应用数学和力学，第17卷 第7期 (1996年7月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

多中心牛顿定理及其应用

桂 祖 华[1]

(戴世强推荐，1995年4月18日收到)

摘 要

本文将论文[1]推广到离散型的多中心泰勒定理，即多中心牛顿定理。从而得到相应的论文[2]，即高阶差分的插值公式，并给出其应用。

关键词 牛顿插值公式 多中心牛顿多项式 多中心牛顿定理 高阶差分插值公式

一、牛顿插值公式简述

我们记 $x_{1k}=x_1+kl_1 \qquad (k\geqslant 0)$

也可以定义$k<0$的情况。

我们定义以l_1为分距的差分（第一阶）：

$$\Delta_{l_1} f(x)=f(x+l_1)-f(x)$$

约定高阶差分为：

$$\Delta_{l_1}^{k} f(x)=\Delta_{l_1}(\Delta_{l_1}^{k-1} f(x))=f(x+kl_1)-C_k^1 f(x+(k-1)l_1)+\cdots$$
$$+(-1)^i C_k^i f(x+(k-i)l_1)+\cdots+(-1)^k f(x) \qquad (k=2,3,\cdots)$$

这里 $C_k^i=\dfrac{k!}{i!(k-i)!}$

记 $\Delta y_{k-1}=y_k-y_{k-1}$，$y_k=f(x_1+kl_1)$

$$u_1=\frac{x-x_1}{l_1}.$$

牛顿公式为：

$$N_{\mathrm{I}}(x)=y_0+u_1\Delta y_0+\frac{u_1(u_1-1)}{2}\Delta^2 y_0+\cdots+\frac{u_1(u_1-1)\cdots(u_1-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (\text{公式 I})$$

$$N_{\mathrm{II}}(x)=y_0+u_1 y_{-1}+\frac{u_1(u_1+1)}{2}\Delta^2 y_{-2}+\cdots+\frac{u_1(u_1+1)\cdots(u_1+n-1)}{n!}\Delta^n y_{-n} \quad (\text{公式 II})$$

例1 设函数$f(x)$有表1数据，计算$f(22)=$?

由牛顿公式 I 得知，取$x_1=20$，$u_1=\dfrac{22-20}{5}=0.4$

1 上海交通大学，上海 200030。

表 1

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0				
		487			
5	4.87		78		
		565		29	
10	10.52		107		2
		672		31	
15	17.24		138		3
		810		34	
20	25.34		172		−7
		982		27	
25	35.16		199		5
		1181		32	
30	46.97		231		
		1412			
35	61.09				

$$f(22)=25.34+(0.4)\cdot(9.82)-\frac{(0.4)\cdot(0.6)}{2!}\cdot(1.99)$$

$$+\frac{(0.4)\cdot(0.6)\cdot(1.6)}{3!}\cdot(0.32)=29.05 \tag{1.1}$$

二、多中心牛顿多项式

我们记$x_i\neq$(互异)，$h_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为正整数，$l_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为正实数，称为步长。

$$u_i=\frac{x-x_i}{l_i},\quad C_{u_i}^{h_i}=\frac{u_i(u_i-1)\cdots(u_i-h_i+1)}{h_i!},\quad C_{u_i}^{0}=1$$

$$Q(x)=\prod_{i=1}^{n} C_{u_i}^{h_i},\quad x_i\neq x_j+kl_j\quad (i\neq j,k=0,1,\cdots,h_j-1) \tag{2.1}$$

$$f[C_{u_i}^{h_i}]=\sum_{j=0}^{h_i-1}\Delta_{l_i}^{j}\left(\frac{f(x)}{Q(x)}C_{u_i}^{h_i}\right)_{u_i}C_{u_i}^{j} \tag{2.2}$$

其中

$$\Delta_{l_i}^{j}\left(\frac{f(x)}{Q(x)}C_{u_i}^{h_i}\right)_{u_i}=\sum_{k=0}^{j}(-1)^k C_j^k\left(\frac{f(x)}{Q(x)}C_{u_i}^{h_i}\right)_{x=x_i+(j-k)l_i} \tag{2.3}$$

定义
$$Q(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{f[C_{u_i}^{h_i}]}{C_{u_i}^{h_i}} \tag{2.4}$$

为$f(x)$关于$Q(x)$的多中心的牛顿多项式。

定理1 设$P(x)$是一个多项式，其次数$\alpha(P)=t\leqslant S$，这里$S=\sum_{i=1}^{n}h_i$，则

$$P(x)=Q(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{P[C_{u_i}^{h_i}]}{C_{u_i}^{h_i}}+a\delta_t^S Q(x) \tag{2.5}$$

这里

$$\delta_t^S=\begin{cases}1 & (S=t)\\ 0 & (S\neq t)\end{cases} \tag{2.6}$$

a为$P(x)$多项式的最高次x的系数。

例2 在定理1中，取$n=2$，$h_1=2$，$h_2=1$和$P(x)=ax^2+bx+c$，则我们可得

$$P(x)=\left\{\left(\frac{P(x)}{u_2}\right)_{u_1=0}+\left[\left(\frac{P(x)}{u_2}\right)_{u_1=1}-\left(\frac{P(x)}{u_2}\right)_{u_1=0}\right]u_1\right\}u_2$$

$$+\left\{\left(\frac{P(x)}{\frac{u_1(u_1-1)}{2}}\right)_{u_2=0}\right\}\frac{u_1(u_1-1)}{2}$$

$$=\left\{\frac{ax_1^2+bx_1+c}{\frac{x_1-x_2}{l_1}}+\left[\left(\frac{a(x_1+l_1)^2+b(x_1+l_1)+c}{\frac{x_1-x_2+l_1}{l_2}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{ax_1^2+bx_1+c}{\frac{x_1-x_2}{l_2}}\right)\right]\left(\frac{x-x_1}{l_1}\right)\right\}\left(\frac{x-x_2}{l_2}\right)$$

$$+\left\{\frac{ax_2^2+bx_2+c}{\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-x_1}{l_1}\right)\left(\frac{x_2-x_1}{l_1}-1\right)}\right\}\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_1}{l_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{l_1}-1\right) \tag{2.7}$$

三、多中心牛顿定理

定理2 设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上具有S阶导数的函数，对于x_i+jl_i，$x\in[a,b]$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=0,1,\cdots,h_i-1)$，则存在一个值$C\in(m,M)$

这里 $$M=\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant h_i-1}}(x_i+jl_i,x),\quad m=\min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant h_i-1}}(x_i+jl_i,x),$$

使 $$R_{f,S}(x)=\frac{f^{(S)}(c)}{S!}\cdot Q(x)\prod_{i=1}^{n}l_i^{h_i}\prod_{j=1}^{n}(h_j!) \tag{3.1}$$

这里 $$R_{f,S}(x)=f(x)-Q(x)\sum_{i=1}^{n}f[C_{u_i}^{h_i}]/C_{u_i}^{h_i} \tag{3.2}$$

四、多中心牛顿插值公式

公式Ⅱ（牛顿插值公式）：设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的函数，对于x_i+jl_i，$x\in[a,b]$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=0,1,\cdots,h_i-1)$，则我们有

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{h_i-1}a_{ij}(x)f(x_i+jl_i) \tag{4.1}$$

这里 $$a_{ij}(x)=\frac{1}{G_i(x)}\sum_{k=j}^{h_i-1}(-1)^{k-j}C_k^jC_{u_i}^k\,G_i(x_i+jl_i) \tag{4.2}$$

$$G_i(x)=C_{u_i}^{h_i}/Q(x),\quad Q(x)=\prod_{i=1}^{n}C_{u_i}^{h_i} \tag{4.3}$$

(4.1)称为函数$f(x)$关于$Q(x)$的牛顿插值公式。

特别当$f(x)$具有S阶导数时，则我们还可以有余项

$$f(x)=P(x)+R_{f,S}(x) \tag{4.4}$$

$$R_{f,S}(x)=\frac{f^{(S)}(c)}{S!}Q(x)\prod_{i=1}^{n}l_i^{h_i}\prod_{j=1}^{n}(h_j!) \tag{4.5}$$

这里C是一个中值。

例3 利用公式Ⅱ，我们计算<例1>

解 在公式Ⅱ中我们取

$h_1=h_2=2$，$l_1=l_2=5$

$x_1=20$，$x_2=10$，$x=22$，则

$$\begin{aligned}f(22)&=a_{10}f(20)+a_{11}f(25)+a_{20}f(10)+a_{21}f(15)\\&=1.008\cdot25.34+0.224\cdot35.16+0.056\cdot10.52-0.288\cdot17.24\\&=29.04256\end{aligned} \tag{4.6}$$

这里

$$\begin{cases}a_{10}=\frac{1}{2}\left(\frac{22-10}{5}\right)\left(\frac{22-10}{5}-1\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{20-10}{5}\right)\left(\frac{20-10}{5}-1\right)}\cdot\left[1-\frac{22-20}{5}\right]=1.008\\ a_{11}=\frac{1}{2}\left(\frac{22-10}{5}\right)\left(\frac{22-10}{5}-1\right)\left(\frac{22-20}{5}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{25-10}{5}\right)\left(\frac{25-10}{5}-1\right)}=0.224\\ a_{20}=\frac{1}{2}\left(\frac{22-20}{5}\right)\left(\frac{22-20}{5}-1\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{10-20}{5}\right)\left(\frac{10-20}{5}-1\right)}\cdot\left[1-\frac{22-10}{5}\right]=0.056\\ a_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{22-20}{5}\right)\left(\frac{22-20}{5}-1\right)\left(\frac{22-10}{5}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{15-20}{5}\right)\left(\frac{15-20}{5}-1\right)}=-0.288\end{cases}$$

我们比较(4.6)与(1.1)，并且易知它们相差0.01。

例4 在公式Ⅱ中，取$h_i=1$，$(i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$P(x)=f(x_1)\frac{(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}+\cdots+f(x_n)\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

$$R_{f,n}(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_1)\cdots(x-x_n),\quad f(x)=P(x)+R_{f,n}(x)$$

这就是著名的拉格朗日插值公式，且与[2]方法得出的结果一致。

例5 在公式Ⅱ中，取$h_i=2$，$(i=1,2,\cdots,n)$时，可得

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{1}a_{ij}(x)f(x_i+jl_i)$$

这里

$$\begin{cases}a_{i0}(x)=\left(1-\frac{x-x_i}{l_i}\right)\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(x-x_j)(x-x_j-l_j)\Big/\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)(x_i-x_j-l_j),\\ a_{i1}(x)=\left(\frac{x-x_i}{l_i}\right)\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(x-x_j)(x-x_j-l_j)\Big/\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(x_i-x_j+l_i)(x_i-x_j+l_i-l_j),\end{cases}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

$$R_{f,2n}(x)=\frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)(x-x_i-l_i).$$

当M为一个确定的正实数，使$|f^{(i)}(x)|\leqslant M$
$(i=1,2,\cdots)$，则由(4.5)可得余项估计

$$|R_{f,S}(x)|\leqslant\frac{M}{S!}\left|Q(x)\prod_{i=1}^{n}l_i^{h_i}\right|\prod_{i=1}^{n}(h_j!)\to 0,\left(\begin{matrix}|l_1|<1\\ h_i\to\infty\end{matrix}\right).$$

本文的定理1，定理2和公式Ⅲ我们可以如同论文[1]，[2]类似地加以证明。

参 考 文 献

[1] 桂祖华，多中心泰勒定理及其应用，上海交通大学学报，29(1)(1995)，110—118.

[2] 桂祖华，高阶导数的插值公式，应用数学和力学，16(1)(1995)，91—94.

Newton's Theorem with Respect to a Lot of Centers and Their Applications

Gui Zuhua

(The Department of Applied Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200027, *P.R. China)*

Abstract

In this paper, we shall extend the paper [1] to a separate Taylor's Theorem with respect to a lot centers, namely Newton's Theorem of a lot of centers. From it we obtain the analogous results in the paper [2], namely an inter-polation formula of the difference of higher order. Finally we give their applications.

Key words Newton's interpolation formula, Newton's polynomial of a lot of centers, Newton's theorem of a lot of centers, interpolation formula of the difference of higher order