\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&-l\sin\theta_1&-\frac{l}{2}\sin\theta_2\\0&0&l\cos\theta_1&\frac{l}{2}\cos\theta_2\end{bmatrix}+\left[\left\{\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\}^T\left\{\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\right\}^T\right] \tag{2.13}$$

(2.13)式为一矩阵方程，它包含以下四个微分方程：

$$\left.\begin{aligned}&m\ddot{x}_2=mg+\lambda_1\\ &m\ddot{y}_2=\lambda_2\\ &\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}_1-m\ddot{x}_2\frac{l}{2}\sin\theta_1+m\ddot{y}_2l\cos\theta_1=-\frac{3}{2}mgl\sin\theta_1\\ &\frac{1}{12}ml^2\ddot{\theta}_2-m\ddot{x}_2\frac{l}{2}\sin\theta_2+m\ddot{y}_2\frac{l}{2}\cos\theta_2=-\frac{1}{2}mgl\sin\theta_2\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

由(2.9)或(2.9)′式可知，加在$\ddot{\theta}_1,\ddot{\theta}_2,\ddot{x}_2,\ddot{y}_2$的约束条件为：

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{x}_2+\frac{l}{2}\sin\theta_2\ddot{\theta}_2+l\sin\theta_1\ddot{\theta}_1+\frac{l}{2}\cos\theta_2(\dot{\theta}_2)^2+l\cos\theta_1(\dot{\theta}_1)^2=0\\ &\ddot{y}_2-\frac{l}{2}\cos\theta_2\ddot{\theta}_2-l\cos\theta_1\ddot{\theta}_1+\frac{l}{2}\sin\theta_2(\dot{\theta})^2+l\sin\theta_1(\dot{\theta}_1)^2=0\end{aligned}\right\} \tag{2.9″}$$

动力学方程组 (2.14) 的最后两个方程与约束条件 (2.9)″ 联立，再考虑到初条件：$\theta_1=30°$，$\theta_2=90°$，$\dot{\theta}_1=0$，$\dot{\theta}_2=0$，就可求得运动的解$\ddot{\theta}_1,\ddot{\theta}_2,\ddot{x}_2,\ddot{y}_2$，其值如(2.7)式所示。

再由动力学方程组(2.14)的前两个方程，就能求出待定乘子$\lambda_1.\lambda_2$，它们依次是AB 杆在A点所承受到的约束反力X_A，Y_A，其值分别为(2.8)式中的σ_3，σ_4，亦即

$$X_A=\lambda_1=\sigma_3=-\frac{23}{110}mg$$

$$Y_A=\lambda_2=\sigma_4=-\frac{9\sqrt{3}}{55}mg$$

3. 问题3

在上述问题中，已知条件保持不变，求系统在O点所承受到的约束反力X_0、Y_0。

为了求解杆上O点的约束反力，先解除O点约束，再取广义坐标依次为OA AB杆相对铅垂线的偏角$\theta_1=q_1$，$\theta_2=q_2$，以及杆上O点的坐标$x=q_3$，$y=q_4$。

加在系统上的约束方程为O点坐标满足$x=0$，$y=0$，亦即，

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}=0\\ \dot{y}=0\end{array}\right\} \tag{2.15}$$

于是，系统的标准化因子可求得如下：

$$[A_1]=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\quad [A_2]=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad [A_2]^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$[B]=[[D]\ \ [C]]=\begin{bmatrix}[0] & [I]\\ [A_2]^{-1} & -[A_2]^{-1}[A_1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&(&0\end{bmatrix} \tag{2.16}$$

系统中主动力所作的功率可求得如下：

$$\delta N=mg\delta\dot{x}_1+mg\delta\dot{x}_2$$

$$=-\frac{3}{2}mgl\sin\theta_1\delta\dot{\theta}_1-\frac{1}{2}mgl\sin\theta_2\delta\dot{\theta}_2+2mg\delta\dot{x}$$

上式中，$x_1=x+\frac{l}{2}\cos\theta_1$，$x_2=x+l\cos\theta_1+\frac{l}{2}\cos\theta_2$，亦即 $\dot{x}_1=\dot{x}-\frac{l}{2}\sin\theta_1\dot{\theta}_1$，$\dot{x}_2=\dot{x}-l\sin\theta_1\dot{\theta}_1-\frac{l}{2}\sin\theta_2\dot{\theta}_2$，代入第一式中，就可推得以上结果.于是广义力为：

$$\{Q\}=\begin{Bmatrix}-\frac{3}{2}mgl\sin\theta_1\\ -\frac{1}{2}mgl\sin\theta_2\\ 2mg\\ 0\end{Bmatrix} \tag{2.17}$$

系统动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_2^2$$

$$=\frac{1}{2}m\left[\left(\dot{x}-\frac{l}{2}\sin\theta_1\dot{\theta}_1\right)^2+\left(\dot{y}+\frac{l}{2}\cos\theta\dot{\theta}_1\right)^2\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_1^2$$

$$+\frac{1}{2}m\left[\left(\dot{x}-l\sin\theta_1\dot{\theta}_1-\frac{l}{2}\sin\theta_2\dot{\theta}_2\right)^2+\left(\dot{y}+l\cos\theta_1\dot{\theta}_1+\frac{l}{2}\cos\theta_2\dot{\theta}_2\right)^2\right]$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}_2^2$$

于是广义动量及其随时间的变化率分别为：

$$\{P\}=\begin{Bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{Bmatrix},\qquad \frac{d}{dt}\{P\}=\begin{Bmatrix}\dot p_1\\\dot p_2\\\dot p_3\\\dot p_4\end{Bmatrix}\tag{2.18}$$

其中 p_1,p_2,p_3,p_4分别为：

$$p_1=\frac{1}{12}ml^2\dot\theta_1+m\left(\dot x-\frac{l}{2}\sin\theta_1\dot\theta_1\right)\left(-\frac{l}{2}\sin\theta_1\right)+m\left(\dot y+\frac{l}{2}\cos\theta_1\dot\theta_1\right)\left(\frac{l}{2}\cos\theta_1\right)$$

$$+m\left(\dot x-l\sin\theta_1\dot\theta_1-\frac{l}{2}\sin\theta_2\dot\theta_2\right)(-l\sin\theta_1)+m\left(\dot y+l\cos\theta_1\dot\theta_1\right.$$

$$\left.+\frac{l}{2}\cos\theta_2\dot\theta_2\right)(l\cos\theta_1)$$

$$p_2=\frac{1}{12}ml^2\dot\theta_2+m\left(\dot x-l\sin\theta_1\dot\theta_1-\frac{l}{2}\sin\theta_2\dot\theta_2\right)\left(-\frac{l}{2}\sin\theta_2\right)$$

$$+m\left(\dot y+l\cos\theta_1\dot\theta_1+\frac{l}{2}\cos\theta_2\dot\theta_2\right)\left(\frac{l}{2}\cos\theta_2\right)$$

$$p_3=m\left(\dot x-\frac{l}{2}\sin\theta_1\dot\theta_1\right)+m\left(\dot x-l\sin\theta_1\dot\theta_1-\frac{l}{2}\sin\theta_2\dot\theta_2\right)$$

$$p_4=m\left(\dot y+l\cos\theta_1\dot\theta_1+\frac{l}{2}\cos\theta_2\dot\theta_2\right)$$

$\dot p_1,\dot p_2,\dot p_3,\dot p_4$在位置$\theta_1=30°$，$\theta_2=90°$，满足$\dot\theta_1=0$，$\dot\theta_2=0$的值为：

$$\dot p_1=\frac{1}{12}ml^2\ddot\theta_1-\frac{l}{4}m\left(\ddot x-\frac{l}{4}\ddot\theta_1\right)+\frac{\sqrt3}{4}ml\left(\ddot y+\frac{\sqrt3}{4}l\ddot\theta_1\right)$$

$$-\frac{1}{2}ml\left(\ddot x-\frac{1}{2}l\ddot\theta_1-\frac{1}{2}l\ddot\theta_2\right)+\frac{\sqrt3}{2}ml\left(\ddot y+\frac{\sqrt3}{2}l\ddot\theta_1\right)$$

$$\dot p_2=\frac{1}{12}ml^2\ddot\theta_2-\frac{1}{2}ml\left(\ddot x-\frac{1}{2}l\ddot\theta-\frac{1}{2}l\ddot\theta_2\right)$$

$$\dot p_3=m\left(\ddot x-\frac{1}{4}l\ddot\theta_1\right)+m\left(\ddot x-\frac{1}{2}l\ddot\theta_1-\frac{1}{2}l\ddot\theta_2\right)$$

$$\dot p_4=m\left(\ddot y+\frac{\sqrt3}{2}l\ddot\theta_1\right)$$

将(2.16)，(2.17)及(2.18)式代入方程(2.1)，考虑到约束条件(2.15)，得到：

$$\begin{Bmatrix}\frac{4}{3}ml^2\ddot\theta_1+\frac{1}{4}ml^2\ddot\theta_2\\\frac{1}{4}ml^2\ddot\theta_1+\frac{1}{3}ml^2\ddot\theta_2\\-\frac{3}{4}ml\ddot\theta_1-\frac{1}{2}ml\ddot\theta_2\\\frac{\sqrt3}{2}ml\ddot\theta_1\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\frac{3}{2}mgl\sin\theta_1\\-\frac{1}{2}mgl\sin\theta_2\\2mg\\0\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}+\left[\begin{Bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}^T\right]\tag{2.19}$$

矩阵方程(2.19)包含了以下4个动力学方程：

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{3}{4}ml\ddot{\theta}_1-\frac{1}{2}ml\ddot{\theta}_2=2mg+\sigma_1\\&\frac{\sqrt{3}}{2}ml\ddot{\theta}_1=\sigma_2\\&\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta}_1+\frac{1}{4}ml^2\ddot{\theta}_2=-\frac{3}{4}mgl\\&\frac{1}{4}ml^2\ddot{\theta}_1+\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}_2=-\frac{1}{2}mgl\end{aligned}\right\}\tag{2.20}$$

动力学方程组(2.20)中的后两个方程给出系统的运动$\ddot{\theta}_1$及$\ddot{\theta}_2$的解。(2.20)中的前两个方程给出待定乘子σ_1，σ_2之值，它们分别为系统在O点承受到的约束反力X_0，Y_0，它们的解答如(2.7)与(2.8)式所示。

三、结 论

按照本文所给出的求解动力学问题的普遍方法，可以由方程(2.1)得到矩阵形式的动力学方程，它包含了这样两组方程：一组是不含约束反力的运动方程组，另一组是关于约束反力已解耦的方程组，它们和约束方程一起，就能分别求解出系统的运动与约束反力。

本文以例子，用我们的方法求解约束反力，从这个例子中可知，这个方法可以用来求出系统的全部约束反力（如例1)，也可用来单独求解所需要的一个或一部分约束反力（如例2和例3)。将例2与例1相比较，从中可看到，例2中的标准化因子[B]较简单，是4×4矩阵，降低了二阶，动力学方程及约束方程都分别减少了两个，因此使求解过程得到简化。

综上所述，本文给出的普遍方法，具有这样特点，它既能像拉格朗日第二类方程一样用于求解系统的运动，还具有像拉格朗日第一类方程求解约束反力的功能，而且求解约束反力的方法又比拉格朗日第一类方程简便得多。只要适当地选取广义坐标和约束方程，就能直接求解力学系统内容指定节点上的约束反力。

参 考 文 献

[1] 孙右烈，标准化的Routh方程，科学通报，34(18)(1989)，1436—1437.

[2] 孙右烈，非线性非完整系统的运动方程及其广义能量积分，上海力学，9(3)(1988)，28—33.

[3] 孙右烈，非完整系统的马基方程中转换矩阵C的一般形式，上海力学，10,(2)(1989)，43—48.

The General Method for Solving the Dynamic Problems

Sun Youlie

(*Shanghai University, Shanghai* 200072, *P. R. China*)

Abstract

In this paper the author has used the normalized Routh equations[1] to solve dynamic problems and establish the general method for finding out the constraint forces and the variations of the state of motion for the complicated systems.

Key words complicated system, dynamic problem, constraint forces