

# 风沙二相流动的三流体模型\*

刘大有<sup>1</sup> 董飞<sup>1</sup>

(李家春推荐, 1995年5月2日收到)

## 摘 要

本文采用连续介质观点研究风沙运动, 这一工作的关键在于如何正确地模化颗粒相的应力。通过对气-固二相流研究中常用的双流体模型的分析, 我们发现此模型在研究风沙运动时有相当的缺陷, 即使是研究最简单的风沙流——定常二维充分发展的流场也是如此。基于此, 我们提出了将向上、向下运动的颗粒用两种拟流体来表征的三流体模型。相对于双流体模型, 三流体模型较好地反映了流场的内部结构及边界状况对流动的影响, 而且固相应力的主要部分也可用应变变量显式表示, 对近似求解相当有利。最后, 本文给出了三流体模型的风沙流运动方程组并讨论了相应的边界条件的提法。

**关键词** 风沙流 二相流 双流体模型 三流体模型

## 一、引 言

风沙运动是沙漠地貌学研究的一个重要内容。自 Bagnold<sup>[1]</sup> 以来, 许多学者在风沙运动的理论和室内外实验方面都作了大量工作<sup>[2,3]</sup>, 但由于风沙运动固有的复杂性, 目前仍缺乏较系统、较成熟的理论。风沙运动力学的研究包括宏观和细观两个方面: 宏观研究包括单宽输沙率、风沙层中的风速分布和沙通量的分布等, 目前的研究主要集中在单宽输沙率和风沙流对外层风速分布的影响上(由于测量困难, 涉及到风沙流结构的工作不多), 这些工作主要依靠室内外的实验和观察, 以及一些定性或半定量的分析; 细观方面是单个沙粒运动轨迹的研究, 主要采用高速摄影等研究手段。这两方面的研究目前尚未有机地联系起来。

事实上, 描写大量颗粒的运动一般以采用连续介质力学方法为宜<sup>[4,5]</sup>, 正如描写气体中大量分子的运动采用气体动力学方法一样。所有的连续介质都有形式上一样的连续方程和动量方程, 介质的特点主要反映在应力-应变率本构关系(对于多流体模型还有组元间作用力的本构式等)和边界条件的提法上。风沙流中固相应力本构式是联系细观的沙粒跃移运动和风沙宏观运动特性的桥梁。

风沙运动属于气-固二相流的范畴, 但同许多常见的气-固流相比它又有一系列显著的特点, 因此许多在气-固流中常用的研究方法若不作适当修正而直接应用于风沙流研究都不一定有效, 这可能是风沙二相流的发展滞后于一气-固二相流的原因之一。譬如, 对于一般

\* 国家自然科学基金资助课题。

<sup>1</sup> 中国科学院力学研究所, 北京 100080;

的气-固二相流,若忽略粒度不均匀的影响,常采用单流体模型(描写混合物的平均运动)或双流体模型(分别描写气相和固相的运动),一般不需要更复杂的模型,而在风沙流中,由于在流场的绝大部分区域里垂向脉动速度远大于垂向平均速度,而且离床面越近垂向脉动速度越大,使得采用通常的数学模型来描写固相剪应力不很适宜。在深入分析流动特点的基础上,我们提出了采用三流体模型描写风沙二相流的新观点<sup>[6,7]</sup>。本文将讨论双流体模型用于风沙流研究时的缺陷,以及三流体模型中各宏观量的定义和物理意义,最后给出三流体模型的风沙流运动方程组及相应的边界条件,

## 二、描写风沙运动的双流体模型

我们研究无限大平坦沙地上定常充分发展的二维风沙运动。记  $x$  是风沙流宏观运动的方向,  $z$  是从地面算起垂直向上的方向,用  $u, w$  标记  $x, z$  方向的速度分量。固相的平均速度分量分别为  $\bar{u}_s, \bar{w}_s$ , 分密度为  $\sigma_s$ 。在三流体模型中,我们按垂向分速的正与负将颗粒分成两组,并分别进行统计平均。记垂向分速为正的颗粒(以下简称为向上颗粒)的分密度为  $\sigma_u$ , 平均速度分量为  $\bar{u}_u$  和  $\bar{w}_u$ ; 垂向分速为负的颗粒(简称为向下颗粒)的分密度为  $\sigma_d$ , 平均速度分量为  $\bar{u}_d$  和  $\bar{w}_d$ 。对于气相,则用  $u_g$  和  $w_g$  表示它的平均速度分量,  $\sigma_g$  为其分密度。又记  $\rho_g$  和  $\rho_s$  分别为气体密度和颗粒材料密度。

在气-固二相流中常用双流体模型:一种流体代表气相,另一种是固相拟流体。对于定常、充分发展的二维气-固二相流,有如下的双流体模型基本方程组:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_g w_g) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_s \bar{w}_s) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_g u_g w_g) = \frac{\partial T_{g,zz}}{\partial z} - F_x \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_s \bar{u}_s \bar{w}_s) = \frac{\partial T_{s,zz}}{\partial z} + F_x \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_g w_g^2) = \frac{\partial T_{g,zz}}{\partial z} - \sigma_g g - F_z \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_s \bar{w}_s^2) = \frac{\partial T_{s,zz}}{\partial z} - \sigma_s g + F_z \quad (2.6)$$

其中  $F_x$  和  $F_z$  是作用于固相的相间力,  $g$  是重力加速度,  $T_{k,zz}$  和  $T_{k,zz}$  ( $k=g, s$ ) 分别是相  $k$  的剪应力和正应力。由于在床面上( $z=0$ )气体不可穿透,颗粒(在统计上)无吹蚀和堆积,即:

$$w_g(0) = 0, \bar{w}_s(0) = 0 \quad (2.7)$$

所以由式(2.1)、(2.2)和(2.7)得

$$\sigma_g w_g = \text{常数} = 0, \sigma_s \bar{w}_s = \text{常数} = 0 \quad (2.8)$$

由于在风沙流中“ $\sigma_g \neq 0, \sigma_s \neq 0$ ”,因此由上式可得

$$w_g = 0, \bar{w}_s = 0 \quad (2.9)$$

结果式(3.3)~(3.6)的左边均为零。由此可见,对于定常、充分发展的二维风沙流,各

种应力（包括压强）起着平衡相间力和重力的关键作用。

一般来说，气相和固相的应力都是由热运动、湍流脉动和  $PL$  类脉动<sup>1)</sup>这三种脉动分别引起的三部分应力组成的，即：

$$T_{k,zz} = T_{k,zz}^L + T_{k,zz}^T + T_{k,zz}^{PL} \quad (k=g, p. \text{下同}) \quad (2.10)$$

$$T_{k,zz} = T_{k,zz}^L + T_{k,zz}^T + T_{k,zz}^{PL} \quad (2.11)$$

其中气相的热运动应力（即分子应力） $T_{g,zz}^L$ 和 $T_{g,zz}^T$ 可近似表示为

$$T_{g,zz}^L = -p, \quad T_{g,zz}^T = \mu \frac{\partial u_g}{\partial z} \quad (2.12)$$

气相的湍流正应力 $T_{g,zz}^T$ 远小于压强 $p$ 而被忽略，湍流剪应力 $T_{g,zz}^T$ 可采用混合长理论的近似公式，即：

$$T_{g,zz}^T \approx 0, \quad T_{g,zz}^T = \mu^T \frac{\partial u_g}{\partial z}, \quad \mu^T \approx \rho_g \kappa^2 l^2 \left| \frac{\partial u_g}{\partial z} \right| \quad (2.13)$$

其中 $\kappa$ 是 Karman 常数。虽然固相的存在对气相的应力本构关系有一定影响（尤其在固相分密度较大的区域——靠近床面处），但就风沙运动目前的研究水平而言，流动中最不确定的量（进行计算时则是最主要的误差来源）是下面将详细讨论的固相  $PL$  类应力。因此，在风沙流研究的目前精度要求范围内，采用式(2.13)是适当的。

对于风沙流中的沙粒而言，固相的热运动——即颗粒的 Brown 运动——几乎总是可以忽略不计，即：

$$T_{p,zz}^L \approx 0, \quad T_{p,zz}^T \approx 0 \quad (2.14)$$

固相的湍流应力是由气相带动的。由于颗粒的材料密度 $\rho_p$ 远大于气体密度 $\rho_g$ ，因此对于作跃移运动的沙粒来说，颗粒的湍流脉动远小于气体的湍流脉动。另一方面，在固相应力比较重要的风沙流下层，固相湍流脉动也远小于下面将讨论的固相  $PL$  类脉动，因此在本文中忽略固相的湍流应力，即：

$$T_{p,zz}^T \approx 0, \quad T_{p,zz}^T \approx 0 \quad (2.15)$$

下面讨论  $PL$  类脉动和  $PL$  类应力<sup>[4,8]</sup>。在风沙流中，颗粒的运动有三种主要形式：悬移、跃移和蠕移，其中又以跃移最为重要，它在总输沙率中的贡献占 70% 以上。本文研究的正是风沙流中的跃移运动：当着眼于一个个的颗粒时，它们是作跃移运动——跳跃式前进，但从连续介质观点看，物理图象则是固相在床面上有一不为零的滑移速度，并有强烈的速度脉动。从其产生的机理和具有的性质分析，这种脉动不属于热运动，也不是湍流脉动。例如，在壁面附近湍流脉动是越接近床面越弱，在床面上的强度为零，而  $PL$  类脉动则越接近床面越强；又如，湍流脉动是由气体带动颗粒，而  $PL$  类脉动起源于颗粒-颗粒碰撞和颗粒-壁面碰撞，是颗粒脉动带动流体脉动……。颗粒的脉动必定引起（固相内各部分之间切向的和法向的）动量传递，这就是固相  $PL$  类应力的细观解释。

设  $S$  是位于高度  $z$  的单位面积的水平面元，单位时间内向上运动的颗粒穿过该面向上传输的质量为  $\sigma_u w_u$ ，向下运动的颗粒穿过该面向上传输的质量为  $\sigma_d w_d (= -\sigma_u w_u)$ 。又设这些向上颗粒每单位质量具有的平均水平动量和垂向动量分别为  $\bar{u}_u$  和  $\bar{w}_u$ ，而那些向下颗粒每单位质量具有的平均水平动量和垂向动量分别为  $\bar{u}_d$  和  $\bar{w}_d$ ，于是固相  $PL$  类脉动的  $z$  向正应力  $T_{p,z}^{PL}$  和

1) 在我们过去的论著中曾称之为“准层流脉动”，似乎不很达意，目前也未找到适当的名词，暂以“ $PL$ 类脉动”命名之，相应的应力称为“ $PL$ 类应力”。

剪应力  $T_{y,zz}^{PL}$  分别为

$$T_{y,zz}^{PL} = -\sigma_u w_u \dot{w}_u - \sigma_d w_d \dot{w}_d = -\sigma_u w_u (\dot{w}_u - \dot{w}_d) \quad (2.16)$$

$$T_{y,zz}^{PL} = -\sigma_u w_u \dot{u}_u - \sigma_d w_d \dot{u}_d = -\sigma_u w_u (\dot{u}_u - \dot{u}_d) \quad (2.17)$$

由气体分子动力学的初等理论可以得出, 向上分子(或向下分子)单位时间内穿越单位面元的质量为  $\frac{1}{4}\rho\bar{C}$ , 气体的剪应力  $\tau$  则可表示为

$$\tau \approx \frac{1}{4}\rho\bar{C}(\bar{U}_d - \bar{U}_u) \quad (2.18)$$

这一结果与式(2.17)很相似。对于气体, 可假设  $\bar{U}_d$  和  $\bar{U}_u$  分别近似等于  $(z+l)$  和  $(z-l)$  处的气体平均速度  $U_0(z+l)$  和  $U_0(z-l)$ 。由于通常情况下气体分子自由程  $l$  很小, 所以近似有

$$\begin{aligned} \bar{U}_d &\approx U_0(z+l) \approx U_0(z) + l \frac{\partial U_0}{\partial z} \\ \bar{U}_u &\approx U_0(z-l) \approx U_0(z) - l \frac{\partial U_0}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.19)$$

代入式(2.18)就导出  $\tau = \mu \frac{\partial U_0}{\partial z}$ ,  $\mu \approx \frac{1}{2}\rho\bar{C}l$  的结果。对于风沙流中的固相, 由于颗粒的平均自由程很大, 所以没有与式(2.19)类似的近似式, 因此  $T_{y,zz}^{PL}$  一般来说不是梯度型的, 在双流体模型框架内目前还没有适当的近似式。

气相的  $PL$  类脉动由固相带动, 相对来说比较小。气相  $PL$  类剪应力  $T_{\theta,zz}^{PL}$  在风沙流的上层远小于气相湍流剪应力  $T_{\theta,zz}^T$ , 在下层则远小于气-固间的作用力  $F_z$  和固相的  $PL$  类剪应力  $T_{y,zz}^{PL}$ , 故可忽略不计; 气相的  $PL$  类正应力  $T_{\theta,zz}^{PL}$  则远小于压强  $p$ , 也常被忽略, 即:

$$T_{\theta,zz}^{PL} \approx 0, \quad T_{y,zz}^{PL} \approx 0 \quad (2.20)$$

将以上各式代入式(2.3)~(2.6)可得

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\mu^T + \mu) \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} \right] - F_z \quad (2.21)$$

$$0 = \frac{\partial T_{y,zz}^{PL}}{\partial z} + F_z \quad (2.22)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \sigma_{\theta} g - F_z \quad (2.23)$$

$$0 = \frac{\partial T_{y,zz}^{PL}}{\partial z} - \sigma_{\theta} g + F_z \quad (2.24)$$

可以看出, 应力  $T_{y,zz}^{PL}$  对两相水平速度分布有较大影响, 应力  $T_{\theta,zz}^{PL}$  则对固相分密度  $\sigma_{\theta}$  的分布有很大影响, 还通过相间力  $F_z$  影响到压强  $p$  的垂向分布。然而在双流体模型中它们没有适当的本构式(即: 用双流体模型中使用的量不能适当地表达这些应力), 这就启发我们采用三流体模型研究风沙流动。

### 三、描写风沙运动的三流体模型

一股气流平稳地流过平板时, 在平板附近气体的垂向速度为零, 然而, 若着眼于气体中

各分子的运动, 就会发现各分子都有非常强烈的上下脉动。这种垂向脉动虽然没有表现出宏观的垂向速度, 但对切向的宏观运动却有着显著的影响: 造成了切向动量沿垂向的强烈交换, 即气体表现出一定的粘性。

对于平板上作湍流运动的气流, 它的垂向平均速度也是零, 然而气流中各微团也都有强烈的上下脉动。这种垂向脉动也会对切向平均运动产生强烈影响, 即气体表现出湍流粘性。

从上一节我们看到, 风沙流中的固相也有类似的情况。式(2.9)表明, 固相拟流体的垂向平均速度为零, 然而强烈的上下脉动造成的不为零的垂直向上(或向下)的质量通量  $\sigma_u w_u$  (或  $\sigma_d w_d$ ) 却通过剪应力  $T_{y,zz}^{PL}$  (参见式(2.17)和(2.22)) 对水平运动产生强烈影响。为了求解水平运动, 必须采用某种方法对这种垂向脉动或它的宏观效应进行计算或估算。在上面第一个例子(气体层流)中, 分子脉动(即热运动)和分子粘性系数可通过温度测量准确地计算出来(气体分子动理学提供了这类计算公式); 在上面第二个例子(气体湍流)中, 气体微团的湍流脉动可以通过混合长理论或其它湍流理论估计出来。因此, 对于这两类运动都没有必要将气体细分为两种流体(向上运动的和向下运动的)去研究。

对于风沙流中固相拟流体  $PL$  类脉动的有关规律, 目前还知之甚少, 气体分子动理论和各种湍流模型对它都不适用, 因此, 在现有的各种理论框架内研究风沙流都有很大的困难。研究风沙流需要一种新的理论, 三流体模型就是在这一个条件下提出来的。

在风沙运动的三流体模型中, 一种流体代表气体(用下标“ $g$ ”表示), 一种是由向上颗粒组成的拟流体(用下标“ $u$ ”表示), 另一种是由向下颗粒组成的拟流体(用下标“ $d$ ”表示)。由于重力的作用, 上升颗粒会变成下降颗粒, 这种现象发生在整个流场中, 说明第二、三两种流体之间存在质量交换以及伴随它的动量交换。

在双流体模型中, 固相的切向动量输运率  $M_y$  由对流项  $(-\sigma_y \bar{u}_y \bar{w}_y)$  和应力项  $T_{y,zz}^{PL}$  两部分组成。在三流体模型中, 流体  $u$  的切向动量输运率  $M_u$  也是由对流项  $(-\sigma_u \bar{u}_u \bar{w}_u)$  和应力项  $T_{u,zz}^{PL}$  两部分组成, 对于流体  $d$  也一样, 即:

$$M_y = -\sigma_y \overline{u_y w_y} = -\sigma_y \bar{u}_y \bar{w}_y + T_{y,zz}^{PL} \quad (3.1)$$

$$M_u = -\sigma_u \overline{u_u w_u} = -\sigma_u \bar{u}_u \bar{w}_u + T_{u,zz}^{PL} \quad (3.2)$$

$$M_d = -\sigma_d \overline{u_d w_d} = -\sigma_d \bar{u}_d \bar{w}_d + T_{d,zz}^{PL} \quad (3.3)$$

设  $u_u$  和  $w_u$  是某个向上颗粒的两个速度分量,  $u'_u$  和  $w'_u$  是它们分别相对于平均速度  $\bar{u}_u$  和  $\bar{w}_u$  的偏差,  $u_d$ ,  $w_d$ ,  $u'_d$  和  $w'_d$  是某个向下颗粒的对应量, 即:

$$\left. \begin{aligned} u'_u &= u_u - \bar{u}_u, & w'_u &= w_u - \bar{w}_u \\ u'_d &= u_d - \bar{u}_d, & w'_d &= w_d - \bar{w}_d \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

则

$$T_{u,zz}^{PL} = -\sigma_u \overline{u'_u w'_u}, \quad T_{d,zz}^{PL} = -\sigma_d \overline{u'_d w'_d} \quad (3.5)$$

与式(2.17)对比可得

$$\bar{u}_u = \bar{u}_u + \frac{\overline{u'_u w'_u}}{\bar{w}_u}, \quad \bar{u}_d = \bar{u}_d + \frac{\overline{u'_d w'_d}}{\bar{w}_d} \quad (3.6)$$

不论用什么模型, 固相的切向动量的总输运率应该相等, 所以

$$\begin{aligned} M_y &= M_u + M_d \\ -\sigma_y \bar{u}_y \bar{w}_y + T_{y,zz}^{PL} &= (-\sigma_u \bar{u}_u \bar{w}_u + T_{u,zz}^{PL}) + (-\sigma_d \bar{u}_d \bar{w}_d + T_{d,zz}^{PL}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

在本文研究的流动中, 因为 $\bar{w}_y=0$ , 所以上式右边四项都是 $T_{y,zz}^{PL}$ 的组成部分。

如果所有向上颗粒都有相同的垂向速度 $w_u$  (因而 $w'_u=0$ ), 或都有相同的水平速度 $u_u$  (因而 $u'_u=0$ ), 则 $T_{u,zz}^{PL}=0$ 。由此可见,  $T_{u,zz}^{PL}$ 产生于向上颗粒中速度分布的不均匀性。对于作纯剪切运动的气体, 引入类似于式(3.7)的表达式, 用气体分子动力学中的 Enskog 方法可以较准确地求出如下结果: 在气体剪应力中, 向上分子速度不均匀性和向下分子速度不均匀性引起的剪应力大约各占18%, 而向上分子对流与向下分子对流所引起的剪应力各占32%。我们曾用计算机模拟颗粒跃移运动<sup>[9]</sup>, 对大量的跃移轨迹进行了统计, 也证实了 $|T_{k,zz}^{PL}|$ 明显小于 $|\sigma_k u_k w_k|$  ( $k=u, d$ ) (参见图1)。

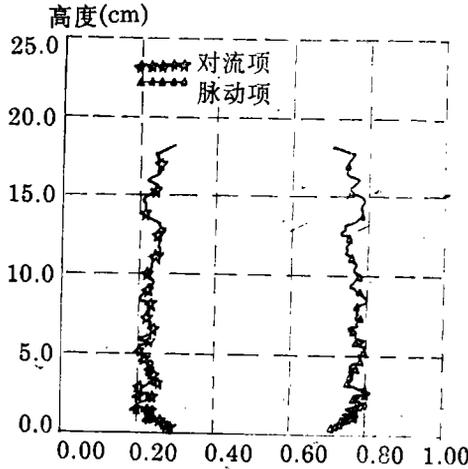


图1. 固相脉动应力中对流项及脉动项所占比例

下面我们看一看在双流体模型中很难解决的关于 $T_{y,zz}^{PL}$ 的表达式, 在三流体模型中是如何处理的。

在三流体模型中, 流体 $u$ 的速度 $u_u, w_u$ 和流体 $d$ 的速度 $u_d, w_d$ 都属于应变变量, 所以式(3.7)右边第一、三项不存在提模型的问题, 而这两项正是 $T_{y,zz}^{PL}$ 的主要组成部分。虽然关于 $T_{u,zz}^{PL}$ 和 $T_{d,zz}^{PL}$ 仍存在建立模型的问题, 但由于它们的值较小, 对流动的影响小, 所以可以采用较粗的模型近似之, 在初步研究时甚至可以忽略之。我们认为, 在较好地把握了对风沙流结构起重要作用的固相脉动剪应力 $T_{y,zz}^{PL}$ 的主要部分的前提下, 即使对 $T_{u,zz}^{PL}$ 和 $T_{d,zz}^{PL}$ 模化存在一定误差, 最终求得的风沙流结构至少在定性上是正确的。虽然有关结果与实际情况相比在定量上还存在一定偏差, 但考虑到目前各家学者关于风沙流结构的研究结果在定性上都存在较大分歧, 这样的工作无疑是很有意义的。

对于法向应力 $T_{y,zz}^{PL}$ 也可引入类似的表达式

$$P_y = -\sigma_y \bar{w}_y^2 = -\sigma_y \bar{w}_y^2 + T_{y,zz}^{PL} \quad (3.8)$$

$$P_u = -\sigma_u \bar{w}_u^2 = -\sigma_u \bar{w}_u^2 - \sigma_u \overline{w'_u{}^2} = -\sigma_u \bar{w}_u^2 + T_{u,zz}^{PL} \quad (3.9)$$

$$P_d = -\sigma_d \bar{w}_d^2 = -\sigma_d \bar{w}_d^2 - \sigma_d \overline{w'_d{}^2} = -\sigma_d \bar{w}_d^2 + T_{d,zz}^{PL} \quad (3.10)$$

$$-\sigma_y \bar{w}_y^2 + T_{y,zz}^{PL} = (-\sigma_u \bar{w}_u^2 + T_{u,zz}^{PL}) + (-\sigma_d \bar{w}_d^2 + T_{d,zz}^{PL}) \quad (3.11)$$

实验观察表明, 在床面以上 (即在流场中) 发生颗粒-颗粒碰撞的几率很小<sup>[10]</sup>, 因此在下面的分析中我们假设流场中无颗粒-颗粒碰撞。对于定常充分发展的二维风沙流, 不难得

到如下的三流体模型方程组:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_g w_g) = 0, \quad w_g = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_u w_u) = -S \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_d w_d) = S \quad (3.14)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_g u_g w_g) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\mu^T + \mu) \frac{\partial u_g}{\partial z} \right] - F_{u_z} - F_{d_z} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_u \bar{u}_u w_u) = \frac{\partial T_{\frac{u}{z}}^{PL}}{\partial z} + F_{u_z} - u^* S \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_d \bar{u}_d w_d) = \frac{\partial T_{\frac{d}{z}}^{PL}}{\partial z} + F_{d_z} + u^* S \quad (3.17)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_g w_g^2) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \sigma_g g - F_{u_z} - F_{d_z} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_u w_u^2) = \frac{\partial T_{\frac{u}{z}}^{PL}}{\partial z} - \sigma_u g + F_{u_z} - v^* S \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_d w_d^2) = \frac{\partial T_{\frac{d}{z}}^{PL}}{\partial z} - \sigma_d g + F_{d_z} + v^* S \quad (3.20)$$

其中式(3.12)的第二式是利用边界条件“ $z=0$ 时 $w_g=0$ ”(参见式(2.7))推导出的。利用该式,式(3.15)和(3.18)的左边都化简为零了。 $F_{u_z}$ 和 $F_{d_z}$ 是气相作用于向上颗粒相的作用力, $F_{d_z}$ 和 $F_{u_z}$ 则是气相作用于向下颗粒相的作用力。 $S$ 是从向上颗粒相转移到向下颗粒相的质量交换率, $u^*S$ 和 $v^*S$ 分别是这些质量携带的水平动量和垂向动量。由于颗粒从属于相 $u$ 变为属于相 $d$ 时垂向速度为零,所以 $v^*=0$ 。此外,在任一高度 $z^*$ 上的所有向上粒子中,参与质量交换的那部分粒子由于垂向速度最小,从 $z=0$ 上升至高度 $z^*$ 经历的时间最长,因而它们从气相获得的动量最多,即:它们从 $z=0$ 上升至高度 $z^*$ 期间获得的水平速度增量最大。若不计粒子从床面起跳时的水平速度之间的差异(事实上,当 $z^*$ 较大时,颗粒从气流获得的水平速度增量明显大于它们起跳时水平速度之间的差异),则这类颗粒的水平速度明显大于当地向上粒子的平均速度 $\bar{u}_u$ 。这类颗粒进入相 $d$ 后,在当地所有相 $d$ 颗粒中它的水平速度又是最小的,因为其它颗粒都是从更高的高度下落的,经历了更长时间的气流加速过程。由以上分析可以得出:

$$v^*=0, \quad \bar{u}_u < u^* < \bar{u}_d, \quad u^* \approx \frac{1}{2}(\bar{u}_u + \bar{u}_d) \quad (3.21)$$

我们认为上面第三式是目前可考虑采用的近似式。

不难证明,由式(3.13)、(3.14)相加可得式(2.2),利用式(3.7)和(3.11),由式(3.16)、(3.17)相加可得式(2.4),式(3.19)、(3.20)相加可得式(2.6)。

对于平坦沙漠上的定常充分发展的风沙流,由以上(3.12)~(3.20)共九个方程可求解九个变量: $p$ ,  $u_g$ ,  $w_g$ ,  $\sigma_u$ ,  $\bar{u}_u$ ,  $w_u$ ,  $\sigma_d$ ,  $\bar{u}_d$ 和 $w_d$ 。方程组除对 $u_g$ 是二阶的外,对其余变量均是一阶的,加上求解域的上边界(即风沙层高度 $h$ )是待定的动边界,所以共需要11个边界条件。我们认为可提如下的边界条件:

·在床面上, 即 $z=0$ 处有

$$w_g=0, u_g=0, \sigma_u w_u=\phi_1, \sigma_u \bar{u}_u=\phi_2 \quad (3.22)$$

·在风沙流上边界, 即 $z=h$ 处有

$$\sigma_u=\sigma_d=0, \bar{w}_u=\bar{w}_d=0, \bar{u}_u=\bar{u}_d, \frac{\partial u_g}{\partial z}=\frac{u_*}{\kappa z}, p=0 \quad (3.23)$$

其中  $\kappa$  是Karman常数,  $u_*$  是气流摩阻速度。

为了使方程组(3.12)~(3.20)可解, 需要给定关于  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $S$ ,  $T_{k,zz}^{PL}$  和  $T_{k,zz}^{PL}(k=u, d)$  的表达式, 这需要采用理论与实验相结合的方法作进一步研究加以解决。从细观上讲, 这七个量都与颗粒从床面起跳时速度的统计分布和单位时间内、单位面积上起跳颗粒的总量有关。

同双流体模型的方程组(2.21)~(2.24)相比, 三流体模型的方程组有明显的优越性: 风沙流中最关心的量有  $\sigma_p$  和  $\bar{u}_p$ , 但在方程(2.21)~(2.24)中这两个量都没有直接出现—— $\bar{u}_p$  是通过相间力  $F_x$  进入方程组的, 而  $\sigma_p$  则是通过  $T_{p,zz}^{PL}$  和  $T_{p,zz}^{PL}$  影响流动的。由于固相相对于  $\bar{u}_p$  和  $\bar{w}_p(=0)$  的脉动速度无法估计, 所以很难建立关于  $T_{p,zz}^{PL}$  和  $T_{p,zz}^{PL}$  的模型。此外, 对于方程组(2.21)~(2.24)应该提怎样的边界条件, 这些边界条件通过何种关系影响流动解等问题也都很不清楚。相比之下, 在方程组(3.12)~(3.20)中,  $\sigma_u$ ,  $\sigma_d$ ,  $\bar{u}_u$ ,  $\bar{u}_d$ ,  $w_u$  和  $w_d$  是作为变量直接出现的,  $T_{p,zz}^{PL}$  和  $T_{p,zz}^{PL}$  的主要部分也已由这些量显式表示, 所以该方程组更接近可解。此外, 该方程组边界条件的提法是清楚的, 它们影响流场的物理机制也可从方程中明显地反映出来。

## 四、结 论

1. 在风沙流中运动颗粒数量非常大, 要描写如此大量的颗粒的运动可采用连续介质力学方法。

2. 风沙流中颗粒运动的主要形式是跃移。跃移颗粒的上下运动反映到连续介质模型中是固相的无规则运动。这种无规则运动既不属于热运动, 也不是湍流脉动, 这是二相流中特有的一种无规则运动——PL类脉动。

3. 当采用双流体模型描写风沙运动时, 固相的剪应力  $T_{p,zz}^{PL}$  和  $z$  向正应力  $T_{p,zz}^{PL}$  是确定固相水平速度和分密度的关键量。这两个应力主要都是由固相的 PL 类脉动引起的, 它们的规律目前远未搞清楚, 这使得双流体模型的应用遇到很大的困难。根据现有的认识, 剪应力  $T_{p,zz}^{PL}$  的本构式不是梯度型的。

4. 本文提出了用两种流体分别代替向上运动颗粒和向下运动颗粒的风沙流三流体模型及相应的边界条件, 它可以较好地反映风沙流的内部结构和边界状况对流动的影响, 而且固相应力  $T_{p,zz}^{PL}$  和  $T_{p,zz}^{PL}$  的主要部分已可用应变变量显式表示, 对近似求解相当有利。

## 参 考 文 献

- [1] R. A. Bagnold. 《风沙和荒漠沙丘物理学》(钱宁、林秉南译), 科学出版社, 北京(1959).
- [2] 吴正, 刘贤万, 风沙运动的多相流研究现状及展望, 力学与实践, 3(1) (1981), 8—11.
- [3] 吴正, 《风沙地貌学》, 科学出版社, 北京(1987).

- [4] 刘大有, 《二相流体动力学》, 高等教育出版社, 北京 (1993).
- [5] 刘大有、李洪州, 论流态化的颗粒群当作流体处理的条件以及其他问题, 第四届全国多相流、非牛顿流和物理化学学术会议论文集, 西安 (1993), 93—100.
- [6] 刘大有、董飞、贺大良, 风沙二相流运动特点的分析, 地理学报 (待发表).
- [7] 刘大有, 关于二相流、多相流、多流体模型和非牛顿流等概念的探讨, 力学进展, 24 (1994), 66—74.
- [8] Liu Dayou and Lu Zhanmin, Various kinds of random motion and stress in two phase flows, *Proceedings of the 2nd International Conference on the Fluid Mechanics*, Beijing (1993).
- [9] 董飞, 定常二维充分发展的风沙流的数值模拟, 中科院力学所硕士学位论文 (1994).
- [10] 贺大良、高有广, 沙粒跃移运动的高速摄影研究, 中国沙漠, 9(1) (1988), 18—29.

## A Three-Fluid Model of the Sand-Driven Flow

Liu Dayou                      Dong Fei

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080, P. R. China*)

### Abstract

The sand-driven flow is studied from the continuum view-point in this paper. The crux of this work is how to model the stresses of the particle phase properly. By analysing the two-fluid model which usually works in solving gas-particle two-phase flow, we find that this model has many deficiencies for studying the sand-driven flow, even for the simplest case — the steady, two-dimensional fully-developed flow.

Considering this, we have proposed the three-fluid model in which the upward-particles and the downward-particles are regarded as two kinds of fluids respectively. It is shown that the three-fluid model is better than the two-fluid model in reflecting the internal structure of the flow region and the influence of the boundary situations on the flow, and it is advantageous to find an approximate solution in that the main components of the particle phase stresses can be explicitly expressed by those variables in the three-fluid model.

In the end, the governing equations as well as the boundary conditions for the three-fluid model are provided with a discussion.

**Key words** sand-driven flow, two-phase flow, two-fluid model, three-fluid model